线性代数与几何

[德] 威廉·克林根贝尔格 著

沈纯理 郑宇 译

高等教育出版社

(京)112号

图字：01—1995—332号

本书是线性代数和古典几何学的一本入门教材．作者将这两门学科的内容有机地融合在一起，除了介绍线性代数、双线性代数的基础知识外，深入讨论了Jordan标准形及其应用，也涉及诸如Hilbert空间理论中的一些内容．本书还包括了古典几何学，即仿射和欧氏几何以及射影几何，也介绍了按照Klein的观点所导出的两种非欧几何．

本书选材丰富、表述精练，不仅可以作为教师讲授此类课程的参考，也极适合于读者自学．

本书可作为大学、尤其是师范院校数学系的基础教材，也可供数学工作者参考．

译者的话

数学分析、高等代数和解析几何是高等院校数学专业最主要的三门基础课程. 随着科学技术的不断发展, 多年来人们一直致力于这些课程的更新和改造. 这三门课程的内容彼此有机地交叉联系着. 例如, 从本质上看, 解析几何中的二次曲线、二次曲面的分类与线性代数中的二次型的分类可以说是一回事. 人们一直希望能将这两门课程的内容有机地融合起来.

Klingenberg的"线性代数与几何"一书就是沿着这条思路所作出的一种尝试. 将此书从德文译成中文的目的就是向国内读者介绍这种改革的思路, 读者可以从中得到一些启发.

19世纪数学的重大成果之一是射影几何的发展及非欧几何的发现. 这是数学中的瑰宝. 然而近年来无论在国内还是在国外, 这一学科的内容渐渐地从大学的课程中消退. 除了少数师范院校外, 一般已不再向大学生讲授这方面的内容. Klingenberg的书本着删繁就简、保存精华的精神对这些内容按近代的观点加以处理后介绍给读者. 本书的内容也不单纯地限于经典的线性代数和几何学, 也涉及了诸如Hilbert空间理论等重要内容. 因此这本书是有相当的参考价值的.

本书是根据《 Lineare Algebra und Geometrie 》的第三版译出的. 在翻译的过程中, 作者又对第三版作了不少的修改, 译文中也作了相应的修改.

本书的作者Wilhelm Klingenberg教授是一位国际著名的、享有很高声誉的微分几何学家. 译者之一有幸在他所领导的德国波恩大学几何组工作过两年. 在此期间, 译者在学术、生活等方面曾得到Klingenberg教授极大的帮助. 如果这本书能对国内读者有所帮助的话, 那也就是译者对Klingenberg教授的一种很好的回报.

译者　沈纯理, 郑宇

1998年7月于华东师范大学

第三版前言

怀着自豪和愉快的心情，我可以预告这本书的第三版即将出版. 下述观念常能得以证实：线性代数并不单纯以其自身为目的，而是作为分析的基本辅助工具，而且首先是为了几何学而提出的.

我已经改正了少量我所发现的印刷错误.

柏林， 1992年5月　　　　威廉·克林根贝尔格

第二版前言

新版在三个方面有所改善. 首先修正了一些错误，并使有些证明更一目了然. 我的学生们给了我帮助，依靠了他们，我在三个学期的授课和讨论班中讲授了这些材料. 进而，现在在每一章的最后可以找到习题； Hans-Bert Rademacher对此给了我以支持. 最后，这本书是由Barbara Strahl以全新的方式用 TEX方法排版的 —— 我认为这是一个很大的进展. 她做了这些，并提出了一些批评性的意见，并使许多材料显得层次分明. 于是我可以希望我的这本最近的数学教科书会再一次受到重视.

波恩， 1989年5月　　　　威廉·克林根贝尔格

第一版前言

放在面前的这本书是从我在 Göttingen, Mainz 和 Bonn 多次讲过的课程中形成的. Mainz 的讲义是 1963/64 年由 K. H. Bartsch, K. Steffen 和 P. Klein 整理写成的. P. Klein 写出了代数部分的一个扩充的文本，于 1971/73 年联名在文献研究所出版. 几何部分的出版计划没有实现.

随着我教学工作终点的临近，我现在提交一个完整的文本，我把它理解成“解析几何”. 这个文本以完全一般的形式将下列内容放在一起：线性和双线性代数，但也包括古典几何，即仿射和欧氏几何以及射影几何和据此按照 Felix Klein 的观点所导出的两种非欧几何.

由于古典几何的范围很广，我在讲课中自然只能展现其基础部分. 而且即使对基础部分，我也只能讲到欧氏几何，没有一次能讲到射影几何. 但无论如何我能清楚地做到，只要将以前所发展的线性和双线性代数处置成它们今日的形态，就能让大量的古典材料成为一目了然和容易理解.

现在我们在这本书中写得很多，这些内容在两个学期中并不能全被讲完. 通过自学或在第三学期的讨论班的范围内，学生能熟悉在今天已被强烈地忽视了的古典几何. 对此他不需要费力地与以前一代的那种陈旧的、冗长的文风打交道. 他在这里能找到下述许多内容，例如三角形的接触圆、圆锥曲线、二次曲面、Dandelin 球面、仿射和射影几何的基本定理、非欧几何的共形模型、Clifford 曲面，直至像 Morley 定理那样的珍品. 而且集所有这些于一卷的内容乃是人们从 (双) 线性代数中所必需知道的.

从一开始，这些材料就按照随后所需要的一般性而被展现出来. 我已经放弃了教学预备阶段及动机说明. 对此我确信：

一个好事物的本身也说明了它自己. 一个还过得去的学生对接受一些“抽象”的定义并不会感到困难：当他在课程的进程和应用中看到被导入的概念是如此地有用和十分重要, 因而他也会熟悉和学习它们，并用它们来处理问题.

于是在整本书的一开始就介绍群. 作为由自身双射所得到的一种结构，群的出现是完全自然的. 对向量空间，首先没有限制维数是有限的, 因为函数空间乃是向量空间的最重要的例子. 随后可以清楚地看到, 放弃维数的有限性能通过一个附加结构而在相当大的程度上得到补偿；对Hilbert空间，这种结构甚至是完备的.

对复的及实的情形的Jordan标准型是用初等的方式来导出的. 我们用它来解常系数线性微分方程组, 且描述了对零解是稳定的这类方程组.

严格地说，几何部分是从第7章开始的. 首先在一般的向量空间上考虑仿射空间和射影空间. 我们将二次型予以分类并证明，在实数情形下，余维数为1的二次型是刚性的. 仿射和射影几何的主要定理 (可用它来特征一般的直射变换)将通过 v. Staudt关于将射影直线上的调和四点列仍变换成调和四点列的双射的特征的定理而得到补充. 随后，交比将在非欧几何中起着重要的作用.

在欧氏向量空间上的仿射空间给出了欧氏几何；在它的射影空间上导致了椭圆几何. 当作为基础的向量空间带有一个Lorentz度量时，我们得到了双曲几何. 共形模型和三角学的基本公式可被导出. 对于平面几何的运动群，复数是重要的，而对于空间几何的运动群，四元数是重要的.

关于内容的进一步的细节，可参阅下面的内容目录及索引.

最后我还想强调一次，我更多地希望这本书仅仅作为一

本线性代数的进一步的、而且还是相当完整的教科书. 此外, 学生 —— 这里特别是指未来的教师 —— 应当熟悉古典几何. 这是我们欧洲文化的一个巨大的成就. 在年轻一代的头脑中, 古典几何被人讲成已经消亡了. 对此我想保存古典几何.

我的助手们已帮我读了校样. 有些错误在整个工作临近结尾时被我的同事 A. M. Pastore 发现. Christine Sacher 打印了手稿, 这是一件艰苦的工作. 他们理应得到我的感谢.

波恩, 1983年11月　　　　威廉·克林根贝尔格

内容目录

第 1 章　一般基础概念
1.1　集合和映射 ······ 1
1.2　群 ······ 4
1.3　群态射 ······ 7
1.4　等价关系和商群 ······ 10
1.5　环和域 ······ 15
习题 ······ 19
第 2 章　向量空间
2.1　模和向量空间 ······ 21
2.2　线性映射 ······ 24
2.3　生成系和自由系 ······ 27
2.4　基系 ······ 30
2.5　有限维向量空间 ······ 33
2.6　线性补 ······ 36
习题 ······ 39
第 3 章　矩阵
3.1　线性映射的向量空间 ······ 42
3.2　对偶空间 ······ 44
3.3　转置映射 ······ 49
3.4　矩阵 ······ 54
3.5　矩阵乘积 ······ 59
3.6　秩 ······ 63
习题 ······ 67
第 4 章　线性方程和行列式
4.1　线性方程组 ······ 70

4.2 Gauss消去法 ······ 73
4.3 对称群 ······ 76
4.4 行列式 ······ 80
4.5 行列式展开定理 ······ 87
习题 ······ 90
第 5 章 特征值和标准型
5.1 特征值 ······ 94
5.2 标准型、初等理论 ······ 97
5.3 Hamilton-Cayley定理 ······ 102
5.4 Jordan标准形 ······ 106
5.5 常系数线性微分方程组 (复的情形) ······ 115
5.6 **R**上的Jordan标准形 ······ 118
5.7 线性常系数微分方程组 (实的情形) ······ 124
习题 ······ 127
第 6 章 度量向量空间
6.1 酉向量空间 ······ 131
6.2 赋范向量空间 ······ 139
6.3 Hilbert空间 ······ 148
6.4 线性算子、酉群 ······ 157
6.5 埃尔米特形式 ······ 167
习题 ······ 173
第 7 章 仿射几何
7.1 仿射空间 ······ 178
7.2 仿射变换与直射变换、基本定理 ······ 184
7.3 线性函数 ······ 192
7.4 仿射二次型 ······ 201
习题 ······ 213

第 8 章　欧几里得几何

8.1　仿射 - 西空间 ………… 218
8.2　线性函数和二次函数 ………… 225
8.3　角度 ………… 233
8.4　附录：四元数和 $SO(3)$, $SO(4)$ ………… 243
8.5　三角学 ………… 248
8.6　圆锥曲线 ………… 260
习题 ………… 277

第 9 章　射影几何

9.1　射影空间 ………… 284
9.2　仿射空间的射影扩张 ………… 288
9.3　附录：一般射影和仿射平面 ………… 298
9.4　交比，v. Staudt 定理 ………… 306
9.5　二次型和配极 ………… 317
习题 ………… 328

第 10 章　非欧几何

10.1　双曲空间 ………… 331
10.2　双曲空间的共形模型 ………… 341
10.3　椭圆几何 ………… 357
10.4　椭圆空间的共形模型 ………… 363
10.5　Clifford 平行线 ………… 371
10.6　球面几何和三角学 ………… 379
习题 ………… 386

文献提示 ………… 387
文献目录 ………… 388
索引 ………… 390

第1章

一般基础概念

1.1 集合和映射

我们考察集合A, B, C, $\cdots$. 对于集合，我们不去讨论其形式化的叙述，只是把集合A看成将对象x, y, z, $\cdots$ 收集在一起. 对我们来说，这样的叙述应该已经是足够的了. 集合中的对象x称为元素，我们把x属于集合A记为$x \in A$. 有时我们也把集合A写成形如$\{x, y, z, \cdots\}$, 即我们将A中的元素详尽地列举出来.

我们称集合A是集合B的一个子集，是指A中每个元素x也是B中的元素，记成： $A \subset B$. 当$A \subset B$时，则用$B \backslash A$表示由$x \in B$, 但$x \notin A$的元素x所构成的集合.

把空集记为$\emptyset$是有用处的，它是一个没有元素的集合.

定义1.1.1 设A和B是两个集合. 映射$f: A \to B$是一种规则，它把每一个$x \in A$恰好对应于一个$y \in B$. 我们将这个y表示成$f(x)$, 或者简单地记为fx, 且称它为x的象. 如果$fx = y$, 则称x为y的原象.

例1.1.2 1. 设$A = \mathbf{N} =$ 自然数集合$\{0, 1, 2, \cdots\}$, 设m是一个固定的自然数. 用 "规则" $f(x) = mx$给出了一个映射$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

2. 称 $\mathrm{id}_A: A \to A; x \mapsto x$为从$A$到$A$上的恒同映射.

例1.1.3 设$f: A \to B$是一个映射.

1. 如果$f(A) = \{f(x); x \in A\} = B$, 则称$f$为满射.

2. 如果对A中所有的偶(x, x'), 从$f(x) = f(x')$能推出$x = x'$, 则称f为单射.

3. 如果f同时是满射和单射，则称f为双射.

命题1.1.4 如果$f:A\to B$是双射，则存在所谓的逆映射$f^{-1}:B\to A$：当$y=f(x)$时，令$f^{-1}(y)=x$. f^{-1}也是双射.

证明：因为f是满射，所以对每个$y\in B$，存在$x\in A$使得$f(x)=y$. 又因为f是单射，所以对$y\in B$，仅存在唯一的x，使得$f(x)=y$. 因而f^{-1}是一个映射. 剩下部分是显然的. □

例1.1.5 1. 1.1.2中的映射$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 对每个$m>0$均为单射，这是因为由$mx=mx'$可推出$m(x-x')=0$，于是$x-x'=0$. 但是对$m>1$，f不是满射.

2. 设 $\mathbf{Z}$是所有整数的集合$\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$. 映射

$$f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N};\qquad x\mapsto\begin{cases} x, & \text{对 } x\geq 0\\ -x, & \text{对 } x\leq 0\end{cases}$$

是满射，但不是单射，因为对所有x，有$f(-x)=f(x)$.

3. 设$\mathbf{Q}$是有理数集合$\{0,\pm\frac{p}{q};p,q\in\mathbf{N}^+=\mathbf{N}\backslash\{0\}\}$. 读者可验证映射：

$$f:x\in\mathbf{Q}\mapsto mx\in\mathbf{Q},\quad m\in\mathbf{N}\backslash\{0\}$$

是双射.

定义1.1.6 设$f:A\to B$, $g:B\to C$是两个映射. 于是可用$x\mapsto g(f(x))$构造出一个映射$g\circ f$. 称$g\circ f:A\to C$为f和g的复合.

注：对于f和g的复合，请注意其次序是$g\circ f$，而不是$f\circ g$. 这种记法的缘由是我们已约定记$f(x)$而不是$x(f)$.

命题1.1.7 设

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$$

是一些映射. 于是成立

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f,$$

因而我们就将它简记为$h\circ g\circ f$.

证明: 利用复合的定义:

$$
\begin{aligned}
(h\circ(g\circ f))(x) &= h(g(f(x))) \\
&= (h\circ g)(f(x)) = ((h\circ g)\circ f)(x).
\end{aligned}
$$

□

命题1.1.8 如果$f:A\to B$和$g:B\to C$是

$$
\left.\begin{matrix}\text{满射}\\ \text{单射}\\ \text{双射}\end{matrix}\right\},\qquad \text{则 } g\circ f \text{ 也是}\left\{\begin{matrix}\text{满射}\\ \text{单射}\\ \text{双射}\end{matrix}\right..
$$

证明: 设f和g是单射. 由$(f\circ g)(x)=(f\circ g)(x')$可得出$g(x)=g(x')$, 于是$x=x'$.

设f和g是满射. 因为$f(A)=B$, $g(B)=C$, 于是我们有$(g\circ f)(A)=C$. □

例1.1.9 在1.1.4中我们已指出, 对每一个双射$f:A\to B$, 存在着逆映射$f^{-1}:B\to A$. 于是有

$$
f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_A;\qquad f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_B.
$$

下列命题提供了反过来的事实.

命题1.1.10 设$f:A\to B$, $g:B\to A$为映射, 且$f\circ g=\mathrm{id}_B$. 于是f是满射, g是单射.

证明: 把$y\in B$写成$f(g(y))=y$, 于是f为满射. 由$g(y)=g(y')$可得出$y=f(g(y))=f(g(y'))=y'$, 于是g为单射. □

系1.1.11 $f:A\to B$为双射的充要条件是存在一个$g:B\to A$, 使得$f\circ g=\mathrm{id}_B$, $g\circ f=\mathrm{id}_A$, 且有$g=f^{-1}$. □

系1.1.12 设$f:A\to B$是双射. 于是$(f^{-1})^{-1}=f$.

证明: 由1.1.9及$(f^{-1})^{-1}$的定义知道

$$f^{-1}\circ f = f^{-1}\circ (f^{-1})^{-1} = \mathrm{id}_A;$$
$$f\circ f^{-1} = (f^{-1})^{-1}\circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

应用1.1.11后即得. □

1.2 群

现在我们来看具有附加结构的集合的第一个，而且同时又是很重要的例子. 在定义中我们将用到由两个集合A和B所定义的所谓乘积集合$A\times B$. 它是偶(x,y)的集合，其中$x\in A$和$y\in B$.

定义1.2.1 群G是一个具有连接关系

$$G\times G\to G$$
$$(x,y)\mapsto x\cdot y$$

的集合 (我们同样地用G来表示), 它满足下列的所谓群的公理:

1. 对G中所有的x, y, z, 成立结合律

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z).$$

2. 存在一个所谓中性元$e\in G$, 使得对所有$x\in G$, 有

$$e\cdot x = x\cdot e = x.$$

3. 对每个$x\in G$, 存在一个$y\in G$, 使得

$$y\cdot x = e.$$

称y为x的左逆元.

例1.2.2 设M是一个任意的集合. 双射的集合S_M或Perm M(也被称为置换)构成一个群，这时我们已选用复合$g\circ f$作为其连接关系$f\cdot g$ (参见 1.1.6). 事实上，由1.1.7可知结合律成立， id_M是中性元，且按照1.1.9, f^{-1}是左逆元.

例1.2.3 如果对所有$(x,y)\in G\times G$, 成立$x\cdot y=y\cdot x$, 则称G是Abel群或交换群.

在这种情形下，我们常把$x\cdot y$写成$x+y$.

例1.2.4 1. 整数集合$\mathbf{Z}$在结合关系$(x,y)\mapsto x+y$下成为一个Abel群. 0是中性元， $-x$是x的左逆元.

2. 非零有理数集合$\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}\backslash\{0\}$在结合关系$(x,y)\mapsto x\cdot y$下成为一个Abel群. 1是中性元， $\dfrac{1}{x}$是左逆元.

3. 三个元素的置换群$S_3\equiv S\{1,2,3\}$不是Abel群. 可以证明：例如，置换

$$\{1\mapsto 2, 2\mapsto 1, 3\mapsto 3\} \quad 和 \quad \{1\mapsto 1, 2\mapsto 3, 3\mapsto 2\}$$

是不交换的.

命题1.2.5 1. 在群G中只存在唯一的中性元.

2. 在群G中，对$x\in G$, 只存在唯一的左逆元y, 且它亦为右逆元，即$x\cdot y=e$.

注: 对于x的唯一确定的右和左逆元y, 我们也写成x^{-1}或(当G是Abel群，且用$+$表示连接关系时) 写成$-x$. 我们也把$x+(-y)$写成$x-y$.

证明: 对1.: 设e, e'是G中的中性元，于是$e=e\cdot e'=e'$.

对2.: 设$y\cdot x=e$. 于是$y\cdot x\cdot y=e\cdot y=y$. 设$z$是$y$的左逆元. 应用结合律后，我们发现$x\cdot y=z\cdot y\cdot x\cdot y=z\cdot y=e$. 最后可从$y\cdot x=y'\cdot x$得出 $y\cdot x\cdot y=y'\cdot x\cdot y$, 于是$y=y'$. □

系1.2.6 $(x^{-1})^{-1}=x$; $(x\cdot y)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}$.

证明: 从 $e = x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}$ 可推出 $x = (x^{-1})^{-1}$. 且由逆元素的唯一性, 及 $e = x \cdot y \cdot y^{-1} \cdot x^{-1} = (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1})$ 可证得第二个断言. □

定义1.2.7 设 G 是一个群. 对每个 $g \in G$, 定义

$$L_g : G \to G; \quad x \mapsto g \cdot x,$$

$$R_g : G \to G; \quad x \mapsto x \cdot g.$$

分别称 L_g 和 R_g 为 (用元素 $g \in G$ 所得的) 左和右平移.

命题1.2.8 L_g 和 R_g 是双射. $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$; $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$.

证明: 由 $L_g x = L_g x'$, 即 $g \cdot x = g \cdot x'$, 可得出 $x = x'$, 于是 L_g 为单射. 对 $y \in G$, 元素 $x = g^{-1} \cdot y$ 满足 $L_g x = y$, 即 L_g 是满射.

$L_{g^{-1}} \circ L_g x = g^{-1} \cdot g \cdot x = x$, 即 $L_{g^{-1}} \circ L_g = \mathrm{id}_G$. 同样可得 $L_g \circ L_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G$. 再运用1.1.11.

对 R_g, 可类似地证明. □

定义1.2.9 G 中的一个子群 U 是 G 的这样的一部分: 当把 G 的连接关系限制在 U 上时, 它成为一个群.

注: 子群 U 不能是一个空集, 这是因为 U 必须含有一个中性元. 当 e 是 G 的中性元时, 集合 $\{e\}$ 无疑地始终构成了 G 的一个子群.

定理1.2.10 **(子群判据)** 群 G 的一个非空部分 U 是 G 的子群的充要条件是满足下列两个条件之一:

1. $(x, y) \in U \times U \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in U$,
2. $(x, y) \in U \times U \Rightarrow x \cdot y \in U$ 和 $y^{-1} \in U$.

证明: 设 U 是 G 的子群. 设 e_U 是 U 中的中性元. 于是 $e_U = e_U \cdot e_U \cdot e_U^{-1} = e_U \cdot e_U^{-1} = e$. 因而1. 和2. 都成立, 且 $U \neq \emptyset$.

现在反过来, 设 $U \subset G$, $U \neq \emptyset$, 使得1. 成立, 于是 $(y, y) \in U \times U \Rightarrow y \cdot y^{-1} = e \in U$, 因而由 $(e, y) \in U \times U$ 也可得到 $e \cdot y^{-1} =$

$y^{-1} \in U$. 同样，由 $(x,y) \in U \times U$ 又可得 $x \cdot (y^{-1})^{-1} = x \cdot y \in U$. 结合律对 U 中的元素是成立的，因为它对 G 中的所有元素都成立.

最后设 $U \subset G$, $U \neq \emptyset$, 且2. 成立. 由 $y \in U$, 同样又得到 $y^{-1} \in U$, 但由 $(x,y) \in U \times U$, 又可得到 $x \cdot y^{-1} \in U$, 因而， 1. 成立. □

例1.2.11 1. 考虑1.2.4中的整数加法群 $\mathbf{Z}$. 对每个整数 m, 集合 $m\mathbf{Z} = \{mx; x \in \mathbf{Z}\}$ 是一个子群. 这时， 1.2.10中的判据2.是满足的：利用 $x' = mx$, $y' = my$, 可得到 $x' + y' = m(x+y) \in m\mathbf{Z}$ 和 $-y' = m(-y) \in m\mathbf{Z}$.

2. 设 $G = \mathrm{Perm}\ M$ 是1.2.2中的置换群. 选取 $x \in M$. 使 x 不动的置换的集合 G_x 是 G 的一个子群. 这是因为如果 f 和 g 在 G 之中，且 $f(x) = x$, $g(x) = x$, 则有 $g \circ f(x) = x$ 和 $f^{-1}(x) = x$.

1.3 群态射

在1.2中我们已经对一个集合考虑了一种附加结构，即群结构. 对于具有附加结构的集合的类，讨论任意的映射并不是适宜的，一般地说，这样会破坏所给定的结构. 应该去讨论保持结构的映射，对此我们运用“态射”这样一个词. 在其它文献中，也常用“同态”一词来代替它. 对此，如何理解才是准确的，将在本书的进程中阐明. 这里，首先考虑群的类.

定义1.3.1 设 G 和 G' 是群. 所谓群态射或简短地称为态射，是指映射 $f: G \to G'$, 使得对所有 x, $y \in G$, 有 $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

例1.3.2 1. 设 G 是一个群， S_G 是集合 G 的置换群，于是映射

$$R: G \to S_G, \qquad g \mapsto R_g$$

是一个态射. 对

$$L^{-1}: G \to S_G, \qquad g \mapsto L_{g^{-1}},$$

也有同样的结论.

事实上，对 $x \in G$,

$$\begin{aligned} R_{gg'}(x) &= x \cdot g \cdot g' = R_{g'}(x \cdot g) = R_{g'} \circ R_g(x) \\ &= R(g)R(g')(x), \end{aligned}$$

可参见1.2.2. 对 L^{-1} 有相应的论述.

2. 考察 $\mathbf{Z}$ 的子群 $m\mathbf{Z}$, 见1.2.11. 映射 $x \in \mathbf{Z} \mapsto mx \in m\mathbf{Z}$ 是一个态射.

命题1.3.3 设 G 和 G' 分别是具有中性元 e 和 e' 的群. 现在考察一个态射 f. 则对所有 $x \in G$, 我们有 $f(e) = e'$ 和 $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

证明: $f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e)$. 左乘 $f(e)^{-1}$ 后就得到 $e' = f(e)$.

第二个结论得自1.2.5.2, 这是因为 $f(x^{-1}) \cdot f(x) = f(x^{-1} \cdot x) = f(e) = e'$. □

引理1.3.4 设 $f: G \to G'$ 是一个态射， U' 是 G' 的一个子群. 于是 $f^{-1}(U') = \{x \in G; f(x) \in U'\}$ 是 G 的一个子群 U.

证明: 我们指出，1.2.10.2对 U 是满足的. 对 $e \in G$, $f(e) = e' \in U$. 由 x 和 $y \in U$, 即 $f(x)$ 和 $f(y) \in U'$ 可推出 $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \in U'$, 于是 $x \cdot y \in U$. 又因为 $f(y^{-1}) = f(y)^{-1} \in U'$ (见1.3.3), 有 $y^{-1} \in U$. □

定义1.3.5 设 $f: G \to G'$ 是一个态射. f 的核 $\ker f$ 是集合 $f^{-1}\{e'\} = \{x \in G; f(x) = e'\}$. f 的象 $\operatorname{im} f$ 是集合 $f(G) = \{x' \in G'; 存在 x \in G 使得 f(x) = x'\}$.

定理1.3.6 设$f:G\to G'$是一个态射. 于是 $\ker f$是G的子群, $\operatorname{im} f$是G'的子群.

证明: 由 1.3.4及$U'=\{e'\}$可得到第一个结论. 对 $\operatorname{im} f$, 1.2.10.2成立. 这是因为: $e'\in \operatorname{im} f$; 由$f(x)$和$f(y)\in \operatorname{im} f$知$f(x)\cdot f(y)=f(x\cdot y)\in \operatorname{im} f$; 最后, $f(y)^{-1}=f(y^{-1})\in \operatorname{im} f$. □

现在, 态射的复合 (见1.1.6)对群态射是重要的, 显然恒同映射 $\mathrm{id}_G:G\to G$也是重要的态射:

定理1.3.7 设$f:G\to G'$和$f':G'\to G''$是态射, 则$f'\circ f:G\to G''$也是一个态射.

证明:

$$
\begin{aligned}
(f'\circ f)(x\cdot y)&=f'(f(x\cdot y))=f'(f(x)\cdot f(y))\\
&=f'(f(x))\cdot f'(f(y))=(f'\circ f)(x)\cdot(f'\circ f)(y).
\end{aligned}
$$

□

下面的命题给出了态射是单射的一个自然的特征.

命题1.3.8 态射 $f:G\to G'$是单射的充要条件为$\ker f=\{e\}$.

证明: 因为总有 $f(e)=e'$, 于是由态射f的单射性可推出 $\ker f=\{e\}$. 如果f不是单射, 即如果存在$x\neq y$, 使得$f(x)=f(y)$, 则$f(x\cdot y^{-1})=f(x)\cdot f(y)^{-1}=e'$, 即$x\cdot y^{-1}\neq e$将属于 $\ker f$. □

定义1.3.9 如果态射$f:G\to G'$是一个双射, 则称f为同构. 也把同构$f:G\to G$称为自同构.

命题1.3.10 如果$f:G\to G'$为同构, 则$f^{-1}:G'\to G$也是一个同构.

证明: 我们必须证明: $f^{-1}(x'\cdot y')=f^{-1}(x')\cdot f^{-1}(y')$. 在$G$中确定$x$和$y$使得$f(x)=x'$, $f(y)=y'$. 于是成立

$$f^{-1}(x')\cdot f^{-1}(y')=x\cdot y=f^{-1}(f(x\cdot y))$$

$$= f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) = f^{-1}(x' \cdot y').$$

□

例1.3.11 1. G的自同构的集合$AutG$是 Perm G的一个子群. 这是因为当f和g属于$AutG$时, 由1.3.7知$g \circ f \in AutG$, 由1.3.10知$g^{-1} \in AutG$. 于是1.2.10.2满足.

2. $G = \mathbf{R}$是实数的加法群, $G' = \mathbf{R}^+$是大于0的实数的乘法群. 于是用$f(x) = \exp x$可给出一个从$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}^+$上的同构f.

3. 设G是一个群. 对一个固定的$g \in G$, 定义$i_g : G \to G$为$x \mapsto g^{-1} \cdot x \cdot g$.

显然有$i_g = R_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ R_g \in$ Perm G. 因为$i_g(x \cdot y) = g^{-1} \cdot x \cdot y \cdot g = (g^{-1} \cdot x \cdot g) \cdot (g^{-1} \cdot y \cdot g) = i_g(x) \cdot i_g(y)$, 于是$i_g$是一个自同构. 称它为由元素$g \in G$所确定的$G$的内自同构.

用$g \mapsto i_g$所定义的映射$i : G \to AutG$是一个态射, 即$i_{g \cdot g'} = i_g \cdot i_{g'}$. G在i下的象是群$AutG$中的G的内自同构子群.

1.4 等价关系和商群

在本节中我们将继续介绍群论的基础知识.

定义1.4.1 集合M上的一个等价关系'R'或'$\sim$'是指$M \times M$的一个子集R, 使得下列条件成立:

1. 对所有$x \in M$, $(x, x) \in R$ (自反性),
2. $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (对称性),
3. $(x, y) \in R$及$(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (传递性).

注:

1. 如前所见, "$\Rightarrow$"是"蕴含"的缩记.

2. 如我们把$(x, y) \in R$换写成$x \sim y$, 则条件 1., 2., 3. 可分别写成

(a) $x \sim x$,

(b) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,

(c) $x \sim y$和$y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

例1.4.2 1. 相等关系是一个等价关系. 在此情况下, 子集R是M的所谓对角集Δ_M:

$$\Delta_M = \{(x,y) \in M \times M; x = y\}.$$

2. 设$m \in \mathbf{N}^*$. 在整数集合$\mathbf{Z}$中用$x-y \in m\mathbf{Z}$去定义$x \sim y$, 即$x-y$可用m除尽. 1.4.1中的条件 1., 2., 3. 可写为:

(a) $x - x \in m\mathbf{Z}$,

(b) $x - y \in m\mathbf{Z} \Rightarrow y - x = -(x-y) \in m\mathbf{Z}$,

(c) $x - y \in m\mathbf{Z}$和$y - z \in m\mathbf{Z} \Rightarrow x - z \in m\mathbf{Z}$.

显然这些条件均可满足.

3. 设$f: M \to M'$为映射. 在M上用$f(x) = f(y)$来定义$x \sim y$. 例1表明这是一个等价关系.

定义1.4.3 设M是一个具有等价关系$\sim$的集合. 所谓关于$\sim$的等价类或陪集是指一个子集$M' \subset M$, 使得x, $y \in M'$等价于$x \sim y$.

特别地, 每个$x \in M$可确定一个等价类$\overline{x} \subset M$:

$$\overline{x} = \{y \in M; x \sim y\}.$$

注: $\overline{x} = \overline{y} \iff x \sim y$.

例1.4.4 我们来确定1.4.2中一些例子的陪集:

1. 对每个$x \in M$, $\overline{x} = \{x\}$, 即陪集总是由唯一的一个元素所组成的集合.

2. $\overline{x} = \{y = x + km; k \in \mathbf{Z}\} = \{x, x \pm m, x \pm 2m, \cdots\}$. 我们也把它写成$\overline{x} = \{x\} + m\mathbf{Z}$. 可以看出有$m$个不同的陪集, 它们可表示为$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\cdots$, $\overline{m-1}$.

定义1.4.5 设M是一个非空集合. M的一个划分是指M的一个子集族$P=\{A\}$, 使得

1. $A\neq\emptyset$,

2. 当$A\neq B$时, $A\cap B=\emptyset$,

3. $\bigcup_{A\in P}A=M$.

这就是说, M被分成一些不相交的非空集合.

定理1.4.6 1. 在M上的一个等价关系$\sim$确定了M的一个划分$P=P(\sim)$. 划分中的元素是由$\sim$的陪集$\bar{x}$给出的.

2. 反过来说, M的一个划分P确定了M上的一个等价关系$\sim=\sim_P$. $x\sim y$是用下列条件来确定的: x和y属于P的同一个元素A.

3. 如$P=P(\sim)$, 则有$\sim_P=\sim$, 而且如$\sim=\sim_P$, 则有$P(\sim)=P$. 因而M上的等价关系以唯一的方式对应于M的划分.

证明: 对1.: 显然有$\bar{x}\neq\emptyset$, 这是因为$x\in\bar{x}$. 由$\bar{x}\cap\bar{y}\neq\emptyset$可推出$\bar{x}=\bar{y}$. 因为$z\in\bar{x}\cap\bar{y}$意味着$x\sim z$和$z\sim y$, 于是也有$x\sim y$. 最后, x属于$\bar{x}$.

对2.: 对于$\sim_P$, 成立着: $x\sim_P x$, 且由$x\sim_P y$可推出$y\sim_P x$. $x\sim_P y$和$y\sim_P z$意味着x,y属于P中的一个集合A, y和z属于P中的一个集合B. 于是$y\in A\cap B$, 因此$A=B$, 即$x\sim_P z$.

对3.: $x\sim y \iff \bar{x}=\bar{y} \iff x\sim_{P(\sim)} y$. x和y属于P中的一个集合 $\iff x\sim_P y \iff x$和y属于$P(\sim_P)$中的一个集合.
□

现在我们要将前面的想法应用到群及其子群上去.

命题1.4.7 设U是群G的子群. 在G上利用$x\cdot y^{-1}\in U$定义关系$x\sim_U y$. $\sim_U$是一个等价关系.

证明: 显然$x\sim_U x$, 这是因为$x\cdot x^{-1}=e\in U$. $x\sim_U y$, 即$x\cdot y^{-1}\in U$, 蕴含$y\cdot x^{-1}\in U$, 于是$y\sim_U x$. 最后, 传递性也成

立，这是因为$x\cdot y^{-1}\in U$及$y\cdot z^{-1}\in U$蕴含$x\cdot z^{-1}\in U$. □

注：关系$\sim_U$的陪集$\bar{x}$呈形状为

$$\bar{x}=U\cdot x=\{u\cdot x;u\in U\}.$$

我们问，是否能在陪集的集合上利用约定$\bar{x}\cdot\bar{y}=\overline{x\cdot y}$来定义一个连接关系. 如果这是可能的，则必须能从$\bar{x}=\overline{x'},\bar{y}=\overline{y'}$推出$\overline{x\cdot y}=\overline{x'\cdot y'}$. 也就是说，从$x'\cdot x^{-1}\in U$及$y'\cdot y^{-1}\in U$必须能推出$x'\cdot y'\cdot(x\cdot y)^{-1}=x'\cdot y'\cdot y^{-1}\cdot x^{-1}\in U$. 但我们只需知道$x'\cdot x^{-1}\cdot y'\cdot y^{-1}\in U$. 当然，如$G$是交换的，那么它就等于$x'\cdot y'\cdot y^{-1}\cdot x^{-1}$.

因此这表明，对G的任意子群U, 用上述方式不可能在陪集上定义一个连接关系.

于是，我们定义

定义1.4.8 称G的一个子群U是正规子群或者不变子群，如果对所有$g\in G$成立：$gUg^{-1}=U$. 或者，利用1.3.11.3中的记号：对所有$g\in G$, 有$i_gU=U$.

定理1.4.9 设U是G的正规子群. 则在关于$\sim_U$的陪集的集合$\bar{G}=G/U$上用连接关系$\bar{x}\cdot\bar{y}=\overline{x\cdot y}$定义了一个群结构.

证明：因为U是正规子群，由$x'\cdot x^{-1}\in U$, $y'\cdot y^{-1}\in U$有$x\cdot(y'\cdot y^{-1})\cdot x^{-1}\in U$, 于是有$x'\cdot y'\cdot(x\cdot y)^{-1}=x'\cdot y'\cdot y^{-1}\cdot x^{-1}=x'\cdot x^{-1}\cdot x\cdot y'\cdot y^{-1}\cdot x^{-1}\in U$. 因此用$\overline{x\cdot y}$来定义$\bar{x}\cdot\bar{y}$是合理的，可参见前面的注. 现在可以容易地去验证群的公理：

$$(\bar{x}\cdot\bar{y})\cdot\bar{z}=(\overline{x\cdot y})\cdot\bar{z}=\overline{(x\cdot y)\cdot z}=\overline{x\cdot(y\cdot z)}$$
$$=\bar{x}\cdot(\overline{y\cdot z})=\bar{x}\cdot(\bar{y}\cdot\bar{z}).$$

$\bar{x}\cdot\bar{e}=\overline{(x\cdot e)}=\bar{x}$和$\bar{e}\cdot\bar{x}=\overline{(e\cdot x)}=\bar{x}$, 即$\bar{e}$是中性元.
$\overline{x^{-1}}\cdot\bar{x}=\overline{x^{-1}\cdot x}=\bar{e}$, 即$\overline{x^{-1}}$是$\bar{x}$的 (左) 逆元. □

例1.4.10 考察$G=\mathbf{Z}$和$U=m\mathbf{Z}$, 见1.2.11. 因为G是交换的，所以$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$是一个群. 按照1.4.4.2, 我们能把$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$的元素写成形如$\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{m-1}$. $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$. 在$\overline{a+b}$中我们能用一个唯一确定的元素$c\in\{0,\cdots,m-1\}$来替代$a+b$, 使得$\bar{c}=\overline{a+b}$, 即$c=a+b+xm$.

引理1.4.11 $G=\mathbf{Z}$的每一个子群$U\neq\{0\}$形如$m\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{N}^{+}$.

证明: 因为$U\neq\{0\}$, 在U中存在一个最小的正元素m. 注意，如$x\in U$, 则也有$-x\in U$. 进而， $m+\cdots+m=km$(求k次和)也属于U, 于是也有$-km\in U$, 即$m\mathbf{Z}\subset U$. 所以只剩下去证明：每个$a\in U$形如$a=mq$, $q\in\mathbf{Z}$. 而这只需对$a>0$予以证明：用m去除a, 并得到余数，这提供了a的一种表示$a=mq+r$, $0\leq r<m$. 因为a和$-mq$属于U, 于是$r=a-mq$也属于U, 故由m的定义知道$r=0$. □

在1.3.6中我们已证明了，对态射$f:G\to G'$, $\ker f$是一个子群. 现在我们来证明所谓群的第一同态定理.

定理1.4.12 设$f:G\to G'$是一个态射. 于是$\ker f$是G的正规子群，且$G/\ker f$同构于$\operatorname{im} f$, 简言之：

$$G/\ker f\cong \operatorname{im} f.$$

证明: $\ker f$是正规的，因为由$f(x)=e'$, 也有

$$f(g\cdot x\cdot g^{-1})=f(g)\cdot f(x)\cdot f(g^{-1})=e'.$$

现在定义

$$\Phi:\operatorname{im} f\to G/\ker f;\quad f(x)\mapsto \bar{x}=(\ker f)\cdot x.$$

由$f(x)=f(x')$可推出Φ是一个映射. 事实上，$f(x)=f(x')$意味着$f(x'\cdot x^{-1})=f(x')\cdot f(x)^{-1}=e$, 于是$x'\cdot x^{-1}\in\ker f$, 即$\overline{x'}=\bar{x}$.

Φ是一个态射，这是因为

$$\Phi(f(x)\cdot f(x')) = \Phi(f(x\cdot x')) = \overline{x\cdot x'} = \bar{x}\cdot\bar{x}' = \Phi(f(x))\cdot\Phi(f(x')).$$

Φ是单射，这是因为如$\Phi(f(x')) = \Phi(f(x))$，即$\overline{x'} = \bar{x}$，则它蕴含$x'\cdot x^{-1}\in \ker f$，于是$e' = f(x'\cdot x^{-1}) = f(x')\cdot f(x)^{-1}$.

因为$\bar{x} = \Phi(f(x))$，所以Φ是满射. □

例1.4.13 考察态射

$$i : G \to \text{ Perm } G; \qquad g \mapsto i_g,$$

这里i_g是自同构$\{x\in G\mapsto g\cdot x\cdot g^{-1}\in G\}$，见1.3.11.3. $\ker\ i = \{g\in G; i_g = \mathrm{id}_G\}$. 即$g\in\ker\ i$意味着对所有$x\in G$，有$g\cdot x\cdot g^{-1} = x$. 称$G$的正规子群$\ker\ i$为$G$的中心. 由1.4.12，$G/\ker\ i$与$\mathrm{im}\ i$同构.

1.5 环和域

在导入了群之后，我们现在再来导入一个具有两种连接关系的集合. 其模型为具有加法和乘法的整数$\mathbf{Z}$及有理数$\mathbf{Q}$.

定义1.5.1 所谓一个环R是指一个至少具有两个元素的集合R，在其上定义着两种连接关系：

1. 加法

$$(x, y)\in R\times R\mapsto x + y\in R.$$

2. 乘法

$$(x, y)\in R\times R\mapsto xy\in R.$$

对此，还需成立下列条件：

1. 在加法方面，R构成一个交换群. 记这个群的中性元为0，且称它为零元.

2. 乘法满足结合律:

$$(xy)z = x(yz), \qquad \text{对所有} x, y, z \in R.$$

3. 在 R 中存在一个单位元，即记为 1 的元素，使得对所有 $x \in R$, 有 $1x = x1 = x$.

4. 所谓的分配律成立:

$$x(y+z) = xy + xz; \quad (x+y)z = xz + yz.$$

当集合 $R^* = R\backslash\{0\}$ 关于乘法形成一个群，并以 1 作为中性元时，则也将这个环 R 称为域.

注: 注意，我们并没有要求乘法的交换性. 然而，满足这个性质的域与所谓非交换域一样, 在我们的论述中起着极大的作用.

例1.5.2 1. 带有通常加法和乘法的 $\mathbf{Z}$ 是一个环，但不是域, 这是因为 $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ 在乘法下不是群. 除了元素 $\{+1, -1\}$ 外， $\mathbf{Z}^*$ 中没有元素具有 (乘法) 逆元.

2. 有理数 $\mathbf{Q}$ 在通常连接关系下构成一个域. $\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的子集，显然 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的最小“扩张”域.

3. 设多项式 $p(t) = \sum_i a_i t^i$ 中的 $a_i \in \mathbf{Z}$, 且对几乎所有的 i (即所有的 i, 除了有限多个例外), 有 $a_i = 0$, 这样的多项式集合构成一个环, 但不是域. 加法和乘法是用通常方式来定义的. 同样地，系数 $a_i \in \mathbf{Q}$ 的多项式集合 $\mathbf{Q}[t]$ 是一个环，但不是域. 存在着 $\mathbf{Q}[t]$ 的最小扩域, 即所谓有理函数 $\dfrac{p(t)}{q(t)}$ 的集合, 这里 $p(t)$ 和 $q(t) \in \mathbf{Q}[t]$, 且 $q(t) \neq 0$.

4. 实数集合 $\mathbf{R}$ 在通常连接关系下构成一个域.

5. 复数集合 $\mathbf{C}$ 构成了一个域. $\mathbf{C}$ 的元素具有形状 $z = x + \mathrm{i}y$, 这里 x 和 $y \in \mathbf{R}$. 连接关系定义为

$$(z = x + \mathrm{i}y, z' = x' + \mathrm{i}y') \mapsto z + z' = (x + x') + \mathrm{i}(y + y'),$$

$$(z, z') \mapsto zz' = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy + yx').$$

元素$0+\mathrm{i}0$是零元，我们也把它写为0. 元素$1+\mathrm{i}0$是单位元，我们也把它写为1. 我们也把$0+\mathrm{i}1$换写为i. 于是显然有$\mathrm{ii}=-1$. 容易验证它满足1.5.1中环的公理1. 至 4. 显然$\mathbf{C}$是交换的. 我们在$\mathbf{C}$上定义映射

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \bar{z} = x - \mathrm{i}y.$$

称$\bar{z}$为z的共轭. $\bar{\bar{z}} = z$. 如果$z = x + \mathrm{i}y$, 则$z\bar{z} = x^2 + y^2$. 特别地，当$z \neq 0$时，$z\bar{z} \neq 0$. 对每个$z \neq 0$, 有一个乘法逆元，换言之，$z^{-1} = \bar{z}(z\bar{z})^{-1}$. 于是$\mathbf{C}$是一个域.

命题1.5.3 对每个环R, 下述计算规则成立：

1. 对所有$x \in R$, 有$0x = x0 = 0$.
2. $(-y)x = -(yx) = y(-x)$.
3. $1y = 1$蕴含$y = 1$.
4. $1 \neq 0$.
5. 当R是域时，则由$xy = 0$可得出$x = 0$或$y = 0$.
6. 设R为域，于是$xx = 1$等价于$x = 1$或$x = -1$.

证明: 对1.: $0x + xx = (0 + x)x = xx$和$x0 + xx = x(0 + x) = xx$.

对2.: 利用1., 由$y + (-y) = 0$可得出

$$0 = (y + (-y))x = yx + (-y)x,$$

$$0 = y(x + (-x)) = yx + y(-x).$$

对3.: $y = 1y = 1$.

对4.: 除了$0 \in R$, 还存在R中的一个元$x \neq 0$. 于是$1x = x$, 但$0x = 0 \neq x$.

对5.: 由$x \in R^*$, $y \in R^*$得出$xy \in R^*$.

对 6.: 显然 $1\cdot 1=1$. 由 2. 可得 $(-1)(-1)=-(1(-1))=-(-1)=1$. 反过来, 由 $x^2-1=0$ 可得出 $(x+1)(x-1)=0$. 再应用 5. □

例1.5.4 如果我们用 $\overline{xy}$ 来定义乘法 $\bar{x}\cdot\bar{y}$, 则加法陪集群 $\mathbf{Z}_m=\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 是一个环, 见 1.4.10. 首先我们来证明 $\bar{x}=\overline{x'}$, $\bar{y}=\overline{y'}$ 蕴含 $\overline{xy}=\overline{x'y'}$. 事实上, 我们有 $x=x'+am$, $y=y'+bm$, 于是 $xy=x'y'+m(ay'+bx'+abm)$.

剩下要去验证 1.5.1 中环的公理 1. 至 4. 但这可立即得自事实: $\mathbf{Z}$ 是一个环.

接下来, 我们来叙述整数环的一个基本的结果.

定理1.5.5 设 p 和 q 是正整数. 考察 $\mathbf{Z}$ 中由 $p\mathbf{Z}$ 和 $q\mathbf{Z}$ 所生成的子群, 其所有元素形如 $px+qy$, 这里 $x,y\in\mathbf{Z}$. 于是这是形如 $r\mathbf{Z}$ 的群, 这里 $r>0$ 是 p 和 q 的最大公因子, 简记为 $r=\mathrm{GGT}(p,q)$. 特别地, 如果 p 和 q 没有公共的不等于 1 的素因子 (于是称 p 和 q 互素), 则存在 $\mathbf{Z}$ 中的 a 和 b, 使得 $pa+qb=1$.

证明: 由 1.4.11, $\mathbf{Z}$ 的每个 $\neq\{0\}$ 的子群形如 $r\mathbf{Z}, r>0$. 于是我们能写

$$p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}=r\mathbf{Z}.$$

由此, 特别地有 $p=ra$, $q=rb$, 于是 r 是 p 和 q 的公因子. 反之, 根据上述公式, p 和 q 的每个公因子也是 r 的因子, 于是 $r=\mathrm{GGT}(p,q)$. □

定理1.5.6 设 $m\geq 2$ 是一个整数. 于是环 $\mathbf{Z}_m=\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 成为一个域的充要条件是 m 为素数.

证明: m 是素数意味着 m 不能表成两个 >1 的整数的乘积 m_1m_2.

当 m 为素数时, 对 $\mathbf{Z}_m$ 中的 $\bar{x}\neq\bar{0}$, 存在 $\bar{y}$, 使得 $\bar{x}\bar{y}=\bar{1}$. 这是因为由 1.5.5, $r=\mathrm{GGT}(x,m)=1$ 蕴含了存在整数 a 和 y, 使得 $ma+xy=1$.

当m不是素数时，则$m = m_1 m_2$，这里$m_1 > 1$，$m_2 > 1$. 于是

$$\bar{0} = \overline{m} = \overline{m}_1 \overline{m}_2,$$

且$\overline{m}_1 \neq \bar{0}$及$\overline{m}_2 \neq \bar{0}$. 由1.5.3.5, $\mathbf{Z}_m$不是域. □

习题

1. 下列映射中哪些是单射，哪些是满射？

(a) $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}; \quad x \mapsto x^2$,

(b) $g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}; \quad x \mapsto 2x - 5$,

(c) $h: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}; \quad x \mapsto x + 2$.

2. 利用完全归纳法证明：对所有自然数$n \geq 1$，有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. 设A和B是集合. 证明：

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

4. 利用完全归纳法证明：对所有自然数$n \geq 1$，有

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

5. 设G是一个群，e是它的中性元. 对所有$a \in G$，有$a \cdot a = e$. 证明：G是交换的. (提示：利用逆元的唯一性及$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.)

6. 设M是一个集合，$N \subset M$，且满足$N \neq \emptyset$. 记S_M和S_N分别为M和N的置换群. 我们让每个$f \in S_N$对应于$\bar{f}: M \to M$，其中

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 当 x \in N \\ x, & 当 x \notin N. \end{cases}$$

也称 $\bar{f}$ 为 f 的扩张.

(a) 证明： $\bar{f} \in S_M$.

(b) 证明： $\bar{\ } : S_N \to S_M;\ f \mapsto \bar{f}$ 是一个态射.

(c) $\bar{\ }$ 是否为单射？

(d) 证明： $\bar{\ }$ 是满射的充要条件为 $N = M$.

7. 考察加法群 $G = \mathbf{Z}$.

(a) 确定 $\mathbf{Z}$ 的所有子群 U. (提示：如果 $U \neq \{0\}$, 则在 U 中存在一个最小的元素 $m > 0$, 证明： $U = m\mathbf{Z}$.)

(b) 确定所有可能的态射 $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$.

8. 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上定义加法和乘法如下：

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

证明：由此而得的 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 是一个域.

9. 设 R 是一个环. 系数在 R 中的多项式 $p(t)$ 是一个形如 $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ 的表达式，这里 $n \geq 0$, $a_i \in R$. 如果 $a_n \neq 0$, 则称 n 为 p 的阶. 如果所有 $a_i = 0$, 则令 p 的阶为 $-\infty$.

(a) 证明：系数在 R 中的多项式集合 $R[t]$ 形成了一个具有通常连接关系的环.

(b) 设 R 是一个域. 用 $R(t)$ 记有理函数 $\dfrac{p(t)}{q(t)}$ 的集合，这里 $p, q \in R[t]$, 且 $q \neq 0$. 证明： $R(t)$ 是一个具有通常连接关系的域. (提示：所谓“通常连接关系”是指在计算中将 $R(t)$ 的元素视如实数一般.)

10. 在习题 8 中我们已在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上定义了一个域的结构. 利用 $(x, y) \leftrightarrow x + \mathrm{i}y$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 恒同于复数域 $\mathbf{C}$. 考察映射 $x \in \mathbf{R} \mapsto \cos x + \mathrm{i} \sin x \in \mathbf{C}$. 证明：这是 $\mathbf{R}$ 的加法群到 $\mathbf{C}$ 的乘法群 $\mathbf{C}^*$ 中的一个态射，并确定其核.

第2章

向量空间

2.1 模和向量空间

在第一章中我们已经导入了群、环和域等概念, 现在我们来导入一个对整个解析几何学有着根本意义的概念.

定义2.1.1 给定一个环R. 所谓一个R-模V(或称R上的模V)是指: V是一个带有连接关系'+'的交换群, 此外再定义了一个映射$(\alpha,x)\in R\times V\mapsto \alpha x\in V$, 我们也将它称为数量$\alpha\in R$与向量$x\in V$的乘法, 它们应该满足下列规则: 对$R$中任意的$\alpha,\alpha'$, V中任意的x,x', 有

1. $(\alpha+\alpha')x=\alpha x+\alpha' x$,
2. $\alpha(x+x')=\alpha x+\alpha x'$,
3. $\alpha(\alpha' x)=(\alpha\alpha')x$,
4. $1x=x$.

注: 对一个模而言, 我们称规则1和2为分配律, 3为结合律.

当R是域时, 也称V为R-向量空间或R上的向量空间.

例2.1.2 1. $V=R$是一个R-模.

2. 设$V=R^n=R\times\cdots\times R$(有$n$个因子), 于是$V$是一个$R$-模. R^n中的两个元素$x=(x_1,\cdots,x_n)$和$y=(y_1,\cdots,y_n)$的加法定义为

$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$

定义αx为$(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n)$.

3. 设M是一个任意的集合, R^M是所有映射$f:M\to R$的集合. 当我们定义$(f+g)(p)$为$f(p)+g(p)$, $(\alpha f)(p)$为$\alpha f(p)$后, R^M就成为一个R-模. 注意, 例2也属此列, 这时$M=\{1,\cdots,n\}$.

命题2.1.3 对一个R-模V, 成立着下列的规则:

1. 对V中所有的x, 有$0x = 0$(式中左边的0是R中的0, 右边的0是V中的零元).

2. 对所有$x \in V$, 有$(-1)x = -x$.

3. 对所有$\alpha \in R$, 有$\alpha 0 = 0$.

证明: 对1.: $x = 1x = (1+0)x = 1x + 0x = x + 0x$.

对2.: 运用1., 我们有 $0 = 0x = (1+(-1))x = 1x+(-1)x = x + (-1)x$.

对3.: 运用1. 和2., 我们有

$$\begin{aligned}\alpha \cdot 0 &= \alpha(x + (-x)) = \alpha x + \alpha(-x) = \alpha x + \alpha(-1)x \\ &= \alpha x + (-\alpha)x = (\alpha + (-\alpha))x = 0x = 0.\end{aligned}$$

□

类似于1.2.9, 我们有

定义2.1.4 R-模V的子集U称为子模, 如果U与其上所诱导的结构一起构成了一个模.

与1.2.10相对照的是

定理2.1.5 (**子模判据**) 设U是R-模V的一个非空子集. U是子模的充要条件是满足下述条件之一:

1. $(x,y) \in U \times U$和$\alpha \in R \Rightarrow x + y \in U$和$\alpha x \in U$.

2. $(x,y) \in U \times U$和$(\alpha,\beta) \in R \times R \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$.

证明: 当U是子模时, 1. 和2. 是成立的.

现设$U \neq \emptyset$是V的一个子集, 且1. 成立. 由2.1.3.2., 对属于U的x, $(-1)x = -x$亦属于U, 于是按照1.2.10, U是V的加法子群. 对$(\alpha, x) \in R \times U$, 有 $\alpha x \in U$. 因此 2.1.1 中的公理 1 到 4 对U也是成立的, 这是因为这些公理对整个V都是成立的. 我们再来证明1. 和2. 是等价的: 1. $\Rightarrow$ 2.是显然的; 分别利用$\alpha = \beta = 1$及$\beta = 0$, 从2. 就得出了1. □

例2.1.6 1. 对固定的 $m \in \mathbf{N}$, $m\mathbf{Z}$(见 1.2.11) 是 $\mathbf{Z}$-模 $\mathbf{Z}$ 的一个子模.

2. 设 N 是集合 M 的一个子集. 于是 $\{f \in R^M; f|_N = 0\}$ 是 R^M 的一个子模, 见 2.1.2.3.

定义2.1.7 设 M 是一个集合. 所谓 M 的一个具有指标集 I 的元素族是指一个映射: $\Phi : I \to M$. 我们亦用 x_ι 来记 $\iota \in I$ 的象 $\Phi(\iota)$, 于是可把此族写成形如 $(x_\iota)_{\iota \in I}$.

注: M 中元素 x_i 的一个 n-组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 就可看成是 M 中具有指标集 $I = \{1, \cdots, n\}$ 的一个族. 由 M 中元素所构成的序列 $(x_0, x_1, \cdots)$ 是一个具有指标集 $\mathbf{N}$ 的族.

命题2.1.8 设 V 是一个 R-模, $(U_\iota)_{\iota \in I}$ 是 V 的一个子模族. 于是交集 $\bigcap_{\iota \in I} U_\iota$ 也是一个子模.

证明: 因为对每一个 $\iota \in I$, U_ι 满足子模判据 2.1.5.1., 于是该子模判据对交集也成立. □

定义2.1.9 设 $(U_\iota)_{\iota \in I}$ 是 V 的子模的一个族. 族的和集 $\sum_\iota U_\iota$ 由形如 $\sum_\iota u_\iota, u_\iota \in U_\iota$ 的元素所组成, 其中对几乎所有的 ι, 有 $u_\iota = 0$. 此外, 如果从 $\sum_\iota u_\iota = 0$ 可得出对所有 $\iota \in I$, 有 $u_\iota = 0$, 则称 $\sum_\iota U_\iota$ 为直和, 今后亦将它记为 $\bigoplus_\iota U_\iota$. 对 $I = \emptyset$, 令 $\sum_\iota U_\iota = \{0\}$.

注: 于是在 $\sum_\iota u_\iota$ 中仅存在有限多个 (也包括完全没有) 元素 $u_\iota \neq 0$. $\sum_\iota u_\iota$ 定义为这些元素的和 (或为 0).

命题2.1.10 V 的子模族 $(U_\iota)_{\iota \in I}$ 的(直) 和是一个子模.

证明: 我们对 $U = \sum_\iota U_\iota$ 验证 2.1.5.1. 的有效性. 因为 $x = \sum_\iota u_\iota \in U$, $y = \sum_\iota v_\iota \in U$, 于是对几乎所有的 $\iota \in I$, $u_\iota + v_\iota = 0$ 及 $\alpha u_\iota = 0$. 于是 $x + y = \sum_\iota (u_\iota + v_\iota) \in U$ 和 $\alpha x = \sum_\iota \alpha u_\iota \in U$. □

例2.1.11 设 $V = \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ 为由有理数序列 $\{x_n, n \in \mathbf{N}\}$ 所构成的 $\mathbf{Q}$-模 (或向量空间). 对每个 $k \in \mathbf{N}$, 记 U_k 为序列 $\{x_n\}$ 的子模, 这里 $x_n = 0$ 对 $n \neq k$. U_k 属于在 2.1.6.2 中所讨论的例

子. 族$(U_k)_{k\in \mathbf{N}}$的直和是由序列$\{x_n\}$所构成，这里，对几乎所有的n, 有$x_n=0$.

2.2 线性映射

如我们在1.3的开始部分所注意到的那样，对一个给定的结构来说，态射或保持结构的映射是特别有兴趣的. 在模的情形下，态射有一个特别的名称.

定义2.2.1 设V和W是R-模. 映射$f: V\to W$称为是线性的，如果对V中所有的x,x'及R中的α, 有

1. $f(x+x')=f(x)+f(x')$,
2. $f(\alpha x)=\alpha f(x)$.

例2.2.2 1. 0-映射$0: x\in V\mapsto 0\in W$是线性的. 同样，恒同映射$\mathrm{id}_V: V\to V$也是线性的.

2. 设$V=R^n$, 见2.1.2.2. 选取k, $1\le k\le n$, 映射

$$pr_k: x=(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)\in R^n\mapsto x_k\in R$$

是线性的. 称pr_k为向量x到其第k个分量上的投影.

3. 设$V=R[t]$是由系数在环R中的多项式$\sum_{i\ge 0}a_it^i$所构成的环，见1.5.2.3. 映射$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}: R[t]\to R[t]$把多项式$\sum_{i\ge 0}a_it^i$对应到多项式$\sum_{i\ge 1}ia_it^{i-1}$, 容易证明它是线性的.

4. 设$a\in R$. 计值映射

$$\mathrm{ev}_a: \sum_i a_it^i\in R[t]\mapsto \sum_i a_ia^i\in R$$

是线性的.

与1.3.6相对照的是

定理2.2.3 设$f: V\to W$是线性的. 于是$\ker f=\{x\in V; f(x)=0\}$是$V$的一个子模，且$\mathrm{im}\ f=\{y\in W;$存在$x\in V$使得$f(x)=y\}$是$W$的子模.

证明: 在 1.3.6 中我们已经指出, $\ker f$ 和 $\mathrm{im}\ f$ 分别是加法群 V 和 W 的子群.

设 $\alpha \in R$. 由 $f(x) = 0$ 可得出 $f(\alpha x) = \alpha f(x) = 0$, 由 $y = f(x)$ 可得出 $\alpha y = \alpha f(x) = f(\alpha x)$. 于是从 2.1.5.1 就可得出结论. □

与 1.3.4 相对照的是

引理 2.2.4 设 $f: V \to W$ 是线性的, U 是 W 的子模. 于是 $f^{-1}(U)$ 是 V 的子模.

证明: 由 1.3.4, $f^{-1}(U)$ 是 V 的加法子群, 又因为对 $\alpha \in R$ 和 $f(x) \in U$, 有 $\alpha f(x) = f(\alpha x) \in U$, 所以 2.1.5.1. 成立. □

例 2.2.5 我们来讨论 2.2.2 中的例子.

1. $\ker 0 = V$ 和 $\mathrm{im}\ 0 = 0$, $\ker\ \mathrm{id}_V = 0$, $\mathrm{im}\ \mathrm{id}_V = V$.

2. $\ker pr_k = \{x \in R^n, x_k = 0\}$ 和 $\mathrm{im}\ pr_k = R$.

3. 为简单起见, 我们选取域 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 作为环 R.

$$\ker\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = \text{常数多项式的集合} = \{\sum_i a_i t^i; a_i = 0 \text{ 对 } i > 0\}.$$

$$\mathrm{im}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = R[t].$$

4. 在与 3. 相同的限制下, $\ker\ \mathrm{ev}_a =$ 所有以 a 为零点的多项式 $\sum_i a_i x^i$ 的集合, 即有 $\sum_i a_i a^i = 0$. 特别地: $\ker\ \mathrm{ev}_0 = tR[t]$, $\mathrm{im}\ \ \mathrm{ev}_a = R$.

与 1.3.7 相对照的是

定理 2.2.6 如果 $f: U \to V$ 和 $g: V \to W$ 是线性的, 则 $g \circ f: U \to W$ 也是线性的.

证明: 按照 1.3.7, $g \circ f$ 是加法态射. 且

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) \\ &= \alpha g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x). \end{aligned}$$

□

我们现在来讨论与 1.3.9 和 1.3.10 相对照的定义和命题.

定义 2.2.7 称线性双射 $f: V \to W$ 为线性同构. 当 $V = W$ 时, 又称 f 为线性自同构.

命题 2.2.8 如果 $f: V \to W$ 是线性同构, 则 $f^{-1}: W \to V$ 也是线性同构.

证明: 按照 1.3.9, f^{-1} 是加法态射. 且由 $f^{-1}(y) = x$, 通过在 $\alpha y = \alpha f(x) = f(\alpha x)$ 的两边运用 f^{-1} 后, 就可得出 $f^{-1}(\alpha y) = \alpha f^{-1}(y)$. □

例 2.2.9 R-模 V 的线性自同构的集合构成了 V 的置换群 Perm V 的一个子群. 如 1.3.11.1 那样, 人们可对线性自同构的集合验证子群判据 1.2.10 的有效性. 因为有 2.2.6 和 2.2.8, 这些判据是成立的.

我们将用 $GL(V)$ 来记这个子群, 亦称其为 V 的一般线性变换群. 记号 "GL" 源于英语中的 "一般线性".

与 1.4.9 相对照, 现在我们要讨论 V 的一个子模 U. 关于加法, U 是 V 的正规子群, 我们能导入 V 关于 U 的陪集的群 $\overline{V} = V/U$, 见 1.4.3. 现在我们来证明, $\overline{V}$ 在典范的意义下是一个 R-模.

定理 2.2.10 设 V 是一个 R-模, U 是一个子模. 于是 $\overline{V} = V/U$ 是一个 R-模, 这里除了陪集的加法之外, 我们用 $\alpha\overline{x} = \overline{\alpha x}$ 来定义数量 $\alpha \in R$ 的乘法.

证明: 如 $\overline{x} = \overline{x'}$, 即 $x - x' \in U$, 于是亦有 $\alpha(x - x') = \alpha x - \alpha x' \in U$, 于是 $\overline{\alpha x} = \overline{\alpha x'}$.

剩下只要去验证 2.1.1 中的公理 1 到 4 的有效性. 而这可容易地从这些公理对 V 的有效性得出. □

最后, 我们来讨论与第一同态定理 1.4.12 相对照的定理:

定理2.2.11 设 $f: V \to W$ 是线性的. 则 $V/\ker f$ 典范地同构于 $\mathrm{im}\ f$.

证明: 如在1.4.12的证明中那样, 用 $f(x) \mapsto \overline{x}$ 来定义 $\Phi: \mathrm{im}\ f \to v/\ker f$. 按照1.4.12, Φ 是一个加法群的同构. 进而有 $\Phi(\alpha f(x)) = \Phi(f(\alpha x)) = \overline{\alpha x} = \alpha\overline{x} = \alpha\Phi(f(x))$. □

例2.2.12 我们来讨论2.2.5 中的例2至例4:

例2: $R^n/\ker pr_k$ 同构于 R, 简记为 $R^n/\ker pr_k \cong R$.

例3: $R[t]/\ker \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cong \mathrm{im}\ (\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) \cong R[t]$.

例4: $R[t]/\ker \ \mathrm{ev}_0 \cong R$.

2.3 生成系和自由系

现在我们要对具有一个或多个连接关系的集合 M 的子集 E 讨论一个重要的运算 —— 线性生成.

我们只限于对模进行讨论, 但此结构对群来说也是有意义的.

定义2.3.1 设 V 是一个 R-模, E 是 V 的一个子集. E 的线性包定义为形如 $\sum_{e\in E}\alpha_e e$ 的元素的集合, 这里, 对几乎所有的 $e \in E$, 有 $\alpha_e = 0$. 记 E 的线性包为 $[E]$.

注: 人们也能用下面的方法去定义 $[E]$: 对每一个 $e \in E$, 讨论由 e 所生成的子模 $Re = \{\alpha e; \alpha \in R\}$. 于是 $\{Re; e \in E\}$ 是 V 的一个具有指标集 E 的子模族, 见2.1.9. $[E]$ 是这个子模族的和集.

例2.3.2 1. 设 $V = R[t]$ 是系数在 R 中的多项式的 R-模. 设 $E = \{1, t, t^2, \cdots\}$. 于是 $[E] = V$.

2. 在 R^3 中讨论元素 $e_1 = (1,0,0)$ 和 $e_2 = (0,1,0)$. 于是其线性生成是由形如 $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ 的元素所构成.

3. 对 $E = \emptyset$, $[E] = \{0\}$, 见 2.1.9.

命题2.3.3 V的子集E的线性包$[E]$是一个子模.

证明: 这得自2.1.10, 因为我们可将$[E]$理解成$\sum_e Re$. □

定义2.3.4 如果$[E]=V$, 则称$E\subset V$为生成系.

例2.3.5 1. 2.3.2.1 中的集合E是$R[t]$的生成系.

2. 设$V=R^n$. 于是集合$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是一个生成系, 其中$e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$, 1是在第$i$个位置上.

命题2.3.6 如果$E\subset E'\subset V$, 则$[E]\subset[E']$.

证明: 由定义 2.3.1, 这是显然的. □

命题2.3.7 设$f:V\to W$是线性的, $E\subset V$. 则有: $f([E])=[f(E)]$.

证明: $x\in[E] \iff x=\sum_e \alpha_e e$. 于是

$$y\in f([E]) \iff y=\sum_e \alpha_e f(e) \iff y\in[f(E)].$$

□

命题2.3.8 当E是一个生成系时, 则线性映射$f:V\to W$是由$f|_E$(即f在V的子集E上的限制)唯一确定的.

证明: 设$f,g:V\to W$是这样的线性映射, 使得对所有$e\in E$, 有$f(e)=g(e)$. 因为一个任意的$x\in V$可写成$x=\sum_e \alpha_e e$, 所以得到

$$f(x)=\sum_e \alpha_e f(e)=\sum_e \alpha_e g(e)=g(x).$$

□

注: 显然$E=V$是一个生成系. 但在2.3.5中我们已看到, 也存在着V的一个真子集E, 使得它生成了V. 现在我们开始研究这样的问题: 是否存在一个最小的生成系, 即不包含多余元素的生成系? 为此我们要导入一个新的概念. 从现在开始, 我们考察向量空间, 于是R是一个域K.

定义2.3.9 设V是一个K-向量空间. 称子集$F \subset V$为自由的或者线性无关的, 如果从$\sum_{f \in F} \alpha_f f = 0$可推出: 对所有$f \in F$, 有$\alpha_f = 0$. 我们也把一个非自由的集合的元素称为是线性相关的.

注: 该定义蕴含$\emptyset \subset V$是自由的.

例2.3.10 1. 由一个元素x所成的集合$F = \{x\}$是自由的充要条件是$x \neq 0$. 这是因为 对$\alpha \neq 0$, $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha^{-1}\alpha x = x = 0$.

2. K^n中的集合$\{e_1, \cdots, e_n\}$是自由的. 这是因为$\sum_i \alpha_i e_i = 0$等价于$(\alpha_i, \cdots, \alpha_n) = (0, \cdots, 0)$.

3. 2.3.2.1.中的$K[t]$中的集合$\{1, t, t^2, \cdots\}$是自由的. 这是因为$\sum_i \alpha_i t^i = 0$ (这里的 0代表$K[t]$中的零元) 意味着$\alpha_0 = \cdots = \alpha_i = \cdots = 0$.

下列定理回答了上面所提出的关于最小生成系的问题.

定理2.3.11 设$C \subset V$, 且$C \neq \emptyset$. C是自由的充要条件是在C的线性包$[C]$中每一个x可以唯一的方式表示成和式$x = \sum_{c \in C} \alpha_c c$.

证明: 设C是自由的. 设$x = \sum_c \alpha_c c$和$x = \sum_c \beta_c c$是$x \in [C]$的两个表示. 于是有$0 = \sum_c (\alpha_c - \beta_c)c$, 因而$\alpha_c - \beta_c = 0$.

设C不是自由的, 即存在0的一个表示$0 = \sum_c \alpha_c C$, 使得至少有一个$\alpha_c \neq 0$. 但另一方面, 也有$0 = \sum_c 0c$. □

例2.3.12 1. 当C不是自由时, 每一个满足$C \subset D$的D也是非自由的. 如C是自由的, 则每个满足$B \subset C$的B也是自由的.

2. 在K^2中的三个或更多个元素是线性相关的. 由 1., 只需讨论具有三个元素$\{u, v, w\}$的集合. 我们在K^2中要去找$(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, 使得

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0. \tag{2.1}$$

当 u,v,w 之一等于零时，譬如说 $u=0$，于是我们就可以选取 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,0,0)$.

设 $u=(u_1,u_2)$，$v=(v_1,v_2)$，$w=(w_1,w_2)$. 容易看出，

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(v_1w_2-w_1v_2,w_1u_2-u_1w_2,u_1v_2-v_1u_2)$$

是(2.1)的一个解. 在 $u=(u_1,u_2)\neq(0,0)$ 的情况下，如 $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$，则我们能写为 $v_1=au_1$，$v_2=au_2$. 于是 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,-a,0)$ 是 (2.1) 的一个解. 对 $v\neq 0$ 或 $w\neq 0$ 可类似地进行讨论.

我们再给出自由系的另外一个特征.

引理2.3.13 设 $F\subset V$. F 是自由的充要条件是下面的论述成立：由 $E\subset F$, $E\neq F$ 可推出 $[E]\neq[F]$.

证明: 设 F 是自由的. 当 $x\in F\backslash E$, 于是 $x\notin[E]$, 这是因为不存在关系式 $x-\sum_{e\in E}\alpha_e e=0$.

反之，设 F 非自由. 于是存在一个关系式 $\sum_{f\in F}\alpha_f f=0$，这里至少有一个 $f\in F$，使得 $\alpha_f\neq 0$，譬如说是 $f=f_0$. 于是 $f_0=\sum_{f\neq f_0}-\alpha_{f_0}^{-1}\alpha_f f$, 即 $[(F-\{f_0\})]=[F]$. □

命题2.3.14 设 $f:V\to W$ 是一个线性单射. 如果 $F\subset V$ 是自由的，于是 $f(F)\subset W$ 也是自由的.

证明: 因为 f 是单射，所以

$$0=\sum_{x\in F}\alpha_x f(x)=\sum_{x\in F}f(\alpha_x x)=f(\sum_{x\in F}\alpha_x x)$$

蕴含 $\sum_{x\in F}\alpha_x x=0$, 于是 $\alpha_x=0$ 对所有 $x\in F$ 成立. □

2.4 基系

现在我们来讨论一种最优的、节约的生成系的概念，可参见2.3.8后的注.

定义2.4.1 向量空间 V 的一个子集 B 称为基系（或简单地称为基），如果 B 是自由的，且生成了 V.

例2.4.2 1. 2.3.5.2中的集合 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 $V=K^n$ 的一组基. 称 E 为 K^n 的典范基.

2. 2.3.5.1中的集合 $E=\{1,t,t^2,\cdots\}$ 是 $K[t]$ 的一组基，亦见2.3.10.3. 称 E 为 $K[t]$ 的典范基.

3. $\emptyset$ 是仅由零元素所组成的向量空间 V 的基，可参见2.3.2.3和2.3.9后的注.

引理2.4.3 设 $f:V\to W$ 是线性的单射， B 是 V 的一组基. 于是 $f(B)$ 是 $\mathrm{im}\ f$ 的一组基.

证明: 按照2.3.7, $f(B)$ 是 $\mathrm{im}\ f=f(V)$ 的一个生成系，且按2.3.14, $f(B)$ 是自由的. □

设 B 是 V 的一组基. 按2.3.8, 因为 B 是生成系，所以线性映射 $f:V\to W$ 由 $f|_B$ 唯一地确定. 这个结论可扩充成

定理2.4.4 设 V,W 是向量空间， B 是 V 的一组基. 对每个映射 $\bar{f}:B\to W$, 正好存在一个线性映射 $f:V\to W$, 使得 $f|_B=\bar{f}$.

注: 称 f 为映射 $\bar{f}$ 在 V 上的扩张.

证明: 由 2.3.11, 对 $x\in V$, 正好存在一个表示 $x=\sum_{b\in B}\alpha_b b$. 用 $\sum_{b\in B}\alpha_b\bar{f}(b)$ 去定义 $f(x)$. 如此定义的映射 $f:V\to W$ 是线性的. 这是因为如果 $x=\sum_{b\in B}\alpha_b b$, $y=\sum_{b\in B}\beta_b b$, 于是

$$
\begin{aligned}
f(x+y)&=\sum_{b\in B}(\alpha_b+\beta_b)\bar{f}(b)\\
&=\sum_{b\in B}\alpha_b\bar{f}(b)+\sum_{b\in B}\beta_b\bar{f}(b)=f(x)+f(y)
\end{aligned}
$$

且对 $\alpha \in K$, 有 $\alpha x = \sum_{b\in B} \alpha\alpha_b b$, 于是

$$f(\alpha x) = \sum_{b\in B} \alpha\alpha_b \bar{f}(b) = \alpha f(x).$$

□

下列定理提供了基的不同的特征, 可参见本节的开头语.

定理2.4.5 设 B 是向量空间 V 的子集. 于是下列结论是等价的:

1. B 是基.

2. B 是最小的生成系, 即每个子集 $A \subset B$, $A \neq B$, 不再是生成系.

3. B 是 V 的最大的自由子集, 即如 $B \subset C$, $B \neq C$, 则 C 不是自由的.

证明: 1. $\Longleftrightarrow$ 2.: 这等价于2.3.13.

1. $\Rightarrow$ 3.: 如果 $B \subset C$ 和 $B \neq C$, 则考虑 $x \in C \setminus B$. 因为 $x \in V = [B]$, C 不是自由的.

3. $\Rightarrow$ 1.: 得自下面的一个一般性的引理. □

引理2.4.6 设 $F \subset V$ 是自由的, $[F] \neq V$. 于是对每一个 $x \in V\setminus[F]$, $G = F \cup \{x\}$ 是自由的.

证明: 讨论方程式

$$\sum_{f\in F} \alpha_f f + \alpha x = 0.$$

因为 $x \notin [F]$, 所以 $\alpha = 0$, 又因为 F 是自由的, 于是所有 $\alpha_f = 0$.

□

作为基的存在定理的预备知识, 我们证明:

引理2.4.7 设 F 是自由的, E 生成 V, $F \subset E$. 于是存在一个基 B, 使得 $F \subset B \subset E$.

证明: 由2.4.5, 只需证明: 满足$F \subset G \subset E$的自由的$G \subset V$的族$\mathcal{F} = \mathcal{F}(F, E)$具有最大元素.

$\mathcal{F}$包含了元素F. 如果$[F] \neq V$, 则因为2.4.6, 在$\mathcal{F}$中存在一个$F' = F \cup \{x\} \neq F$. 如果$[F'] \neq V$, 我们在$\mathcal{F}$中构造$F'' = F' \cup \{x'\} \neq F'$. 如果$E$是有限的，人们在有限多步后达到最大自由系. 如果$E$不是有限的，可能会发生链$F \subset F' \subset F'' \subset \cdots$决不中止的情形. 此时所谓的Zorn引理就提供了$\mathcal{F}$中最大自由元的存在性. □

推论2.4.8 每个自由的子集F能补充成一组基B.

证明: 在2.4.7中选$E = V$. □

推论2.4.9 每个生成系E能缩减成一组基B.

证明: 在2.4.7中选$F = \emptyset$. □

定理2.4.10 每个向量空间有一组基.

证明: 在2.4.7中选$F = \emptyset$, $E = V$. □

我们以所谓的小置换定理作为本节的结束. 在给定的基下，能用其某些元素来置换一个给定的自由集的元素.

定理2.4.11 设B是V的一组基，F是V的一个自由子集. 于是能用一个子集$B' \subset B$把F补充成一组基$B^* = F \cup B'$.

证明: 在2.4.7中选$F = F$, $E = F \cup B$. □

2.5 有限维向量空间

现在我们来讨论有限生成的向量空间，即具有有限生成系的向量空间. 于是由2.4.7, V具有一个有限的基.

我们从所谓的置换引理开始进行讨论.

引理2.5.1 设$F \subset V$是自由的，$x \in [F]$, 于是$x = \sum_f \alpha_f f$. 如果$x \neq 0$, 则存在一个$f \in F$, 譬如说f_0, 使得$\alpha_{f_0} \neq 0$. 令$F \backslash \{f_0\} = F_0$, $F_0 \cup \{x\} = F'$. 于是F'是自由的，且$[F'] = [F]$.

证明: 由 $x=\alpha_{f_0}f_0+\sum_{f\in F_0}\alpha_f f$ 可得出

$$f_0=\alpha_{f_0}^{-1}x-\sum_{f\in F_0}\alpha_{f_0}^{-1}\alpha_f f.$$

于是 $f_0\in[F']$. 又因为 $[F_0]\subset[F']$, 所以 $[F']=[F]$. 由 2.3.11, $x\in V\backslash[F_0]$. 由 2.4.6 得出 $F'=F_0\cup x_0$ 是自由的. □

例 2.5.2 在 $V=K^3$ 中讨论 $F=\{e_1,e_2\}$, 其中 e_i 如在 2.3.5.2 中所设. 设 $x=x_1e_1+x_2e_2\neq 0$. 如果譬如说 $x_1\neq 0$, 于是 $F'=\{x,e_2\}$ 是自由的, 且 $[F']=[F]$. □

对于有限生成的向量空间来说, 下述的 Steinitz 置换定理是基本的. 它是 2.4.11 的强化. 用 $\#A$ 来记 A 中元素的数目. 当 A 不是有限时, 令 $\#A=\infty$.

定理 2.5.3 设 $F\subset V$ 是自由的, B 是 V 的一个有限的基. 于是能用子集 $B'\subset B$ 将 F 补充成一组基 $B^*=F\cup B'$, 使得 $\#B^*=\#B$.

注: 特别地, 一个自由子集 $F\subset V$ 总是有限的.

证明: 我们对 $k=\#F$ 运用归纳法. 对 $k=0$, 即 $F=\emptyset$, 结论是正确的, 因为 $B'=B$, $B^*=\emptyset\cup B'=B$.

假设结论对 $k-1\geq 0$ 个元素的自由集已经证明了. 现在要讨论 $\#F=k$ 的情形. 设 $x\in F$. 令 $F\backslash\{x\}=F_0$. 因为 $\#F_0=k-1$, 存在 $B_0'\subset B$ 使得 $F_0\cup B_0'=B_0^*$ 是 V 的基, 且 $\#B_0^*=\#B$. 记 $x=\sum_{f\in F_0}\alpha_f f+\sum_{b\in B_0'}\alpha_b b$. 因为 $x\notin[F_0]$ 及 B_0' 是自由的, 所以存在一个 $b_0\in B_0'$ 使得 $\alpha_{b_0}\neq 0$. 由 2.5.1, 用 x 来替换 b_0 后提供了一个自由集 $F_0\cup(B_0'\backslash\{b_0\})\cup\{x\}$, 它生成了 V, 于是成为一组基 B^*. 现在注意, $F_0\cup\{x\}=F$ 是自由的, 令 $B_0'\backslash\{b_0\}=B'$. 显然 $\#F\cup B'=\#F_0\cup B_0'=\#B$. □

作为直接的推论, 我们有

定理 2.5.4 当 V 是有限生成时, V 的每组基是有限的, 且基中元素的个数总是相同的.

定义2.5.5 称有限生成的向量空间V中一组基的元素的个数为V的维数，记为 $\dim V$.

2.5.4的证明：由2.4.9, 有限生成系E包含一个有限的基B. 设B^*是任意一个基. 由2.5.3, 令$F = B^*$就得出了$\#B^* = \#B$. □

例2.5.6 1. 当$V = \{0\}$时，$\dim V = 0$, 因为$\#\emptyset = 0$.

2. 当$V = K$时，$\dim V = 1$, 因为$B = \{1\}$是一个基.

3. 当$V = K^n$时，$\dim V = n$, 因为$\{e_1, \cdots, e_n\}$是一组基，见2.3.5.2.

命题2.5.7 设 $\dim V = n$.

1. 设$E \subset V$是生成系，则$\#E \geq n$.

2. 设$F \subset V$是自由的，则$\#F \leq n$.

证明：对 1, 由2.4.9, 存在一组基$B \subset E$.

对 2, 由2.4.8, 存在一组基$B \supset F$. □

现在我们能将有限维向量空间予以分类.

定理2.5.8 设V是一个K-向量空间. 若 $\dim V = n$, 则V同构于K^n. 精确地说，V的每个编了号的基$B = \{b_1, \cdots, b_n\}$确定了一个同构$\Phi_B : V \to K^n$. Φ_B是用

$$\Phi_B(b_i) = e_i\,(= K^n \text{的典范基} E \text{中的第} i \text{个元素})$$

来确定的.

反之，由同构$\Phi : V \to K^n$可确定V的一组基

$$B = \Phi^{-1}(E) = \{\Phi^{-1}(e_1), \cdots, \Phi^{-1}(e_n)\}.$$

成立着$\Phi_{\Phi^{-1}(E)} = \Phi$, $\Phi_B^{-1}(E) = B$, 即同构和基在上述的对应下是一一对应的（唯一、可逆的）.

定义2.5.9 也称同构$\Phi : V \to K^n$为V的图，称$v \in V$的象$\Phi(v) \in K^n$为v关于图Φ的坐标. 如$\Phi = \Phi_B$, 则称Φ为由B所确定的图.

2.5.8 的证明: 设 $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 是 V 的基. 按 2.4.4, 映射

$$\bar{\Phi}=\bar{\Phi}_B: B\to E; b_i\to e_i$$

正好具有一个扩张 $\Phi=\Phi_B$, 它是一个满的线性映射, 且有 $\Phi(V)=\Phi([B])=[\Phi(B)]=[E]=K^n$, 见 2.3.7.

逆映射 $\bar{\Psi}=\bar{\Phi}^{-1}: E\to B$ 正好具有一个到同构 $\Psi: K^n\to V$ 的扩张, $\bar{\Psi}\cdot\bar{\Phi}=\mathrm{id}_B$ 的扩张是 $\mathrm{id}_V=\Psi\cdot\Phi$. 于是由 1.1.10, Φ 是单射, 即 $\Phi=\Phi_B$ 是一个同构.

最后的结论得自 $\Phi_{\Phi^{-1}(E)}\,|_{\Phi^{-1}(E)}=\Phi\,|_{\Phi^{-1}(E)}$ 及 $\Phi_B(b_i)=e_i$. □

例 2.5.10 设 $\{b_1=(b_{11},b_{21}),b_2=(b_{12},b_{22})\}$ 是 $V=K^2$ 的基. 同构 $\Phi_B: K^2\to K^2$ 为

$$x=x_1b_1+x_2b_2\mapsto x_1e_1+x_2e_2.$$

于是

$$(x_1b_{11}+x_2b_{12},x_1b_{21}+x_2b_{22})\mapsto(x_1,x_2).$$

2.6 线性补

当 U 是向量空间 V 的一个 (线性) 子空间时, 我们需要去寻求 V 的与 U 相补的子空间. 这样的空间 U' 在一般情况下不是唯一确定的.

定义 2.6.1 设 U 是 V 的子空间. V 的一个子空间 U' 称为 U 的补, 如果 $U\cap U'=\{0\}$ 和 $U+U'=V$.

注: 如在 2.1.9 中那样, 记 $U+U'$ 为 $x+x'$ 的集合, 其中 $x\in U$, $x'\in U'$. 我们在 2.6.1 中也能写 $V=U\oplus U'$, 见 2.1.9.

例 2.6.2 1. 对 K^3, 我们讨论子空间 U=$\{(\alpha_1,\alpha_2,0)$; 其中 $\alpha_i\in K\}$. 对每个 $x\notin U$, $U'=Kx=\{\alpha x\}$ 是一个补. 因为

$U \cap U' = \{0\}$，且由 2.5.1，人们能把 K^3 的典范基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 替换成基 $\{e_1, e_2, x\}$. 注意，在 $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ 中 $x_3 \neq 0$.

2. 当 $U = V$ 时，则 $U' = \{0\}$.

3. 当 $U = \{0\}$ 时，则 $U' = V$.

定理2.6.3 对 V 的每个子空间 U, 其补是存在的.

证明: 设 B_U 是 U 的基. 由 2.4.8, B_U 能被补充成 V 的一组基 B. 令 $B \setminus B_U = B'$. 于是 $U' = [B']$ 是一个补. 这是因为 $B_U \cap B' = \emptyset$ 蕴含了 $[B_U] \cap [B'] = \{0\}$ 和 $[B_U] + [B'] = [B] = V$. □

注: 如人们从证明中所知，对 $U \neq \{0\}$ 和 $U \neq V$, U 的补 U' 不是唯一确定的. 下列引理是重要的，即有一个唯一确定的空间，它与每一个补是同构的.

引理2.6.4 设 U 是 V 的子空间. 则 U 的每一个补 U' 同构于陪集空间 (或商空间) V/U. 称 $\dim V/U$ 为 U 的余维数，记为 $\operatorname{codim} U$. 于是对 U 的任意补 U', 有 $\operatorname{codim} U = \dim U'$.

证明: V/U 定义于 2.2.10. 考察线性映射 $\Pi_U : V \to V/U$; $x \to \bar{x}$. 由 2.2.11, $V/\ker \Pi_U \cong \operatorname{im} \Pi_U$. 显然 $\operatorname{im} \Pi_U = V/U$. $x \in \ker \Pi_U$ 等价于 $x \in U$. 限制 $\Pi_U |_{U'}$ 具有核 $U' \cap U = \{0\}$ 及象 V/U, 因为每一个 $x \in V$ 能被描述为 $x = (x_U, x'_U) \in U + U'$. □

系2.6.5 设 $f : V \to W$ 为线性的， U' 是 $U = \ker f$ 的一个补. 于是 $f |_{U'}: U' \to \operatorname{im} f$ 是一个同构.

证明: 在 2.2.11 的证明中我们构造了一个同构

$$\Phi : \operatorname{im} f \to V/\ker f.$$

显然有 $f = \Phi^{-1} \circ (\Pi_{\ker f}|_{U'})$. □

现在我们来看维数公式.

引理2.6.6 设 $\dim V$ 是有限的. 设 $U \subset V$ 为子空间, U' 为一个补. 于是成立

$$\dim U + \dim U' = \dim V.$$

证明: 设 B_U 是 U 的基. B'_U 是 U' 的基. 则 $B = B_U \cup B'_U$ 是 V 的基. 且 $\#B_U + \#B'_U = \#B$. □

定理2.6.7 设 $f: V \to W$ 为线性的, $\dim V < \infty$. 则成立

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.$$

证明: 这得自2.6.5及2.6.6. □

系2.6.8 设 $\dim V < \infty$, 且 $f: V \to W$ 是线性的.

1. 当 f 为单射时, 则 $\dim V \leq \dim W$.
2. 当 f 为满射时, 则 $\dim V \geq \dim W$.
3. 如果 $\dim V = \dim W$, 则从 f 是单射或满射就可得到 f 为双射, 因而也是同构.

证明: 对1.: 按1.3.8, 成立 $\ker f = \{0\}$, 于是由2.6.7, 有 $\dim V = \dim \operatorname{im} f \leq \dim W$.

对2.: 因为 $\operatorname{im} f = W$, 结论得自2.6.7.

对3.: 如 $\ker f = \{0\}$, 则 $\dim \operatorname{im} f = \dim W$. 如果 $\dim \operatorname{im} f = \dim W = \dim V$, 则 $\ker f = \{0\}$. □

我们以子空间的维数公式来结束本节.

定理2.6.9 设 U, U' 为 V 的有限维子空间. 则成立

$$\dim (U \cap U') + \dim (U + U') = \dim U + \dim U'$$

证明: 考察 $U \cap U'$ 的一组基 $B_{U \cup U'}$. 存在着从 $B_{U \cap U'}$ 到 U 的基 B_U 的补充 B_U^0, 也存在着从 $B_{U \cap U'}$ 到 U' 的基 $B_{U'}$ 的补充 $B_{U'}^0$, 见2.4.8. 于是 $B_{U \cap U'} \cup B_U^0 \cup B_{U'}^0$ 是 $U + U'$ 的一组基 B. 于是

$$\begin{aligned}\dim (U + U') &= \#B = \#B_{U \cap U'} + \#B_U^0 + \#B_{U'}^0 \\ &= \dim (U \cap U') + (\dim U - \dim (U \cap U')) \\ &\quad + (\dim U' - \dim (U \cap U')).\end{aligned}$$

□

例2.6.10 设$V = K^3$, U, U'为子空间，且 $\dim U = 1$, $\dim U' = 2$. 当$U \cap U' = \{0\}$时，有 $\dim (U + U') = 3$, 于是$U + U' = V$. 2.6.9中的公式成为$0 + 3 = 1 + 2$.

当$U \cap U' \neq \{0\}$时，有$U \cap U' = U$, $U + U' = U'$. 在2.6.9中的公式就成为$1 + 2 = 1 + 2$.

习题

1. 设$I \subset R$是一个区间. 用R^I或$\mathcal{F}(I; R)$来记映射 (函数) $f: I \to R$的集合. 在R^I上定义连接关系如下：

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \quad \alpha \in R,\\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \quad f, g \in R^I.\end{aligned}$$

(a) 证明： R^I是一个向量空间，也是一个环.

(b) R^I是一个域吗？

(c) 设$x_0 \in I$已选定. 证明：满足$f(x_0) = 0$的$f \in R^I$的集合对于所诱导的连接关系构成了R^I的一个向量子空间.

(d) 由分析中的定理可得出：连续映射的集合$C(I; R) \subset \mathcal{F}(I; R)$构成了一个向量子空间.

2. 在实数3- 数组$x = (x_1, x_2, x_3)$的向量空间R^3上定义连接关系

$$(x, y) \in R^3 \times R^3 \mapsto x \times y \in R^3$$

如下：

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

(a) 证明：

$$x \times y = -y \times x,$$
$$x \times (y + y') = x \times y + x \times y',$$
$$(\alpha x) \times y = \alpha(x \times y), \quad \alpha \in R.$$

(b) 此连接关系是否具有中性元？此连接关系是否满足结合律？

3. 考察由 R 中元素的 n- 数组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所构成的 R- 模 R^n. 下列映射中哪些是线性的？

(a) $f: R^n \to R; \qquad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i,$

(b) $g: R^n \to R; \qquad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1 - x_n,$

(c) $h: R^n \to R; \qquad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1^2.$

4. 考察由形式幂级数 $\sum_{i\geq 0} a_i t^i$ (即 $a_i \in R$, 且对所有 $i \geq 0$ 求和) 的 R- 模 $R[[t]]$. 定义映射

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}: R[[t]] \to R[[t]]; \quad \sum_{i\geq 0} a_i t^i \mapsto \sum_{i\geq 1} i a_i t^{i-1},$$

$$\int_0^t : R[[t]] \to R[[t]]; \quad \sum_{i\geq 0} a_i t^i \mapsto \sum_{i\geq 0} \frac{a_i}{i+1} t^{i+1}.$$

(a) 证明：上述映射是线性的.

(b) 试确定 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的核和象.

(c) 证明： $\ker \int_0^t = 0$, 但 $\operatorname{im} \int_0^t \neq R[[t]]$.

(d) 证明： $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \circ \int_0^t = \mathrm{id}$; $\int_0^t \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \neq \mathrm{id}$.

5. (a) 证明：多项式环 $R[t]$ 是 $R[[t]]$ 的子模.

(b) 证明： $R[t] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Rt^i$ (直和).

6. 证明：对 R^2 中的元素 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$, 总存在三个实数 $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, 使得 $ax + by + cz = 0$.

7. 给定下述的域K及集合$A\subset K^n$. A是自由的吗？它是生成系或是一组基？

(a) $K=\mathbf{R}$, $A=\{(3,5,2),(0,1,1),(3,6,2)\}\subset\mathbf{R}^3$,

(b) $K=\mathbf{R}$, $A=\{(3,5),(0,1),(3,0)\}\subset\mathbf{R}^2$,

(c) $K=\mathbf{Z}_5$, $A=\{(\bar{1},\bar{2},\bar{3}),(\bar{0},\bar{1},\bar{2}),(\bar{3},\bar{1},\bar{4})\}\subset\mathbf{Z}_5^3$,

(d) $K=\mathbf{C}$, $A=\{(\mathrm{i},\mathrm{i}-1),(1,1+\mathrm{i})\}\subset\mathbf{C}^2$.

8. (a) 试确定$\mathbf{R}^3$中的三个线性相关的（即不是自由的）向量，使得其中任何两个向量是线性无关的（自由的）.

(b) 试确定$\mathbf{R}^3$中4个向量，使得其中任何三个向量均构成一组基.

9. 设$v_1,\cdots,v_n\in V$是域K上的向量空间V中的线性相关向量，而其中任何$n-1$个向量都是线性无关的.

(a) 证明：存在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in K^*$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0.$$

(b) 证明：如果$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\in K$满足$\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i=0$, 且至少对某一个$i$, 有$\beta_i\in K^*$, 则存在一个$\gamma\in K^*$, 使得$\beta_i=\gamma\alpha_i$, 而$\alpha_i$如 (a) 中所述.

10. 设$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$是向量空间V的一组基.

(a) 选定一个$b_i\in B$. 试确定所有的$v\in V$, 使得$(B\backslash\{b_i\})\cup\{v\}$成为一组基.

(b) 试确定所有的$v\in V$, 使得对每一个基向量b_i都具有(a)中所述的性质.

第3章

矩阵

3.1 线性映射的向量空间

从现在开始我们仅讨论交换域K上的向量空间. 我们在2.1.2.3中已经看到映射$f: M \to K$的集合K^M构成了一个K-向量空间. 这个例子可以直接地推广到映射$f: M \to W$的集合W^M上去, 这里W是一个K-向量空间. 特别有兴趣的是$M = V$和$f: V \to W$为线性的情形.

定义3.1.1 设V和 W 是 K 上的向量空间. 我们用$L(V;W)$ 表示线性映射$f: V \to W$的集合.

引理3.1.2 $L(V;W)$是所有映射$f: V \to W$所构成的向量空间的子空间.

证明: 我们来验证2.1.5的有效性.

如果设f, g是线性的, 则$f+g$也是线性的. 这是因为$(f+g)(x+x')$被定义为$f(x+x')+g(x+x')$, 而它等于$f(x)+f(x')+g(x)+g(x') = (f+g)(x)+(f+g)(x')$. 进而, $(f+g)(\alpha x) = f(\alpha x)+g(\alpha x) = \alpha f(x)+\alpha g(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = (\alpha(f+g))(x)$. □

在$V = W$的情形, $L(V;W)$还具有一个附加的结构.

定理3.1.3 在$L(V;V)$上除了加法以外, 可用$fg = g \circ f$(映射的复合)来定义乘法. 于是$L(V;V)$成为一个环, 且以id_V作为它的单位元.

注: 在$L(V;V) \cap \mathrm{Perm}\ V$上$fg$也相应于在1.2.11.2中用$f \cdot g$所表示的乘积. 还注意到: $L(V;V) \not\subset \mathrm{Perm}\ V$.

证明: 首先我们注意, $fg \in L(V;V)$, 见2.2.6. 我们必须验证1.5.1中的公理1到4的有效性. 公理1得自3.1.2. 公理2

得自 1.1.7. 公理 3 是显然的，且 $1 = \mathrm{id}_V$. 于是只剩下分配律 4, 即对 $L(V;V)$ 中的 f,g,h, 必须成立

$$f(g+h) = fg + fh; \qquad (f+g)h = fh + gh.$$

我们只限于验证这两个等式中的第一个式子:

$$\begin{aligned} f(g+h)(x) &= (g+h)\circ f(x) = g(f(x)) + h(f(x)) \\ &= (g\circ f)(x) + (h\circ f)(x) = (fg)(x) + (fh)(x). \end{aligned}$$

□

注解3.1.4 1. $L(V;V)$ 甚至是一个所谓的 K-代数 A. 我们将其理解成: A 的元素构成了一个 K-向量空间, 进而 A 还是一个环, 其加法用向量空间的加法给出, 而且对数量乘法 $(\alpha, x) \in K \times A \mapsto \alpha x \in A$, 还成立着下列的"混合结合律":

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y.$$

容易看出, 对 $L(V;V)$ 来说, 此规则确实是满足的.

2. 当 $\dim V = 1$ 时, 向量空间的同构 $V \to K$ (见 2.5.8) 提供了一个环的同构 $L(V;V) \to K$. 事实上, 设 $e \in V$ 是一个基元. 对 $f \in L(V;V)$, 可用 $f(e) = \alpha e$ 去确定出一个元 $\alpha \in K$. 对 $g \in L(V;V)$, 有 $g(e) = \beta e$, 于是相应地, $f+g$ 有元 $\alpha+\beta$, fg 有元 $\alpha\beta$. 对 $\dim V = 1$ 的情形, 环 $L(V;V)$ 甚至是一个域.

3. 当 $\dim V > 1$ (包括 $\dim V = \infty$), 环 $L(V;V)$ 是非交换的, 也不是一个域. 为了看出后一结论, 选 V 的一组基 B. 选 $b \in B$. $B' = B \setminus \{b\} \neq \emptyset$. 我们用 $\bar{f}(b) = 0$, $\bar{f}\big|_{B'} = \mathrm{id}_{B'}$ 来定义 $\bar{f} : B \to V$. $\bar{f}$ 确定了一个映射 $f : V \to V$, 见 2.4.4. 因为 $b \in \ker f$, f 不是双射, 即 f 不是零元素, 且无乘法逆.

我们可按下法得到 $L(V;V)$ 中两个不交换的元素 f, g 的例子. 设 B 为一组基, b_1, b_2 为 B 中的两个元, 设 $B \setminus \{b_1, b_2\} = B'$.

用 $f(b_1)=b_1$，$f(b_2)=b_1+b_2$，$f|_{B'}=\mathrm{id}_{B'}$ 来定义 f，用 $g(b_1)=b_1+b_2$，$g(b_2)=b_2$，$g|_{B'}=\mathrm{id}_{B'}$ 定义 g. 于是 $fg(b_1)=g\circ f(b_1)=b_1+b_2$，而 $gf(b_1)=f\circ g(b_1)=2b_1+b_2$.

4. 在每一个环 R 中，乘法可逆元的集合 R^* 构成一个群，且以 $1\in R^*$ 为其中性元. 特别当 $R=L(V;V)$ 时，R^* 由 V 的线性自同构所构成，即 $L(V;V)^*=L(V;V)\cap \mathrm{Perm}\ V$. 于是利用 2.2.9 中的记号，我们有 $L(V;V)^*=GL(V)$.

3.2　对偶空间

现在我们来讨论一个特别重要的、由线性映射所构成的空间. 注意，K 是 K 上的向量空间.

定义3.2.1　设 V 是 K 上的一个向量空间. 我们称向量空间 $L(V;K)$ 为 V 的对偶空间，也把它记为 V^*. 元素 $x^*\in V^*$ 称为 (在 V 上的) 线性形式.

例3.2.2　1. 在 2.2.2.2 中的映射 $pr_k: K^n\to K$ 是一个在 K^n 上的线性形式. 一般地，设 $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 为 V 的一组带有编号的基，$\dim V=n>0$. 用

$$pr_k(x)=x_k=\text{表示式}(x=\sum_i x_ib_i)\text{中的第}k\text{个分量}$$

来定义 $pr_k: V\to K$. 于是 $pr_k\in V^*$.

2. 设 $I\subset \mathbf{R}$ 是一个有限区间. $\mathbf{R}^I$ 是一个 $\mathbf{R}$-向量空间，见 2.1.2.2. 连续映射 $f: I\to\mathbf{R}$ (即连续函数) 的集合 $C=C(I;\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}^I$ 的一个子空间；子空间判据 2.1.5 的有效性乃是分析中的一个著名的结果. 黎曼积分理论指出：积分

$$\int_I : f\in C\mapsto \int_I f\in\mathbf{R}$$

是C上的一个线性形式:

$$\int_I f+g=\int_I f+\int_I g; \qquad \int_I \alpha f=\alpha\int_I f.$$

引理3.2.3 设$x^*\in L(V;K)$, $x^*\neq 0$. 于是 $\ker x^*$的补的维数为1, 即 $\ker x^*$的余维数为1.

证明: 设U'为 $\ker x^*$的补, 由2.6.5,

$$x^*|_{U'}:U'\to \operatorname{im} x^*=K$$

是同构. □

例3.2.4 1. 在3.2.2.1中, $\ker pr_k=Kb_1+\cdots+0b_k+\cdots+Kb_n$, (在第$k$个位置有$0b_k=0$). $\ker pr_k$的补由Kb_k给出.

2. 在3.2.2.2中, 核是由满足$\int_I f=0$的连续函数f所构成. 对常值函数$\{f_c(t)=c$, 对所有$t\in I\}$, $\int_I f_c=c|I|$, $|I|$是I的长度, 于是$\int_I\neq 0$. 常值函数的集合构成了 $\ker \int_I$的补.

定义3.2.5 设V是一个向量空间, V^*是它的对偶空间. 称映射

$$<\ ,\ >: V\times V^*\longrightarrow K;$$
$$(x,x^*)\mapsto <x,x^*>=x^*(x)$$

为V和V^*的自然配对.

命题3.2.6 $<\ ,\ >:(x,x^*)\in V\times V^*\mapsto <x,x^*>\in K$是双线性的, 即对其每一个变量, 它是线性的.

证明: 对于第二个变量的线性性质:

$$<x,\alpha x^*+\beta y^*>=(\alpha x^*+\beta y^*)(x)$$

$$= (\alpha x^*)(x) + (\beta y^*)(x) = \alpha x^*(x) + \beta y^*(x)$$
$$= \alpha < x, x^* > + \beta < x, y^* > .$$

对于第一个变量的线性性质，即

$$< \alpha x + \beta y, x^* >= \alpha < x, x^* > + \beta < y, x^* >,$$

它得自 $x^* \in L(V;K)$. □

定义3.2.7 设 B 是 V 的一组基. 定义线性映射

$$f_B : V \longrightarrow V^*$$

为用下述方法在 B 上所定义的映射 $\bar{f}_B$ 的扩张:

$$\bar{f}_B : B \longrightarrow V^*$$

使得

$$< b', \bar{f}_B(b) >= \begin{cases} 1, & 对 b' = b, \\ 0, & 对 b' \in B \setminus \{b\}. \end{cases}$$

注: 注意，在 B 上定义 $\bar{f}_B$ 就够了.

引理3.2.8 3.2.7中的映射 f_B 是单射， $B^* = f_B(B)$ 是自由的. B^* 生成 V^*, 因而它成为 V^* 的一组基的充要条件是 $\dim V < \infty$. 在此情况下，称 B^* 为 V^* 的相应于 B 的对偶基. 对 $b \in B$, 我们也用 b^* 来替代 $f_B(b)$.

证明: 只需讨论 $V \neq \{0\}$, 即 $B \neq \emptyset$ 的情形. 当 b, b' 在 B 中，且 $b \neq b'$, 于是 $b^* = f_B(b) \neq b'^* = f_B(b')$. 因为当 $< b, b'^* >= 0$ 时，有 $< b, b^* >= 1$.

设 $\dim V = n < \infty$. 选取 $\{b_1, \cdots, b_n\}$ 为 B 的一个带有编号的基，并记 $B^* = \{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$. 于是

$$< b_k, b_i^* >= \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & 对 k = i, \\ 0, & 对 k \neq i. \end{cases}$$

对 $\{1, \cdots, n\}$ 中的 i, k, 用此法所定义的映射 δ 被称为克氏记号.
我们断言，对每个 $x^* \in V^*$, 成立

$$x^* = \sum_i < b_i, x^* > b_i^*.$$

事实上，右边对 b_k 的取值为

$$\sum_i < b_i, x^* >, < b_k, b_i^* >=< b_k, x^* >= x^*(b_k).$$

于是 $B^* = \{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ 是 V^* 的一组基.

当 $\dim V = \infty$ 时， $B^* = f_B(B)$ 不是 V^* 的生成元系统. 这是因为如果我们观察一个元素 $x^* \in V^*$, 使得它对所有 $b \in B$, 有 $< b, x^* >= 1$, 于是有 $x^* \notin [B^*]$. 事实上， $x^* \in [B^*]$ 意味着

$$x^* = \sum_{b^* \in B^*} \alpha_{b^*} b^*,$$

而且对几乎所有的 $b^* \in B^*$, 有 $\alpha_{b^*} = 0$. 但因为 B^* 包含着无限多个元素，所以总存在一个 $b_0^* \in B^*$, 使得 $\alpha_{b_0^*} = 0$. 但

$$< b_0, x^* >=< b_0, \sum_{b^* \in B^*} \alpha_{b^*} b^* >= 0,$$

这样，就与 $x^* \in [B^*]$ 的假设相矛盾. □

系3.2.9 当 $\dim V < \infty$ 时， $\dim V^* = \dim V$.

证明: $\dim V = \#B = \#B^* = \dim V^*$. □

引理3.2.10 我们定义一个映射

$$(**) : V \longrightarrow V^{**},$$

它把 V 映至 V^* 的对偶空间 $(V^*)^* = V^{**}$ 中，令 $(**)x = x^{**}$, 其中 x^{**} 定义为

$$< y^*, x^{**} >=< x, y^* >, \quad \text{对所有} y^* \in V^*.$$

映射 (**) 是线性的, 且为单射. 设B是V的一组基, 按照3.2.7, $B^* = f_B(B)$是V^*中的自由系. 令$[B^*] = U^*$, 于是B^*是$U^* \subset V^*$的基. (**) 等于复合 $f_{B^*} \circ f_B$. (**) 是同构的充要条件为 $\dim V < \infty$. 在此情形下, V^{**}和V亦被视为恒同.

证明: 我们限于$V \neq \{0\}$的情形. $x^{**} \in V^{**}$得自配对

$$< \, , \, >: V \times V^* \longrightarrow K$$

关于第二个变量的线性性质 (参见 3.2.6). (**) 的线性性质得自$< \, , \, >$关于第一个变量的线性性质. (**) 的单射性, 即 $\ker\, (**) = \{0\}$ 的理由如下, 即对V中的$x \neq 0$, 存在一个$x^* \in V^*$, 使得$< x, x^* > \neq 0$: 将x扩张成V的一组基B, 且选择元素$f_B(x)$ 作为x^*.

设B为V的基. $B^* = f_B(B)$是$U^* = [B^*] \subset V^*$的基. 设b取自B中. 于是在B上可用

$$< f_B(b'), f_{B^*} \circ f_B(b) > = \begin{cases} 1, & \text{对}\, b = b', \\ 0, & \text{对}\, b \neq b' \end{cases}$$

来定义$f_{B^*} \circ f_B(b)$, 即在$B^* = f_B(B)$上, $f_{B^*} \circ f_B(b)$是与b^{**}一样定义的, 换言之,

$$< f_B(b'), b^{**} > = < b, f_B(b') > = \begin{cases} 1, & \text{对}\, b = b', \\ 0, & \text{对}\, b \neq b', \end{cases}$$

于是得到$(**) = f_{B^*} \circ f_B$.

当 $\dim V < \infty$时, 由3.2.9, 成立 $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. 于是按照2.6.8, (**) 为一个同构.

当 $\dim V = \infty$ 时, 如我们在 3.2.8中所见到的那样, $f_B : V \to V^*$不是满射, 于是$(**) = f_{B^*} \circ f_B$也不是满射. □

命题3.2.11 设$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$是V的一组带有编号的基，$B^*=\{b_1^*,\cdots,b_n^*\}$是$B$的对偶基. 于是对每个$x\in V$及每个$x^*\in V^*$, 成立:

$$x=\sum_i < x, b_i^* > b_i;\quad x^*=\sum_j < b_j, x^* > b_j^*.$$

证明: 第二个公式已在3.2.8的证明中得出. 由第二个公式可得出第一个公式，我们只需对$x^{**}=\sum_i < b_i^*, x^{**} > b_i^{**}$应用同构: $(**) : V\to V^{**}$的逆，且利用$< b_i^*, x^{**} >=< x, b_i^* >$即可. □

例3.2.12 1. 考察$V=K^n$, $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是其典范基，$E^*=\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是$E$的对偶基. 于是$< x, e_i^* >= x_i$为$x=\sum_j x_j e_j$中$e_i$的系数.

2. 对$V=K[t]$, 考察2.4.2.2中的典范基$B=\{1,t,t^2,\cdots\}$. $f_B(t^k):K[t]\to K$是映射$\sum_i a_i t^i\mapsto a_k$. 利用一个固定选取的序列$\{b_i\in K,\ i\in \mathbf{N}\}$, V^*的元素是映射

$$\sum_i a_i t^i\mapsto\sum_i a_i b_i.$$

由$B^*=f_B(B)$生成的子空间$[B^*]$是由序列$\{b_i\in K,\ i\in\mathbf{N}\}$所构成，这里对几乎所有的$i\in\mathbf{N}$, 有$b_i=0$.

3.3 转置映射

在3.2中我们对每个向量空间V构造了它的对偶空间V^*. 现在来扩张这个构造，对每个态射$f:V\to W$, 我们要将它对应于一个态射${}^t f:W^*\to V^*$, 使得${}^t(g\circ f)={}^t f\circ{}^t g$.

命题3.3.1 设V和W为向量空间. $f:V\to W$是线性的. 定义一个线性映射${}^t f:W^*\to V^*$, 使得${}^t f(y^*):V\to K$被定

义为

$$x \mapsto < f(x), y^* > .$$

于是对所有 $(x, y^*) \in V \times W^*$, 有

$$< x, {}^t f(y^*) > = < f(x), y^* > .$$

证明: ${}^t f(y^*) \in V^*$ 成立, 这是因为

$$\begin{aligned} < \alpha x + \alpha' x', {}^t f(y^*) > &= < f(\alpha x + \alpha' x'), y^* > \\ &= < \alpha f(x) + \alpha' f(x'), y^* > \\ &= \alpha < f(x), y^* > + \alpha' < f(x'), y^* > \\ &= \alpha < x, {}^t f(y^*) > + \alpha' < x', {}^t f(y^*) > . \end{aligned}$$

${}^t f \in L(W^*; V^*)$ 得自 $<\ ,\ >$ 关于第一个变量的线性性质:

$$\begin{aligned} < x', {}^t f(y^* + y'^*) > &= < f(x), y^* + y'^* > \\ &= < f(x), y^* > + < f(x), y'^* > \\ &= < x, {}^t f(y^*) > + < x, {}^t f(y'^*) >; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < x, {}^t f(\alpha y^*) > &= < f(x), \alpha y^* > = \alpha < f(x), y^* > \\ &= \alpha < x, {}^t f(y^*) > = < x, \alpha\, {}^t f(y^*) > . \end{aligned}$$

□

定义 3.3.2 称 ${}^t f : W^* \to V^*$ 为对 $f : V \to W$ 的转置映射.

例 3.3.3 1. 考虑在 2.2.2.2 中的实系数多项式环上的线性映射 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}[t]$. 2.2.2.4 中的映射 $\mathrm{ev}_a : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}$ 是一个线性形式. 将转置映射 ${}^t(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$ 应用于 $\mathrm{ev}_a \in L(\mathbf{R}[t]; \mathbf{R})$ 得到一个线性形式

$$f \mapsto < f, {}^t(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})\ \mathrm{ev}_a > = < \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\ \mathrm{ev}_a > = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_a .$$

3.2.2.2中的线性形式$\int_I$在${}^t(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$下的象是线性形式

$$f \mapsto < f, {}^t(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})\int_I > = < \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \int_I > = \int_I \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}.$$

2. 用$\mathcal{D} = \mathcal{D}(I;\mathbf{R})$表示一次(连续)可微函数$f : I \to \mathbf{R}$的集合，这里$I$是一个有限区间. $\mathcal{D}$包含了多项式集合$K[t]$. 从分析中知道: $\mathcal{D}$是在I上连续函数的向量空间$\mathcal{C} = \mathcal{C}(I;\mathbf{R})$的一个线性子空间. 我们在3.2.2.2中已经导出了这个结论. $\mathcal{D} \neq \mathcal{C}$. 进而知道,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}; \quad f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

是线性的. 特别地,

$$\mathrm{ev}_a : \mathcal{C} \to \mathbf{R}; \quad f \mapsto f(a), \quad a \in I$$

是一个线性形式. $\mathcal{C}$上的线性形式 ev_a和$\int_I$在${}^t(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$下的象(见3.2.2)可如在1. 中那样定义.

定理3.3.4 映射

$$({}^t) : L(V;W) \longrightarrow L(W^*;V^*); \quad f \mapsto {}^t f$$

是线性的，且为单射. 当V和W为有限维时，则$({}^t)$是一个同构.

证明: ${}^t(f+g) = {}^t f + {}^t g$得自

$$\begin{aligned} &< x, {}^t(f+g)(y^*) > = < (f+g)(x), y^* > \\ &\quad = < f(x)+g(x), y^* > = < f(x), y^* > + < g(x), y^* > \\ &\quad = < x, {}^t f(y^*) > + < x, {}^t g(y^*) > = < x, {}^t f(g^*) + {}^t g(y^*) > . \end{aligned}$$

${}^t(\alpha f) = \alpha\ {}^t f$ 得自

$$< x, {}^t(\alpha f)(y^*) > = < \alpha f(x), y^* > = \alpha < f(x), y^* >$$
$$= \alpha < x, {}^t f(y^*) > = < x, \alpha\ {}^t f(y^*) > .$$

这里 $(x, y^*) \in V \times W^*$ 是任意的元素.

$({}^t)$ 是单射, 即 $\ker\ ({}^t) = 0$. 这是因为当 $f \neq 0$ 时, 存在 $x \in V$ 使得 $y = f(x) \neq 0$. 如在3.2.10的证明中所指出的那样, 于是存在 $y^* \in W^*$ 使得 $< y, y^* > \neq 0$, 又 $< x, {}^t f(y^*) > = < f(x), y^* > \neq 0$, 即 ${}^t f \neq 0$.

现设 V 和 W 为有限维向量空间. 设 $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$ 和 $E = \{e_1, \cdots, e_m\}$ 是 V 和 W 的相应的基. 我们证明: 对 $f^* \in L(W^*; V^*)$, 存在 $f \in L(V; W)$ 使得 $f^* = {}^t f$.

运用 V^* 和 W^* 的相应的对偶基 $D^* = \{d_1^*, \cdots, d_n^*\}$ 和 $E^* = \{e_1^*, \cdots, e_m^*\}$, 定义 f 为

$$f(d_j) = \sum_i < d_j, f^*(e_i^*) > e_i.$$

由此得到

$$< d_j, {}^t f(e_k^*) > = < f(d_j), e_k^* >$$
$$= \sum_i < d_j, f^*(e_i^*) >< e_i, e_k^* > = < d_j, f^*(e_k^*) >,$$

于是

$$ {}^t f\big|_{E^*} = f^*|_{E^*} .$$

□

引理3.3.5 设 $f: U \to V$, $g: V \to W$ 是线性的. 于是 ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

证明: 对 $z^* \in W^*$ 和 $x \in V$, 有

$$\begin{aligned} < x, {}^t(g \circ f)(z^*) > &=< (g \circ f)(x), z^* > \\ &=< g(f(x)), z^* >=< f(x), {}^t g(z^*) > \\ &=< x, {}^t f \circ {}^t g(z^*) > . \end{aligned}$$

□

我们在 3.1.3 中得知 $L(V;V)$ 是一个环，因而 $L(V^*;V^*)$ 也是一个环. 现在我们要证明:

引理3.3.6 映射

$$({}^t) : L(V;V) \longrightarrow L(V^*;V^*)$$

是一个环 - 反态射，即 $({}^t)$ 关于加法是线性的，关于乘法有

$${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f; \qquad {}^t 1_V = 1_{V^*}.$$

注: $1_V = \mathrm{id}_V$; $\qquad 1_{V^*} = \mathrm{id}_{V^*}$.

证明: 这得自 3.3.4 和 3.3.5. □

系3.3.7 当 $f \in L(V;V)$ 可逆时, 则成立 $({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$. 我们今后也将其简记为 ${}^t f^{-1}$.

证明: 按 3.3.6, 有 ${}^t(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{V^*}$. 我们运用 3.3.5 来验证 1.1.11:

$${}^t(\mathrm{id}_V) = {}^t(f \circ f^{-1}) = {}^t(f^{-1}) \circ {}^t f = \mathrm{id}_{V^*};$$
$${}^t(\mathrm{id}_V) = {}^t(f^{-1} \circ f) = {}^t f \circ {}^t(f^{-1}) = \mathrm{id}_{V^*}.$$

□

最后我们要证明

引理3.3.8 设 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$ 为 V 的基，$\Phi_D: V\longrightarrow K^n$ 是由此所确定的图，见2.5.9. 设 D^* 为对应于 D 的对偶基. 于是

$$\Phi_{D^*}\equiv {}^t\Phi_D^{-1}: V^*\longrightarrow (K^n)^*.$$

证明：设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 K^n 的典范基，E^* 是其对偶基. 于是 Φ_{D^*} 是用

$$\Phi_{D^*}(d_j^*)=e_j^*,\quad 即 <e_k,\Phi_{D^*}(d_j^*)>=\delta_{jk}$$

来特征的. 另一方面，亦有

$$<e_k,{}^t\Phi_D^{-1}(d_j^*)>=<\Phi_D^{-1}(e_k),d_j^*>=<d_k,d_j^*>=\delta_{jk}.$$

□

3.4 矩阵

我们现在要导入一个概念，它标明了线性代数起源的历史以及与线性代数方程组的原始的联系. 在4.1中我们将对此予以讨论.

所有要去讨论的向量空间都是有限维的.

定义3.4.1 1. 域 K(或者更一般地，交换环) 上的 (m,n)-矩阵 A 是指 K 中的一个元素族，其指标集合 I 是由偶 $I=\{(i,j);\ 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ 所构成的. 用 a_{ij} 表示指标 (i,j) 的象. 我们也把 A 写成 (a_{ij}) 或

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

2. (m,n)-矩阵 A 的第 i 行 A^i 是指 $(1,n)$-矩阵 $(a_{i1},\cdots,a_{in})$，而 (m,n)-矩阵 A 的第 j 列 A_j 是指 $(m,1)$-矩阵 $\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$.

3. $M_K(m,n)$ 表示 K 上 (m,n)- 矩阵的集合.

引理3.4.2 (m,n)- 矩阵可一一对应于用下述的方法所作出的从 K^n 到 K^m 中的线性映射：设 $A=(a_{ij})\in M_K(m,n)$, 于是用

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto f_A(x)=(\sum_j a_{1j}x_j,\cdots,\sum_j a_{mj}x_j)$$

可定义 $f_A:K^n\to K^m$, 这里 $\sum_j$ 中的 j 从 1 走到 n.

证明: 由 f_A 的定义立即可得出：$f_A(x+x')=f_A(x)+f_A(x')$ 和 $f_A(\alpha x)=\alpha f_A(x)$, 于是 $f_A\in L(K^n;K^m)$.

反之，设 $f\in L(K^n;K^m)$. 设 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$ 和 $E=\{e_1,\cdots,e_m\}$ 分别为 K^n 和 K^m 的典范基. 用 $f(d_j)=\sum_i a_{ij}e_i$ 的系数 $\{a_{ij};1\leq i\leq m\}$ 来定义 (m,n)- 矩阵 A_f 的第 j 列 A_j, 这里 $\sum_i$ 中的 i 从 1 走到 m. 于是显然有 $A_{f_A}=A$, $f_{A_f}=f$. □

定义3.4.3 1. 我们把从属于线性映射 $f_A:K^n\to K^m$ 的 (m,n)- 矩阵也记为 A.

2. 对 $k\in\{1,\cdots,m\}$, $l=\{1,\cdots,n\}$, 我们用 E_{kl} 表示矩阵 $(a_{ij}\equiv\delta_{ik}\delta_{lj})$. 即 E_{kl} 在 k 行 l 列为 1, 其他处均为 0. 作为线性映射， E_{kl} 可用 $E_{kl}(d_j)=\delta_{jl}e_k$ 来表征.

注解3.4.4 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 (m,n)- 矩阵. 由 3.4.2 所确定的映射 $A:K^n\to K^m$ 也可通过下述格式来描述：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_j a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj}x_j\end{pmatrix}.$$

$A(x)\in K^m$ 的第 i 个分量 $\sum_j a_{ij}x_j$ 可用 A 的第 i 行 A^i 与以 x 的分量 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为其元素的 $(n,1)$- 矩阵相乘而得出. 第 j 列 A_j 的元素是向量 $A(e_j)$ 的分量.

例3.4.5

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\0 & 1 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+4x_3\\x_2+8x_3\end{pmatrix}.$$

现在可以把 (m,n) 矩阵看成是 $L(K^n;K^m)$ 中的元素，这样就允许我们能在 $M_K(m,n)$ 上赋以 $L(K^n;K^m)$ 的向量空间结构 (见 3.1.2):

命题3.4.6 $M_K(m,n)$ 是一个 K- 向量空间，其中我们分别用

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij});\qquad \alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$$

定义了加法和数量乘法. 而这些正好就是 $L(K^n;K^m)$ 上的向量空间结构.

证明: 这得自

$$\sum_j a_{ij}x_j+\sum_j b_{ij}x_j=\sum_j(a_{ij}+b_{ij})x_j;$$
$$\alpha\sum_j a_{ij}x_j=\sum_j(\alpha a_{ij})x_j.$$

□

推论3.4.7 由 3.4.3.2, $m\cdot n$ 个元素 $\{E_{kl};1\le k\le m,1\le l\le n\}$ 构成了 $M_K(m,n)$ 的一组基. 称这组基为典范基. 特别地, $\dim M_K(m,n)=m\cdot n$.

证明: 由 E_{kl} 的定义得出 $A=\sum_{k,l}a_{kl}E_{kl}$, 且作为 E_{kl} 的线性组合，A 的这个表示是唯一的. 于是集合 $\{E_{kl};1\le k\le m,1\le l\le n\}$ 是生成系，且为自由的，见 2.3.11.

例3.4.8

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\0 & 1 & 8\end{pmatrix}=1E_{11}+2E_{12}+4E_{13}+0E_{21}+1E_{22}+8E_{23}.$$

定义3.4.9 设V和W是向量空间，且它们相应的基为$D=\{d_1,\cdots,d_n\}$和 $E=\{e_1,\cdots,e_m\}$. 设$\Phi_D:V\to K^n$, $\Phi_E:W\to K^m$是由相应的基所确定的图，见2.5.9. 设$f:V\to W$是一个线性映射. 我们称线性映射

$$\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}:K^n\to K^m$$

为f关于图Φ_D和Φ_E的坐标表示，因为亦可把$\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}\in L(K^n;K^m)$看成是$M_K(m,n)$中的元素，而且可用$D$和$E$去确定$\Phi_D,\Phi_E$, 所以我们也称$\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}$为$f$关于$V$和$W$的相应的基$D$和$E$的矩阵表示.

我们也能以下列方法, 运用对偶基来描述这个矩阵表示.

命题3.4.10 设$f:V\to W$是线性的，D和E分别是V和W的基，E^*是E的对偶基. 运用3.2.5中的配对

$$<\ ,\ >:W^*\times W\to K,$$

则f关于图Φ_D和Φ_E的矩阵表示为

$$\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}=(<f(d_j),e_i^*>).$$

证明: 由3.2.11, $f(d_j)=\sum_i<f(d_j),e_i^*>e_i$.

用$D_0=\Phi_D(D)$记K^n的典范基，用$E_0=\Phi_E(E)$记K^m的典范基. 于是由3.3.8, 对E_0和E的对偶基E_0^*, E^*, 成立关系式${}^t\Phi_E(E_0^*)=E^*$. 矩矩阵$\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}$的系数可由

$$\begin{aligned}<\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}(d_{0j}),e_{0i}^*>&=<f((d_j),{}^t\Phi_E e_{0i}^*>\\&=<f(d_j),e_i^*>\end{aligned}$$

给出. □

定义3.4.11 设 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$, $D'=\{d'_1,\cdots,d'_n\}$ 为 V 的基. 于是称由图 $\Phi_D,\Phi_{D'}$ 所确定的同构

$$T^D_{D'}\equiv\Phi_{D'}\circ\Phi_D^{-1}:K^n\to K^n$$

为坐标变换.

命题3.4.12 设 D,D' 为 V 的基; E,E' 为 W 的基. 在线性映射 $f:V\to W$ 的矩阵表示 $\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}$ 和 $\Phi_{E'}\circ f\circ\Phi_{D'}^{-1}$ 之间存在着关系

$$\Phi_{E'}\circ f\circ\Phi_{D'}^{-1}=S^E_{E'}\circ(\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1})\circ(T^D_{D'})^{-1},$$

这里

$$S^E_{E'}=\Phi_{E'}\circ\Phi_E^{-1},\qquad T^D_{D'}=\Phi_{D'}\circ\Phi_D^{-1}$$

是在3.4.11中所定义的坐标变换.

证明: 运用映射的复合法则. □

例3.4.13 $V=K^3$, $W=K^2$. 设 $D=\{d_1,d_2,d_3\}$ 为 V 的典范基, $D'=\{d'_1=d_1,d'_2=d_1+d_2,d'_3=d_1+d_2+d_3\}$. 于是

$$\Phi_{D'}\circ\Phi_D^{-1}=\Phi_{D'}\circ\mathrm{id}_{K^3}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$(\Phi_{D'}\circ\Phi_D^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

设 $E=\{e_1,e_2\}$ 是 W 的典范基, $E'=\{e'_1=-e_2,e'_2=e_1\}$. 于是

$$\Phi_{E'}\circ\Phi_E^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

考察线性映射

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&2\end{pmatrix}:V=K^3\to W=K^2,$$

于是这个映射关于基 D', E' 的坐标表示 A' 为

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.5 矩阵乘积

类似于 $L(K^n; K^m)$ 中的加法，我们在3.4中给出了矩阵的加法. 现在我们来看如何用线性映射的复合来给出矩阵的乘积.

定义3.5.1 对 $B = (b_{ij}) \in M_K(l, m)$ 和 $A = (a_{jk}) \in M_K(m, n)$, 定义乘积 BA 为矩阵 $C = (c_{ik}) \in M_K(l, n)$, 其中

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}.$$

注: 运用矩阵的块写方式，矩阵乘积可表为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & & b_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_j b_{1j} a_{j1} & \cdots & \sum_j b_{1j} a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_j b_{lj} a_{j1} & & \sum_j b_{lj} a_{jn} \end{pmatrix}.$$

例3.5.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 & 2 \\ 4 & 0 & 84 & 7 \end{pmatrix}.$$

对照于3.4.6, 我们有

命题3.5.3 若把(m,n)-矩阵$A=(a_{jk})$看成线性映射$A: K^n\to K^m$, 把(l,m)-矩阵$B=(b_{ij})$看成线性映射$B:K^m\to K^l$. 则乘积BA便是A和B的复合$B\circ A:K^n\to K^l$.

证明: 用$\{x_k\}$记K^n中的一个元素, 用$\{y_j\}$记K^m中的一个元素, 用$\{z_i\}$记K^l中的一个元素. 则映射A,B可用

$$\{x_k\}\mapsto\{y_j=\sum_k a_{jk}x_k\},\quad \{y_j\}\mapsto\{z_i=\sum_j b_{ij}y_j\}$$

给出. 于是$B\circ A$可用

$$\{x_k\}\mapsto\left\{\sum_j b_{ij}\left(\sum_k a_{jk}x_k\right)=\sum_k\left(\sum_j b_{ij}a_{jk}\right)x_k\right\},$$

给出, 这里$\sum_j b_{ij}a_{jk}$正好是BA中的元素c_{ik}. □

例3.5.4 1. 我们现在能够把3.4.2中的线性映射$A: x\in K^n\mapsto A(x)\in K^m$视为矩阵乘积$A\ {}^tx$, 这里${}^tx$是$(n,1)$-矩阵, 其元素为$x_j$, $1\le j\le n$.

2. 按照3.4.10, 线性形式$x^*\in(K^n)^*=L(K^n;K)$对应于一个$(1,n)$-矩阵, 其元素为$<x^*(d_j),e_1^*>$, 这里$\{d_1,\cdots,d_n\}$为K^n的典范基, e_1^*为K^*的典范对偶基, 它把$y_1\in K$变至$y_1\in K$.

于是$<x^*(d_j),e_1^*>=x^*(d_j)=$(简记为)$x_j^*$. 今后将$x^*(x)$写为$\sum_j x_j^*x_j$或

$$(x_1^*\qquad x_n^*)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\sum_j x_j^*x_j).$$

我们从3.1.3中知道$L(V;V)$是一个环. 由此有

定理3.5.5 $M_K(n,n)$和$L(K^n;K^n)$之间的恒同给出了在(n,n)-矩阵的集合上的一个环结构, 环的加法采用矩阵加法,

乘法采用矩阵乘法. 特别地，环 $M_K(n,n)$ 中的单位元素是单位矩阵 E 或 $E_n = (\delta_{ij})$，零元素是0-矩阵 $0 = (0)$.

证明：由3.1.3和3.4.6知道，结论得自3.5.3. 显然， E_n 表示了线性映射 id_{K^n}，而0表示了零映射. □

类似于3.1.4.4, 我们现在来给出如下的定义.

定义3.5.6 在 K 上的 (n,n) 矩阵环

$$M_K(n,n) = L(K^n; K^n)$$

中，乘法可逆矩阵的集合在矩阵乘法下构成了一个群. 我们称它为 K 上 n 个变量的一般线性群. 除了用 $GL(K^n)$ 来记它外，我们也把它记为 $GL(n,K)$.

例3.5.7 1. 我们称形如

$$aE = (a\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} a & 0 & & 0 \\ 0 & a & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a \end{pmatrix}$$

的矩阵为数量 (n,n)-矩阵. aE 是可逆的充要条件为 $a \neq 0$.

2. 我们称形如

$$(a_i\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_n \end{pmatrix}.$$

的矩阵为对角 (n,n)-矩阵. $(a_i\delta_{ij})$ 是可逆的充要条件为 $a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \neq 0$. 在此情形下，逆矩阵为 $(a_i^{-1}\delta_{ij})$.

3. 我们把矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为（上）三角矩阵，如果对 $i > j$，有 $a_{ij} = 0$. 于是 A 的形状为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

这样的矩阵是可逆的充要条件为 $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn} \neq 0$. 从下列的命题中可以得出上三角矩阵的特征.

命题3.5.8 设 $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 K^n 的典范基. 记 $E_j = \{e_1, \cdots, e_j\}$. $A \in M_K(n,n)$ 是上三角矩阵的充要条件为

$$[A(E_j)] = A([E_j]) \subset [E_j], \qquad \text{对} j = 1, \cdots, n.$$

上三角矩阵是可逆的充要条件为

$$[A(E_n)] = [E_n] = K^n.$$

在此情形下, 对所有的 j, 有

$$[A(E_j)] = [E_j].$$

证明: 由事实: A 的第 j 列向量是由 $A(e_j)$ 的分量所构成 (见 3.4.2), 人们可以看出 $A([E_j]) \subset [E_j]$ 是等价于 $a_{ij} = 0$, 对 $i > j$. 现设对 $j = 1, \cdots, n$, 有 $A([E_j]) \subset [E_j]$, 于是 A 是可逆的 (即 A 是 K^n 的一个自同构) 等价于对 $j = 1, \cdots, n$, 有 $A([E_j]) = [E_j]$. 对 $j = 1$, 这意味着 $a_{11} \neq 0$. 假设我们已经知道, 对 $j \geq 1$, $A([E_j]) = [E_j]$ 等价于 $a_{11} \cdot \cdots \cdot a_{jj} \neq 0$. 于是对 $j+1$, $[A(E_{j+1})] = [E_{j+1}]$ 等价于

$$[\{e_1, \cdots, e_j, A(e_{j+1})\}] = [\{e_1, \cdots, e_j, e_{j+1}\}] = [E_j].$$

因为 $A(e_{j+1}) = \sum_{i \leq j+1} a_{i,j+1} e_i$, 因而上式等价于 $a_{j+1,j+1} \neq 0$.
□

定义3.5.9 1. 集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的双射的群, 即置换群 Perm $\{1, \cdots, n\}$, 也称为 n 个元素的对称群, 记为 S_n.

2. 对 $\sigma \in S_n$, 定义置换矩阵 $A_\sigma \in M_K(n,n)$ 为

$$A_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

这里 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 K^n 的典范基.

命题3.5.10 映射

$$\sigma\in S_n\mapsto A_\sigma\in M_K(n,n)$$

是群 S_n 到可逆矩阵的群 $GL(n,K)$ 中的一个单射.

特别地, $A_{\sigma^{-1}}=A_\sigma^{-1}$, $A_{\mathrm{id}}=E_n$.

证明: 设 σ,σ' 属于 S_n. $A_{\sigma'\circ\sigma}$ 是用 $A_{\sigma'\circ\sigma}|_E=\{e_i\mapsto e_{\sigma'\circ\sigma(i)}\}$来定义的. 但这正好是映射 $A_\sigma|_E=\{e_i\mapsto e_{\sigma(i)}\}$和 $A_{\sigma'}|_E=\{e_i\mapsto e_{\sigma'(i)}\}$的复合, 即 $A_{\sigma'\circ\sigma}=A_{\sigma'}\circ A_\sigma$. □

例3.5.11 考察元素 $\sigma\in S_3$, 使得 $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=1$. 于是

$$A_\sigma=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

3.6 秩

现在我们要研究一个重要的不变量, 线性映射 f 的秩. 这是一个整数, 对 f 的任意矩阵表示, 我们都能看出这个整数 —— 因而称之为不变量. 今后所有的向量空间都是有限维的.

定义3.6.1 设 $f\in L(V;W)$. 定义 f 的秩为 $\dim\ \mathrm{im}\ f$, 记为 $\mathrm{rg}\ f$,

如果我们把 $A\in M_k(m,n)$ 理解为 $L(K^n;K^m)$ 的元素, 于是也可定义矩阵 A 的秩 $\mathrm{rg}\ A$.

注解3.6.2 显然, 对 $f\in L(V;W)$, $\mathrm{rg}\ f\leq\ \dim W$, 且对 $A\in M_k(m,n)$, $\mathrm{rg}\ A\leq m$.

命题3.6.3 设 D,E 分别为 V 和 W 的基, 设 $f\in L(V;W)$. 于是有

$$\mathrm{rg}\ f=\ \mathrm{rg}\ (\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}).$$

证明: 注意, Φ_E和Φ_D^{-1}为同构. □

下述结果表明, 在f的所有可能的坐标表示中存在着一个特别简单的坐标表示.

定理3.6.4 设$f \in L(V;W)$的秩等于r. 于是存在V的基$D = \{d_1, \cdots, d_n\}$和W的基$E = \{e_1, \cdots, e_n\}$, 使得

$$\Phi_E \circ f \circ \Phi_D^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array}$$
$$\qquad\qquad\qquad r \qquad\quad n-r$$

这里E_r为(r,r)单位矩阵.

证明: 选取$U = \ker f$在V中的一个补U'. 按照2.6.5, $f|_{U'}: U' \to \mathrm{im}\ f$是一个同构. 设$\{e_1, \cdots, e_r\}$是$\mathrm{im}\ f$的基. 设$(f|_{U'})^{-1}(e_i) = d_i$. $\{d_1, \cdots, d_r\}$是U'的一组基. 用$\ker f$中的元素来补充这组基, 使之成为V的一组基D. 把$\{e_1, \cdots, e_r\}$补充成W的一组基E. 于是

$$f(d_j) = e_j, \quad 对 1 \le j \le r; \qquad f(d_j) = 0, \quad 对 j > r.$$

□

推论3.6.5 设$A \in M_K(m,n)$, $\mathrm{rg}\ A = r$. 于是存在$S \in GL(m,K)$和$T \in GL(n,K)$, 使得

$$SAT^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明: 把A解释成$f \in L(K^n;K^m)$. 3.6.4中的Φ_E, Φ_D分别是K^m和K^n的可逆的线性变换, 于是能形成$S \in GL(m,K)$和$T \in GL(n,K)$. □

命题3.6.6 在集合$M_K(m,n)$上可利用下述性质来定义相似关系$A \sim B$: 存在$S \in GL(m,K)$和$T \in GL(n,K)$, 使得$B = SAT^{-1}$. 我们断言: 这是一个等价关系.

证明: 我们来验证1.4.1中的公理1, 2, 3:

1. 只要取$S = E_m$, $T = E_n$, 于是$A \sim A$成立.
2. $B = SAT^{-1}$蕴含$A = S^{-1}BT$.
3. $B = SAT^{-1}$和$C = UBV^{-1}$蕴含$C = (US)A(VT)^{-1}$. □

定理3.6.7 $M_K(m,n)$中的两个矩阵A和B是相似的充要条件为 $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ B \in \{0,\cdots,\min(m,n)\}$. 于是在$M_K(m,n)$中存在着$\min(m,n)+1$个相似类.

注: 3.6.7是一个所谓分类定理: 对每个陪集, 我们可通过标明其一个元素来特征该等价关系的陪集. 在我们的情形下, 这种元素是3.6.5中的矩阵, 且E_r是在其"左上角". 这些矩阵是用数r来特征的.

我们以后还要对其他不同的等价关系, 证明进一步的分类定理.

3.6.7的证明: 由$B = SAT^{-1}$可推出 $\mathrm{rg}\ B = \mathrm{rg}\ A$, 见3.6.3.

反之, 由 $\mathrm{rg}\ B = \mathrm{rg}\ A = r$得出: B及A相似于3.6.5中的矩阵. □

在 3.3.1及 3.3.2中, 我们对$f \in L(V;W)$导入了转置映射${}^tf \in L(W^*;V^*)$. 于是, 特别对$A \in M_K(m,n)$, 当将其视为$L(K^n;K^m)$的元素, 就可定义转置矩阵${}^tA$. 我们证明:

命题3.6.8 设$A = (a_{ij}) \in M_K(m,n)$. 于是转置矩阵${}^tA$的元素${}^ta_{ij}$可用$a_{ji}$来给出, 其中$1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

证明: 设D和E分别是K^n和K^m的典范基, 设D^*和E^*分别是$(K^n)^*$和$(K^m)^*$的对偶基. 由3.2.10, $(K^n)^{**}$典范同构于K^n, $(K^m)^{**}$典范同构于K^m, 且$D^{**} = D$, $E^{**} = E$. 由此我们

发现，对矩阵 ${}^tA:(K^m)^*\to(K^n)^*$ 的元素 ${}^ta_{ij}$，按照3.4.10，有

$$\begin{aligned}< d_i^{**}, {}^tA(e_j^*) > &=< d_i, {}^tA(e_j^*) > \\ &=< A(d_i), e_j^* >= a_{ji}.\end{aligned}$$

□

注：于是可通过"对主对角线的镜射"，从 A 的 (m,n) 格式得出 ${}^tA$ 的 (n,m) 格式：

$${}^t\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{m1} \\ \cdots & & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

例3.6.9

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

系3.6.10 设 $A\in M_K(m,n)$，$B\in M_K(l,m)$. 于是有 ${}^t(BA)={}^tA{}^tB$.

证明：这可得自3.3.5，这时我们把 $A:K^n\to K^m$ 和 $B:K^m\to K^l$ 分别解释为线性映射，把 ${}^tA:(K^m)^*=K^m\to(K^n)^*=K^n$ 和 ${}^tB:(K^l)^*=K^l\to(K^m)^*=K^m$ 解释为转置映射. □

在3.4.9中我们定义了线性映射 $f:V\to W$. 它关于 V 的基 D 和 W 的基 E 的矩阵表示为 $\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1}$. 现在我们把它与 ${}^tf:W^*\to V^*$ 关于图 $\Phi_{E^*}:W^*\to K^m$ 和 $\Phi_{D^*}:V^*\to K^n$ 的矩矩阵表示作比较：

引理3.6.11 利用上述记号，有

$${}^t(\Phi_E\circ f\circ\Phi_D^{-1})=\Phi_{D^*}\circ{}^tf\circ\Phi_{E^*}^{-1}.$$

证明: 按照 3.3.8, $\Phi_{D^*} = {}^t\Phi_D^{-1}$, $\Phi_{E^*} = {}^t\Phi_E^{-1}$, 这里我们已经把 $(K^n)^*$ 典范地恒同于 K^n, 把 K^{m*} 典范地恒同于 K^m, 这是可以通过典范基来实现的. 于是

$$
{}^t(\Phi_E \circ f \circ \Phi_D^{-1}) = {}^t\Phi_D^{-1} \circ {}^tf \circ {}^t\Phi_E = \Phi_{D^*} \circ {}^tf \circ \Phi_{E^*}^{-1}.
$$

□

定理3.6.12 rg $A =$ rg ${}^tA$.

注: 可把 rg A 看成是由 (作为 K^m 中的元的) 列向量所生成的 K^m 的子空间的维数.

${}^tA$ 的列向量正好是 A 的行向量, 它可作为 K^n 中的元, 于是今后能用词 “列秩=行秩” 来表出 3.6.12.

证明: 设 rg $A = r$. 由 3.6.5, 存在 S 和 T, 使得

$$
SAT^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

于是由 3.6.10,

$$
{}^t(SAT^{-1}) = {}^tT^{-1}\ {}^tA\ {}^tS = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

于是由 3.6.7 可以得出, rg ${}^tA = r$.

习题

1. 设 K 为一个域, 考察 K^2, 它有典范基 $E = \{e_1, e_2\}$.

(a) 证明: 对每个 $\rho \in K$, $B = \{b_1 = e_1 + \rho e_2, b_2 = e_2\}$ 是一组基.

(b) 确定对偶基 $B^* = \{b_1^*, b_2^*\}$ 的元素.

(提示: 设 $b_1^* = \alpha e_1^* + \beta e_2^*$, $b_2^* = \gamma e_1^* + \delta e_2^*$, 并且再利用 $< b_j, b_i^* >=< e_j, e_i^* >= \delta_{ij}$.)

2. 设p是一个素数， $\mathbf{Z}_p$是具有p个元素的域， $V=\mathbf{Z}_p^2$.

(a) $L(V;V)$有多少元素？

(b) $GL(V)$有多少元素？

(提示： $f\in L(V;V)$是用矩阵$(a_{ij})_{i,j=1,2}$来确定的，这里$f(e_i)=\sum_j a_{ij}e_j$.)

3. 确定由序列$(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$所构成的向量空间V的对偶空间，这里$x_i\in K$, 且对几乎所有的$i\in\mathbf{N}$, 有$x_i=0$.

(提示：注意，只需确定在V的自然基$\{e_i, i\in\mathbf{N}\}$上的线性形式， $e_i(n)=\delta_{in}$.)

4. 设有$\mathbf{Z}_{11}$上的矩阵A_i, $1\leq i\leq 4$,

$$A_1=\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{9} & \bar{3}\\ -\bar{2} & \bar{8} & \bar{9} & \bar{0} & \bar{2}\\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{5} & -\bar{3} & -\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}\bar{3} & -\bar{3} & \bar{9} & \bar{4}\\ \bar{2} & \bar{4} & -\bar{9} & \bar{3}\\ \bar{1} & \bar{8} & -\bar{8} & \bar{9}\\ \bar{0} & \bar{7} & -\bar{1} & \bar{5}\\ \bar{9} & \bar{6} & \bar{2} & \bar{7}\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}\bar{9} & \overline{10} & -\bar{1}\\ \bar{2} & \bar{7} & \bar{6}\\ \bar{2} & -\bar{3} & -\bar{1}\\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{3}\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}\bar{4} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1}\\ \bar{0} & -\bar{1} & -\bar{2} & -\bar{3}\\ -\bar{4} & -\bar{5} & -\bar{6} & -\bar{7}\\ -\bar{8} & -\bar{9} & -\overline{10} & \bar{0}\end{pmatrix}.$$

试对所有满足$1\leq i,j\leq 4$的i,j, 确定出能够相乘的乘积A_iA_j.

5. 设$E_{kl}\in M(n,n)$为(n,n)-矩阵，除了元素$a_{kl}=1$外，其他元素为0(即$E_{kl}=(a_{ij})$, 其中$a_{ij}=\delta_{ik}\delta_{jl}$, $1\leq k,l\leq n$). 试确定乘积$E_{kl}E_{k'l'}$.

6. 设有(2,2)-矩阵$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, 其中$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$. 试确定(2,2)-矩阵$B=(b_{ij})$, 使得$AB=BA=E=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. 设 $A=(a_{ij})$ 为一个 (n,n)-矩阵，对 $i\leq j$，有 $a_{ij}=0$. 证明： $A^n=0$, 这里 $A^n=AA\cdots A$ (乘 n 次).

8. 证明：映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}: M_k(n,n) &\longrightarrow K\\ (a_{ij}) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\end{aligned}$$

是线性的，且有 $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$. (称 $\mathrm{Tr}(A)$ 为 A 的迹).

9. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & a & 1\end{pmatrix}\in M_{\mathbf{R}}(4,4).$$

试确定 $a\in\mathbf{R}$, 使得 A 不是可逆的.

10. 设 $f:V=\mathbf{R}^2\to W=\mathbf{R}^2$, $f(x,y)=(x+3y,3x+y)$ 是一个线性映射. $D=\{d_1=(1,0),d_2=(0,1)\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的标准基, $D'=\{d_1'=(1,1),d_2'=(1,-1)\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的另一组基. 试确定 f 关于

(a) V 的基 D 和 W 的基 D

(b) V 的基 D' 和 W 的基 D'

(c) V 的基 D' 和 W 的基 D

的矩阵形式.

第 4 章

线性方程和行列式

4.1 线性方程组

我们现在来讨论线性代数的一个特别重要的内容. 这里的整套理论有其历史上的起源.

定义4.1.1 1. 所谓一个具有m个方程及n个未知量的线性方程组 (简记为: (m,n)- 线性方程组) 是指形如

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \le i \le m$$

的一个格式, 这里a_{ij}和b_i是域K中的元素. 如果我们用(a_{ij})表示(m,n)-矩阵A, 用(x_j)表示向量$x \in K^n$和用(b_i)表示向量$b \in K^m$, 则我们也能像3.4.4那样, 把它写成

$$A(x) = b$$

或

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

2. 所谓$A(x) = b$的一个解是指一个元素$a \in K^n$, 使得$A(a) = b$.

例4.1.2

$$3x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 1,$$

$$0x_1 + 7x_2 - 1x_3 = 0.$$

$a=(-1,1,7)$是解.

注解4.1.3 注意，在4.1.1中，$x=(x_1,\cdots,x_n)$是作为记号出现的. 正如我们即将要看到的那样，这并不总是意味着方程组应该给出一个解. 尽管这样，我们还是常常用x表示一个解.

因为能把一个(m,n)-矩阵A解释成线性映射$A:K^n\to K^m$，于是给出了一个线性方程组就相当于给出了一个线性映射$A:K^n\to K^m$及一个向量$b\in K^m$. 解x不是别的，而是一个元素$x\in K^n$，使得它在A下被映至元素b.

线性方程组的基本定理是:

定理4.1.4 设$A(x)=b$是一个(m,n)-线性方程组.

1. 存在性. 方程组有解的充要条件是$b\in \text{im } A$. 因此这等价于 $\text{rg } A=\text{rg } (A,{}^tb)$. 这里记$(A,{}^tb)$为一个$(m,n+1)$-矩阵，它是用$(m,1)$-矩阵${}^tb$将$(m,n)$-矩阵$A$向右扩张出一列而形成的.

2. 唯一性. 设$x\in K^n$是一个解. 它是唯一解的充要条件是$\ker A=0$或 $\text{rg } A=n$.

证明: 1. $x\in K^n$是解 $\iff A(x)=b \iff b\in \text{im } A$(视$A$为$L(K^n;K^m)$中的元素).

可将$(A,{}^tb)$视为$L(K^{n+1};K^m)$中的元素. 于是

$$\begin{aligned}\text{rg } (A,{}^tb)=\dim \text{im } (A,{}^tb)=\dim \text{im } A=\text{rg } A\\ \iff b\in \text{im } A.\end{aligned}$$

2. 设$y\in\ker A$. 如x是解，则$x+y$也是解，这是因为$A(x+y)=A(x)+A(y)=A(x)+0=b$的缘故. 反过来，如果$x$和$x'$是解，则$x-x'\in\ker A$，这是因为$A(x-x')=A(x)-A(x')=b-b=0$. 于是解的唯一性等价于$\ker A=0$.

由2.6.7得出 $\dim\ker A=0 \iff \dim \text{im } A=\text{rg } A=n$. □

补充4.1.5 $\operatorname{rg} A = m$的充要条件是对每一个$b \in K^m$, $A(x) = b$有解.

证明: $\operatorname{rg} A = m \iff \operatorname{im} A = K^m$. 于是结论可从4.1.4中的1得出. □

例4.1.6 1. $A = (0,1), b = (1)$. $\operatorname{rg}(0,1) = \operatorname{rg}(0,1,1) = 1$. 于是存在一个解, 譬如说, $x_1 = 0, x_2 = 1$. 然而, 解并不是唯一的, 这是因为对每一个$x_1 \in K$, $(x_1, 1)$也是解.

2. $x_1 + 2x_2 = 1, \quad 2x_1 + 4x_2 = 0$.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1, \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

于是它无解.

当方程组中方程的个数与未知量的个数相同时, 4.1.4, 4.1.5 有如下的陈述:

定理4.1.7 设A是一个(n,n)-矩阵. $\operatorname{rg} A = n$的充要条件是对每一个$b \in K^n$, (n,n)-线性方程组$A(x) = b$有唯一确定的解.

证明: 按照4.1.4.2, 唯一性等价于 $\operatorname{rg} A = n$, 又由4.1.5, 这等价于对每一个$b \in K^n$, 有解. □

注解4.1.8 对一个(n,n)-线性方程组$A(x) = b$, $\operatorname{rg} A = n$等价于$A : K^n \to K^n$是一个同构. 这是因为由2.6.7, $\operatorname{rg} A = n$或者$\operatorname{im} A = K^n$意味着 $\dim \ker A = 0$. 显然对$b \in K^n$, 元素$A^{-1}(b)$是$A(x) = b$的唯一确定的解.

定义4.1.9 1. 称形如$A(x) = 0$的线性方程组为齐次线性方程组.

2. 设$A(x) = b$是任意的一个线性方程组. 于是称$A(x) = 0$为相应的齐次线性方程组.

引理4.1.10 齐次线性方程组$A(x) = 0$总有一个解, 即$x = 0$. 方程组有唯一解的充要条件是$\ker A = 0$.

证明: $A(x)=0 \iff x\in \ker A$. □

定理4.1.11 设$A(x)=b$是一个(m,n)-线性方程组. 当x_0是解时, 则每个$x=x_0+y$也是解, 其中y是齐次线性方程组$A(x)=0$的解. 而且$A(x)=b$的每个解x都能表示成这种形状.

注解4.1.12 当$A(x)=b$的解写成形式$x=x_0+y$, 其中x_0是特选的固定解, 则亦称x_0为特解, $x=x_0+y$为通解.

证明: 由$A(x_0)=b$及$y\in \ker A$可得出$A(x_0+y)=A(x_0)+0=b$.

由$A(x_0)=A(x)=b$得出$A(x-x_0)=A(x)-A(x_0)=0$, 于是$x=x_0+(x-x_0)$, 且$A(x-x_0)=0$. □

例4.1.13

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &+6x_3+\ x_4=3,\\ 2x_1+\ x_2&+4x_3+2x_4=1,\\ 3x_1+4x_2&+2x_3 \quad\quad\ =2, \end{aligned}$$

且$K=\mathbf{Q}$.

$x_0=(-4,3,1,1)$是特解. 相应的齐次方程组的解y可表为$y=(-34a,24a,3a,16a)$, 这里$a\in\mathbf{Q}$为任意的. $x=(-4-34a,3+24a,1+3a,1+16a)$是通解, 其中$a\in\mathbf{Q}$是任意的.

4.2 Gauss消去法

在本节中我们要描述一种计算方法, 用它能寻找线性方程组的解.

定义4.2.1 称两个(m,n)- 线性方程组

$$A(x)=b \qquad 和 \qquad A'(x)=b'$$

是等价的，如果存在一个 $S \in GL(m, K)$，使得 $A' = SA$，$b' = S(b)$.

命题4.2.2 1. 在4.2.1中定义的关系是在1.4.1的意义下的一种等价关系.

2. 两个等价方程组的解集是相同的.

证明: 1. 线性方程组与其自身是等价的. 由 $A' = SA$，$b' = S(b)$ 可得出 $A = S^{-1}A'$，$b = S^{-1}(b')$. 由 $A' = SA, A'' = S'A', b' = S(b), b'' = S'(b')$ 可得出 $A'' = S'SA, b'' = S'S(b)$.

2. $A(x) = b \iff SA(x) = S(b)$. □

命题4.2.3 对 $i \neq j$ 及 $a \in K$，定义 (m, m)-矩矩阵 $B_{ij}(a)$ 为 $E + aE_{ij}$，这里 E_{ij} 与3.4.3中相同. 则有 $B_{ij}(a) \in GL(m, K)$.

设 $A(x) = b$ 是一个 (m, n)-线性方程组. 我们把 A 的第 j 行的 a 倍加到 A 的第 i 行，把 b 的第 j 行的 a 倍加到 b 的第 i 行，就得到了等价的方程组 $A'(x) = b'$，这里 $A' = B_{ij}(a)A, b' = B_{ij}(a)b$. 这里所做的都在4.1.1的格式之中.

证明: 由矩阵乘法3.5.1立即得出 $B_{ij}(a)B_{ij}(-a) = E =$ 单位矩阵. 对 $A' = B_{ij}(a)A$ 所做描述的论证是简单的. □

引理4.2.4 (m, n)- 线性方程组 $A(x) = b$ 可以等价于一个以行阶梯形式出现的线性方程组 $A^*(x) = b^*$. 即 A^* 中的元素 a^*_{ij} 具有下列性质：存在 r 个整数 $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq r$，$r = \text{rg } A$，使得对 $j < j_1$ 或者 $i > r$，有 $a^*_{ij} = 0$，而且 $a^*_{1j_1} \cdot \cdots \cdot a^*_{rj_r} \neq 0$.

A^* 是用形如 4.2.3中的 $B_{ij}(a)$ 的矩阵左乘 A 多次而得到的.

注: 矩阵在行阶梯形式中的格式具有下列形状:

$$\begin{pmatrix} 0 & a^*_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a^*_{2j_2} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^*_{rj_r} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这里位于“阶梯”左边的元素全为零.

证明: 对于零矩阵, 结论显然是成立的. 于是我们能假设存在着首次出现的一列$(a_{ij_1}, 1 \leq i \leq m)$, 它不全是零. 让它与一个形如$B_{1j}(1)$的适当的矩阵相乘后可得出一个与之等价的矩阵$A'$, 且$a'_{1j_1} \neq 0$. 再通过与矩阵$B_{i1}\left(\frac{-a'_{ij_1}}{a'_{1j_1}}\right)$, $2 \leq i \leq m$, 相乘, 我们得到了一个矩阵A'', 使得对$i > 1$, 有$a''_{ij_1} = 0$. 再把A''改写为A. 存在$j > j_1$, 使得在列A_j中有元$a_{ij} \neq 0$, 这里$i > 1$. 设j是具有此性质的最小整数. 如上面所述的那样, 在乘以适当的$B_{2j}(1)$后所得到的矩阵A'中, 有$a'_{2j_2} \neq 0$. 再乘以矩阵$B_{i2}\left(\frac{-a'_{ij_2}}{a'_{2j_2}}\right)$, $3 \leq i \leq m$, 我们就得到了一个矩阵A'', 使得对$i > 2$, 有$a''_{ij_2} = 0$.

我们可按此进行, 最终达到所希望的行阶梯形矩阵A^*. 因为A^*的行秩$= r$, 及 $\mathrm{rg}\ A^* = \mathrm{rg}\ A$, 所以得到$r = \mathrm{rg}\ A$.

现在我们来描述一种入门的计算方法, 称为 Gauss 消去法.

定理4.2.5 设$A(x) = b$是一个(m,n)-线性方程组, 其中 $\mathrm{rg}\ A = r$. 设$A^*(x) = b^*$是与其等价的行阶梯形的(m,n)-线性方程组.

$A(x) = b$有解的充要条件是向量b^*的对$i > r$的分量b^*_i为零. 当此条件满足时, 我们可如下地找到解的全体: 对$j \notin \{j_1, \cdots, j_r\}$, 可任选$x_j$, 且从$A^*(x) = b^*$的第$r$行

$$a^*_{rj_r} x_{j_r} + \text{其它项} = b^*_r$$

中确定出元素x_{jr}. 于是由第$(r-1)$行

$$a_{r-1j_{r-1}} x_{j_{r-1}} + \text{其它项} = b^*_{r-1}$$

中确定出元素$x_{j_{r-1}}$, 依次类推.

证明: $b^* \in \operatorname{im} A^*$ 等价于 $b_i^* = 0$, 对 $i > r$. 如这条件满足，则给出了所描述的求解方法. 它是 $A^*(x) = b^*$, 因而也是 $A(x) = b$ 的所有解. 这是因为解中的元素 $x_{j_r}, \cdots, x_{j_1}$ 可以用 x_j, $j \notin \{j_1, \cdots, j_r\}$ 及 b_i^*, $1 \le i \le r$ 描述出来. □

例 4.2.6 我们对例 4.1.13 应用 Gauss 消去法求解.

因为 $a_{11} = 1$, 于是我们能由此开始，把第一列中的其它元素变成零. 与 $B_{21}(-2)$ 和 $B_{31}(-3)$ 相乘后，可得出方程组

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 6x_3 + \ x_4 &= \ 3, \\ x_2 - \ 8x_3 \qquad\quad &= -5, \\ 4x_2 - 16x_3 - 3x_4 &= -7. \end{aligned}$$

因为这里元素 $a'_{22} = 1 \neq 0$, 所以与 $B_{32}(-4)$ 相乘后得出行阶梯形式

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \ 6x_3 + \ x_4 &= 3, \\ x_2 - \ 8x_3 \qquad\quad &= -5, \\ 16x_3 - 3x_4 &= 13. \end{aligned}$$

于是通解是

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{13}{16} + \frac{3x_4}{16}, \\ x_2 &= -5 + \frac{13}{2} + \frac{3x_4}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3x_4}{2}, \\ x_1 &= 3 - \frac{39}{8} - \frac{9x_4}{8} - x_4 = -\frac{15}{8} - \frac{17x_4}{8}. \end{aligned}$$

4.3 对称群

我们现在来进一步研究在 3.5.9 中已引入的对称群 S_n 的结构. 我们用一个点来标记 S_n 中的连接关系:

$$(\sigma, \sigma') \in S_n \mapsto \sigma \cdot \sigma' \in S_n.$$

我们从一个关于一般的 (也不一定是交换的) 环 R 的命题来开始进行讨论.

引理4.3.1 设 R 是一个环, R^* 是 R 中可逆元的乘法群. 在 R 上定义关系 "x 共轭于 x'" (记为 $x \sim x'$) 如下: 存在 $a \in R^*$, 使得 $x' = axa^{-1}$. 于是这给出了一个等价关系.

对群 G, 也可同样地定义 $x \sim x'$: 存在 $a \in G$, 使得 $x' = axa^{-1}$.

证明: 取 $a = 1$, 则有 $x \sim x$. 由 $x' = axa^{-1}$ 可得出 $x = a^{-1}x'(a^{-1})^{-1}$. 由 $x' = axa^{-1}$, $x'' = a'x'a'^{-1}$ 可推出 $x'' = (a'a)x(a'a)^{-1}$. □

例4.3.2 设 R 是环 $M_K(n,n)$, 则 $R^* = GL(n,K)$.

定义4.3.3 称元素 $\sigma \in S_n$ 为 ($\{1,\cdots,n\}$ 中关于元素 i 和 j) 对换, 如果对 $i \neq j$, 有 $\sigma(i) = j$ 及 $\sigma(j) = i$, 而且对所有其他的 $k \in \{1,\cdots,n\}$, 有 $\sigma(k) = k$. 我们记 S_n 中的这个元素为 (i,j).

注: 对 $S_1 = \text{id}$, 不存在对换. $S_2 = \{\text{id}, (1,2)\}$.

命题4.3.4 1. S_n 的阶 (即 S_n 中元素的个数) 为 $n!$.

2. 对 $n \geq 3$, S_n 不是交换的.

3. $(i,j) \cdot (i,j) = \text{id} = S_n$ 中的中性元.

4. 每一个对换 (i,j) 均共轭于对换 $(1,2)$.

证明: 对1.: S_1 中元素的个数 $\#S_1 = 1$. 假设我们已经证明了 $\#S_{n-1} = (n-1)!$. 对 $\{1,\cdots,n\}$ 中的 n 个元素中的每一个元素 i, 集合 $A_i = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i\}$ 构成了一个同构于 S_{n-1} 的子群. 对每一个 $\sigma \in S_n$, 可用下面的方法将它一一对应于 i 及一个 $\sigma_i \in A_i$:

当 $\sigma(n) \neq n$, 则取 $i = \sigma(n)$, $\sigma_i = (\sigma(n), n) \cdot \sigma \in A_{\sigma(n)}$.

当 $\sigma(n) = n$, 则取 $i = n$, $\sigma_i = \sigma \in A_n$.

于是有 $\#S_n = n \cdot (n-1)! = n!$.

对2.: 见例1.2.4.3, 且注意对 $n \geq 3$, S_n 包含一个与 S_3 同

构的子群.

对3.: 这是显然的.

对4.: 设$\tau=(i,j)$. 存在$\sigma\in S_n$, 使得$\sigma(1)=i$, $\sigma(2)=j$. 注意, $\sigma\cdot\sigma'$被定义为$\sigma'\circ\sigma$. 于是$\sigma\cdot\tau\cdot\sigma^{-1}=(1,2)$. 这是因为$\sigma\cdot\tau\cdot\sigma^{-1}(2)=\tau\cdot\sigma^{-1}(j)=\sigma^{-1}(i)=1$. 同样可得$\sigma\cdot\tau\cdot\sigma^{-1}(1)=2$. 对$k\notin 1,2$, $\sigma(k)\notin\{i,j\}$, 于是$\sigma\cdot\tau\cdot\sigma^{-1}(k)=k$. □

引理4.3.5 每个置换$\sigma\in S_n$ $(n\geq 2)$可表为个数$\leq n$的对换的乘积. 对$\sigma\neq\mathrm{id}$, 只需$\leq n-1$次对换.

证明: 对$\sigma=\mathrm{id}$, 有$\sigma=(1,2)\cdot(1,2)$. 设$\sigma\neq\mathrm{id}$, 于是存在一个最小的i_1, 使得$\sigma(i_1)=j_1\neq i_1$. 令$\sigma\cdot(i_1,j_1)=\sigma_1$. 对$i\leq i_1$, 有$\sigma_1(i)=i$. 当$\sigma_1=\mathrm{id}$时, 我们已证得. 否则就存在一个最小的$i_2$, 使得$\sigma_1(i_2)=j_2\neq i_2$. 令$\sigma_1\cdot(i_2,j_2)=\sigma_2$. 对$i\leq i_2$, 有$\sigma_2(i)=i$. 于是一直这样做下去, 总能得到一个$\sigma_k$, $k\leq n-1$, 使得对 $i<n$, 有 $\sigma_k(i)=i$. 于是$\sigma_k=\mathrm{id}$. 于是$\sigma=(i_k,j_k)\cdot\cdots\cdot(i_1,j_1)$. □

定义4.3.6 设$\sigma\in S_n$, $n\geq 2$. 称偶(i,j), $1\leq i<j\leq n$, 是σ的逆置, 如果$\sigma(i)>\sigma(j)$. 定义σ的符号为

$$\varepsilon(\sigma)=\prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\in\{+1,-1\}.$$

根据$\varepsilon(\sigma)=+1$或-1, 我们称σ为偶置换或奇置换. 对$n=1$, 令$\varepsilon(\sigma)=1$.

注: 根据分母中有$(j-i)$时, 分子中出现$-(j-i)$还是$+(j-i)$, 可确定$\varepsilon(\sigma)=+1$或-1.

对(l,k), 虽然有$\sigma(l)=j,\sigma(k)=i$, 但还要看(l,k)是否是逆置的. 特别地, $\varepsilon(\sigma)=(-1)^l$, 这里$l$为$\sigma$的逆置的总数.

命题4.3.7 设$n\geq 2$.

1. 映射

$$\varepsilon:\sigma\in S_n\mapsto\varepsilon(\sigma)\in\{+1,-1\}$$

是到乘法群$\{+1,-1\}\subset \mathbf{Z}$上的一个群同态.

2. 当σ被表为k个对换的乘积时，$\varepsilon(\sigma)=(-1)^k$.

注：在4.3.5中我们指出，每个$\sigma\in S_n$可被表为对换的乘积. 在这样一个表示中，元素的个数k不是唯一确定的. 例如，我们可以在已有的乘积上再增加两个对换$(1,2)\cdot(1,2)$. 但是这个数目在模2下是唯一的.

4.3.7的证明：对1.：

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma'\cdot\sigma)&=\prod_{i<j}\frac{\sigma(\sigma'(j))-\sigma(\sigma'(i))}{j-i}\\&=\prod_{i<j}\frac{\sigma(\sigma'(j))-\sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j)-\sigma'(i)}\cdot\prod_{i<j}\frac{\sigma'(j)-\sigma'(i)}{j-i}.\end{aligned}$$

第二个乘积是等于$\varepsilon(\sigma')$. 为了看出第一个乘积是等于$\varepsilon(\sigma)$，我们注意

$$\frac{\sigma(\sigma'(j))-\sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j)-\sigma'(i)}=\frac{\sigma(\sigma'(i))-\sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i)-\sigma'(j)}.$$

于是我们能把第一个乘积中的$\prod_{i<j}$换写成$\prod_{\sigma'(i)<\sigma'(j)}$.

对2.：由1.，我们只需证明：对一个对换$\tau=(k,l)$，这里$k<l$，有$\varepsilon(\tau)=-1$. (k,l)是τ的逆置. 对$k<i<l$，(k,i)和(i,l)同时为逆置. 于是τ的逆置的数目是奇数. □

例4.3.8 我们把$\sigma\in S_4$写成形如

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},$$

这里，在上面一行的i下面置放了象$\sigma(i)$. 利用4.3.5的证明中的记号，我们有

$$\sigma_1=\sigma\cdot(1,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cdot (2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{id} .$$

于是$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((2,4)) \cdot \varepsilon((1,2)) = (-1)(-1) = 1$. 也可直接从$\varepsilon(\sigma)$的定义中得到:

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{1-2}{4-1} \cdot \frac{1-4}{4-2} \cdot \frac{1-3}{4-3} \cdot \frac{3-4}{3-2} \cdot \frac{3-2}{3-1} \cdot \frac{4-2}{2-1} = 1.$$

定义4.3.9 设$n \geq 2$. 我们称偶置换子群$\{\sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma) = 1\}$为交错群$A_n$.

命题4.3.10 A_n是S_n的不变子群，有$S_n/A_n \cong \{1,-1\}$. 可将每个$\sigma \in S_n \backslash A_n$写成$\sigma = \tau \cdot \sigma'$, 这里$\tau$为对换, $\sigma' \in A_n$. A_n的阶数为$\dfrac{n!}{2}$.

证明: 由定义知$A_n = \ker \varepsilon$. 因而我们能应用1.4.12. 注意，对换属于$S_n \backslash A_n$. □

4.4 行列式

现在我们来讨论经典线性代数中的一个重要的概念. K表示一个 (交换) 域或者更一般地是一个带有单位元1的交换环.

定义4.4.1 我们把具有下列性质的映射

$$\det : M_K(n,n) \to K$$

称为行列式映射:

1. det对每一行是线性的.
2. 如两行相同，则$\det A = 0$.
3. $\det E_n = 1$.

称值$\det A \in K$为A的行列式.

注：

1. 目前还不清楚行列式映射是否存在，稍后我们将指出：正好有一个这样的映射存在.

2. 当我们把 $A \in M_K(n,n)$ 的第 i 行记为 A^i，于是 A 就可写成形如

$$\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}.$$

由此， 4.4.1 的条件 1 到 3 可写为：

$$\det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ aA^i + a'A'^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + a' \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A'^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^j = A^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = 1.$$

命题4.4.2 4.4.1 中的映射 det 具有下列更进一步的性

质:

$$\det\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i + aA^j \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}, \quad \text{对} \quad i \neq j. \tag{4.1}$$

$$\det\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}, \quad \text{对} \quad i \neq j. \tag{4.2}$$

证明: 对 (4.1):

$$\det\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i + aA^j \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} \overset{1}{=} \det\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + a\det\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}$$

$$\overset{2}{=} \det\begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + 0.$$

对 (4.2):

$$0 \overset{2}{=} \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i + A^j \\ \vdots \\ A^j + A^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}$$

$$\overset{1}{=} \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^j + A^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^j + A^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}$$

$$\overset{(4.1)}{=} \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^i \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}.$$

□

定理4.4.3 行列式映射可用4.4.1中的条件唯一地确定出来. 如果矩阵A是用其元素 (a_{ij})给出, 则有

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

此公式也称为Leibniz公式.

证明: 将 A 的第 i 行 A^i 写成形如 $A^i = \sum_{k_i} a_{ik_i} e_{k_i}$. 利用 4.4.1.1, 我们有

$$\det A = \sum_{k_1} a_{1k_1} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{k_1} \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k_1, \cdots, k_n} a_{1k_1} \cdot \cdots \cdot a_{nk_n} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{k_1} \\ \vdots \\ e_{k_n} \end{pmatrix}.$$

出现在最后的和式中的许多行列式是多余的, 因为由 4.4.1.2, 只需保留 $(k_1, \cdots, k_n)$ 是 $(1, \cdots, n)$ 的一个置换的那种行列式. 于是我们仅需去证明:

$$\det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma).$$

由于 4.4.1.3, 对 $\sigma = \mathrm{id}$, 这个式子是正确的. 当 σ 是一个对换时, 上式两边均为 -1, 见 4.3.7 及 4.4.2 中的 (4.2). 在一般情形下, σ 是 k 个对换的乘积, 而且有 $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$, 见 4.3.7. 每个对换将行列式的符号改变一次. 于是位于左边的行列式的值是 $(-1)^k$ 乘以 $\sigma = \mathrm{id}$ 时的行列式的值 1. □

例 4.4.4 1. $n = 2$. S_2 是由 id 及 $(1,2)$ 所构成, $\varepsilon(1,2) = -1$. 于是

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}.$$

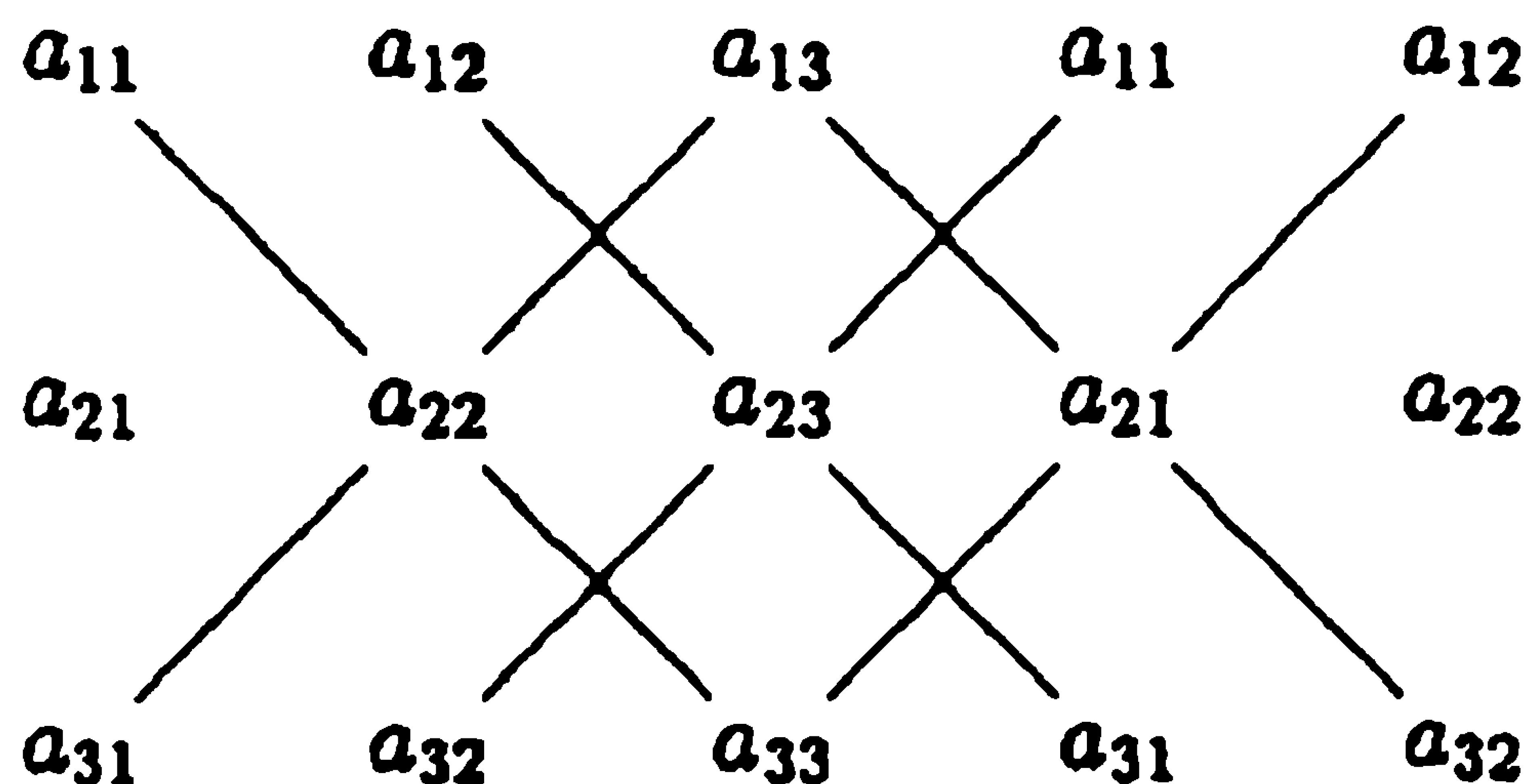
2. $n = 3$. 我们写 $S_3 = A_3 \cup \tau A_3$, 这里 $\tau = (1,2)$. 这里 A_3 由三个元素

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

构成. 于是

$$\det A = \sum_{\sigma \in A_3} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} - \sum_{\sigma \in A_3} a_{1\tau\cdot\sigma(1)} a_{2\tau\cdot\sigma(2)} a_{3\tau\cdot\sigma(3)}.$$

$\det A$的计算也可用Sarrus规则来描述:



人们可作出在 3个↘对角线中的元素的乘积之和, 再减去在3个↙对角线中的元素的乘积.

定理4.4.5 (行列式乘法定理) 设A和B是$M_K(n,n)$中的元素. K是一个具有单位元1的交换环. 于是成立着

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

当我们将det限制在可逆矩阵的乘法群$GL(n,K)$上时, 则$\det : GL(n,K) \to K^*$是一个从$GL(n,K)$到K的乘法可逆元素群K^*上的满射.

证明: 我们如4.4.3的证明那样去做. AB的第i行可写成

$$\sum_{l_i,k_i} a_{il_i} b_{l_i k_i} e_{k_i}.$$

利用 $f_{l_i}=\sum_{k_i} b_{l_ik_i}e_{k_i}$, 我们有

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{l_1,\cdots,l_n} a_{1l_1}\cdot\cdots\cdot a_{nl_n}\cdot\det\begin{pmatrix} f_{l_1}\\ \vdots \\ f_{l_n}\end{pmatrix}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdot\cdots\cdot a_{n\sigma(n)}\cdot\varepsilon(\sigma)\cdot\det\begin{pmatrix} f_{l_1}\\ \vdots \\ f_{l_n}\end{pmatrix}\\ &= \det A\cdot\det B.\end{aligned}$$

□

系4.4.6 当 A 是可逆时，有 $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$. □

同样立即可得出

定理4.4.7 设 $A\in M_K(n,n)$. $\det A\neq 0$ 等价于 A 为可逆的，它又等价于 $\operatorname{rg} A=n$.

证明: 在4.4.3的证明中已指出 $\det A\neq 0$ 等价于 $\operatorname{rg} A=n$. 由4.1.8, 这等价于 A 是可逆的. □

定义4.4.8 称态射 $\det: GL(n,K)\to K^*$ 的核为特殊线性群 $SL(n,K)$.

例4.4.9 1. 在 3.5.9中我们对 $\sigma\in S_n$ 定义了置换矩阵 A_σ. 我们断言: $\det A_\sigma=\varepsilon(\sigma)$, 特别地，当 $\sigma\in A_n$ 时，$A_\sigma\in SL(n,K)$.

因为 $\sigma\in S_n\mapsto A_\sigma\in GL(n,K)$ 和 $\det: GL(n,K)\to K^*$ 是态射，所以由4.3.4及4.3.5, 只需证明：对置换 $\tau=(1,2)$, 有 $\det A_\tau=-1$. 现在注意: A_τ 相应于单位矩阵的前面两行的对换.

2. 对于对角矩阵或一般的三角矩阵 (见3.5.7), 其行列式为对角元的乘积 $a_{11}\cdot\cdots\cdot a_{nn}$. 当此行列式 $=1$ 时，则该矩阵属于 $SL(n,K)$.

引理 4.4.10

$$\det {}^tA = \det A.$$

证明: 因为 ${}^ta_{ij} = a_{ji}$, 所以

$$\begin{aligned}\det {}^tA &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdot \cdots \cdot a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot \cdots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)}.\end{aligned}$$

这是因为$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, 且因为关于$\sigma^{-1} \in S_n$的求和与对$\sigma \in S_n$求和导致同样的结果, 于是右边 $= \det A$. □

4.5 行列式展开定理

我们用一个至少在理论上是有用的公式来充实关于行列式的章节, 它表明: 一个(n, n)矩阵的行列式可以允许通过子行列式的计算而得出.

定义 4.5.1 设 $A = (a_{ij}) \in M_K(n, n)$, $n > 1$. 对每一个偶 (k, l), $1 \le k, l \le n$, 用格式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \longleftarrow k$$

来定义一个(n, n)-矩阵A_{kl}, 即A_{kl}是将A中的第k行A^k换成典范基的元$e_l = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ (第l个位置为1, 其它为0), 将A中的第l列换成e_k的转置${}^te_k$所得到的矩阵.

命题 4.5.2

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} \det A_{kl} = \delta_{ik} \det A.$$

证明: 设 $A' = A'_{kl}$ 是将 A 的行 A^k 用 e_l 替代后所得的矩阵. A_{kl} 能从 A' 通过4.4.2的类型为(4.1)的行运算而得出: 对 $i \neq k$, 用 $-a_{il}$ 乘 A' 的行 A'^k, 再将它加到第 i 行 A'^i 上去.

于是 $\det A'_{kl} = \det A_{kl}$. 将 A 的第 i 行 A^i 写为 $\sum_l a_{il} e_l$. 于是

$$\sum_l a_{il} \det A_{kl} = \sum_l a_{il} \det A'_{kl}$$
$$= \det(\text{将 } A \text{ 中的 } A^k \text{ 用 } A^i \text{ 来替换后所得的矩阵}).$$

□

定义4.5.3 设 $A = (a_{ij}) \in M_K(m, n)$, $n > 1$.

1. 对任意的 i, j, $1 \leq i, j \leq n$, 我们用 $S_{ij}(A)$ 来记在 A 中删除第 i 行, 第 j 列后所得到的 $(n-1, n-1)$ 矩阵. 称 $S_{ij}(A)$ 为关于 (i, j) 的删除矩阵.

2. 定义关于 $a_{il} \in A$ 的代数余子式 α_{li} 为 $(-1)^{i+l} \det S_{il}(A)$.

命题4.5.4

$$\det A_{il} = \alpha_{li} = (-1)^{i+l} \det S_{il}(A).$$

证明: 通过 $(l-1)$ 次相邻列的交换, 我们能从 A_{il} 得到矩阵 B_{il}, 对 $j < l$, B_{il} 的 $(j+1)$ 列是 A_{il} 的第 j 列, 且其首列为 A_{il} 的第 l 列.

$$\det A_{il} = (-1)^{l-1} \det B_{il}.$$

用类似的 $(i-1)$ 次相邻行的交换过程, 我们能从 B_{il} 得到矩阵 C_{il}, 且有 $\det B_{il} = (-1)^{i-1} \det C_{il}$, 这里 C_{il} 具有形状

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ & S_{il}(A) & \\ 0 & & \end{array}\right).$$

显然有 $\det C_{il} = \det S_{il}(A)$. □

现在我们能证明Laplace展开定理:

定理4.5.5 设$A=(a_{ij})\in M_K(n,n)$, $n>1$. 于是借助于在4.5.3中所定义的代数余子式，我们有

$$\det A=\begin{cases}\sum_{l=1}^n a_{il}\alpha_{li},\\ \sum_{k=1}^n a_{kj}\alpha_{jk}.\end{cases}$$

注: 右边两行分别称为“按第i行展开”和“按第j列展开”.

证明: 上一行的等式可直接得自4.5.2和4.5.4. 因为$\det {}^tA=\det A$, 作为应用，我们可由上一行得到下一行的结论. □

定理4.5.6 设$A\in GL(n,k)$. 逆矩阵A^{-1}在(j,k)位置上的元素可用$\frac{\alpha_{jk}}{\det A}$给出.

证明: 利用4.5.2, 4.5.4, 我们有

$$\sum_j a_{ij}\frac{\alpha_{jk}}{\det A}=\sum_j a_{ij}\frac{\det A_{kj}}{\det A}=\delta_{ik}.$$

□

我们用Cramer法则来结束本节. 它提供了一个详尽的公式，用来唯一确定系数行列式不为0的(n,n)-线性方程组的解.

定理4.5.7 设在(n,n)-线性方程组$A(x)=b$中，$\det A\neq 0$. 于是解的分量x_j, $1\leq j\leq n$, 可由

$$x_j=\frac{\det B_j}{\det A}$$

给出. 这里B_j是将A中的第j列用${}^tb$替代后所得的(n,n)矩阵.

证明: 将B_j按第j列展开后得到

$$\det B_j=\sum_{l=1}^n b_l\alpha_{jl}.$$

于是由4.5.6, 得出了$A^{-1}(b)$的形如上述的x. □

例4.5.8

$$\begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{4} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{1}\\ \bar{1}\\ \bar{0}\end{pmatrix},$$

其系数在$K=\mathbf{Z}_5$中.

$$\det\begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{4} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{1}\end{pmatrix}=\bar{3}+\bar{4}-\bar{4}-\bar{4}=-\bar{1}=\bar{4},$$

$$\frac{1}{\det A}=\bar{4}.$$

$$x_1=\bar{4}\det\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{4} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{1}\end{pmatrix}=\bar{4}(\bar{1}-\bar{3}-\bar{4})=\bar{1},$$

$$x_2=\bar{4}\det\begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix}=\bar{4}(\bar{3}+\bar{1}-\bar{1})=\bar{2},$$

$$x_3=\bar{4}\det\begin{pmatrix}\bar{3} & \bar{4} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1}\\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{0}\end{pmatrix}=\bar{4}(\bar{2}+\bar{4}-\bar{3}-\bar{2})=\bar{4}.$$

习题

1. 试确定线性方程组

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

的全部解.

2. 试用初等变换确定矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

的秩.

3. 设 A 是一个 (m,n)- 矩阵， B 是一个 (n,m)- 矩矩阵，且 $n < m$. 问 (m,m)- 矩阵 AB 是可逆的吗？

4. 试将置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 表为对换的乘积.

5. 设 A_n 是 $\{1,\cdots,n\}$ 的偶置换群. 证明：

(a) A_n 正好包含 $\dfrac{n!}{2}$ 个元素.

(b) A_n 是交换的充要条件是 $n \leq 3$.

6. 设

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 和 \quad b = (0,1,0,2).$$

试用 Cramer 法则求解线性方程组 $A(x) = b$.

7. 设 A 是域 K 上的一个 (n,n)- 矩阵. A 的一个 (k,k)- 子矩阵是从 A 中抽去了 $(n-k)$ 个行和列后所组成的矩阵. 证明：$\text{rg } A = \max\{k;$ 存在 A 的一个秩为 k 的 (k,k)- 子矩阵 $\}$.

8. 设 K 是一个域， $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$. 定义

$$V(x_1,\cdots,x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

证明: $V(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

(注意: 称 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 为数组 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的 Vandermond行列式.)

9. (a) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

试确定 AB, $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$.

(b) 计算

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 & 8 & 5 \\ -5 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ 10 & 12 & 9 & 4 & 1 \\ 10 & 8 & -3 & -2 & 3 \\ 35 & 8 & 18 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. 称矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_K(n,n)$ 为反对称的, 如果对所有 i,j, 有 $a_{ij} = -a_{ji}$.

(a) 证明: 当 $n = 2m-1$, 其中 $m \in \mathbf{N}$ (即 n 为奇数), 则 $\det A = 0$.

(b) 当 $n = 2m$, 其中 $m \in \mathbf{N}$, (即 n 为偶数), 则成立

$$\det A = \left(\frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdot \cdots \cdot a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}\right)^2.$$

试对 $m = 1$ 和 $m = 2$ 证明此结论.

(c) 试对任意的 $m \in \mathbf{N}$ 证明 (b) 中的公式.

提示: 称括号内的表达式为 A 的 Pfaff 式, 记为 $\mathrm{Pf}(A)$. 证明:

$$\mathrm{Pf}({}^tTAT) = \det T \ \mathrm{Pf}(A),$$

这里T是一个$(2m,2m)$-矩矩阵. 当$\det A\neq 0$时，则存在一个$T\in M_K(2m,2m)$，使得

$$
{}^tTAT=\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & \\
-1 & 0 & & & 0 & \\
 & & 0 & 1 & & \\
 & & -1 & 0 & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & 0 & & & 0 & 1\\
 & & & & -1 & 0
\end{pmatrix}.
$$

11. 设$A=(a_{ij})\in M_K(2,3)$，且利用

$$
c_1=\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}, c_2=\det\begin{pmatrix} a_{13} & a_{11}\\ a_{23} & a_{21}\end{pmatrix}, c_3=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}
$$

定义$(c_1,c_2,c_3)\in K^3$. 证明:

(a) $\operatorname{rg} A=2\Leftrightarrow (c_1,c_2,c_3)\neq 0$.

(b) 如 $\operatorname{rg} A=2$，则(c_1,c_2,c_3)是齐次线性方程组$A(x)=0$的解空间中的一组基.

第 5 章

特征值和标准形

5.1 特征值

现在我们来研究线性映射的一个更进一步的不变量. 不过, 在这里我们必须要求域满足某些性质. 本书的后续部分将越来越多地限制所取的域为实数域 $\mathbf{R}$ 和复数域 $\mathbf{C}$. 对数域 $\mathbf{C}$, 所谈及的不变量总是存在的.

现在我们不再只考虑有限维向量空间.

定义 5.1.1 设 V 是域 K 上的一个向量空间.

1. 设 $f: V \to V$ 是线性的. 称 $\lambda \in K$ 为 f 的特征值, 如果映射

$$(f - \lambda \text{ id}): V \to V$$

具有一个非零的核.

2. 设 λ 是 f 的特征值, 则称 $\ker(f - \lambda \text{ id})$ 为相应于 λ 的特征空间, 称元素 $x \in \ker(f - \lambda \text{ id})$ 为相应于特征值 λ 的特征向量.

3. 设 A 是 K 上的一个 (n, n)-矩阵. 我们可把 A 看成是一个线性映射 $A: K^n \to K^n$, 于是也可定义 A 的特征值、 A 的特征空间和特征向量等概念.

注解 5.1.2 我们说 λ 是 $f: V \to V$ 的特征值, 这就意味着 V 中存在一个 $x \neq 0$, 使得 $f(x) = \lambda x$. 当 $f = A \in M_K(n, n)$ 时, (n, n)-线性方程组 $(A - \lambda E_n)(x) = 0$ 必有一个解 $x \neq 0$.

例 5.1.3 如果 $\ker f \neq \{0\}$, 则 $0 \in K$ 是 f 的特征值. 如果 $\text{rg } A < n$, 即如果 A 是不可逆的, 则 0 是 $A \in M_K(n, n)$ 的特征值.

我们考虑在$\mathbf{R}$和$\mathbf{C}$上的$(2,2)$-矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

假设λ是A的特征值. 这就是说，存在$x=(x_1,x_2)\neq(0,0)$，使得

$$\cos\alpha\ x_1-\sin\alpha\ x_2-\lambda x_1=0,$$

$$\sin\alpha\ x_1+\cos\alpha\ x_2-\lambda x_2=0.$$

于是矩阵$(A-\lambda\,\mathrm{id})$的行列式必为0:

$$\det\begin{pmatrix}\cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1=0,$$

即$\lambda=\cos\alpha\pm\sqrt{-\sin^2\alpha}$. $\lambda\in\mathbf{R}$的充要条件是$\sin\alpha=0$，于是有$\alpha=0$或π. 因此$\lambda=+1$或-1.

在所有其他的情形中，矩阵在$\mathbf{R}$中没有特征值，特征值仅在$\mathbf{C}$中，即$\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha$.

定义5.1.4 设$A=(a_{ij})\in M_K(n,n)$，所谓A的特征多项式是指用

$$\chi_A(t)=\det(tE_n-A)$$

所给出的多项式.

注解5.1.5 1. 注意，我们在这里第一次涉及到计算这样的一个(n,n)-矩阵的行列式，这个矩阵的元素不是属于一个域，而是属于一个环，即系数取在K中的多项式环$K[t]$.

2. 设$p(t)=\sum_{i\in\mathbf{N}}a_it^i$是一个系数在域$K$中的多项式. 如果$a_n\neq0$，且对$i>n$，有$a_i=0$，则称$p(t)$的阶为$n$，记为: Grad $p(t)$. 对零多项式，即对所有$i, a_i=0$，则定义它的阶为$-\infty$.

3. 设 $p(t) \in K[t]$ 的阶 $n \geq 1$. 称 $\lambda \in K$ 是 $p(t)$ 的零点(或根), 如果 $p(\lambda) = 0$. 注意, 如果 λ 是 $p(t)$ 的零点, 则 $p(t)$ 可写成 $(t-\lambda)q(t)$, 这里 $\text{Grad}\ q(t) = \text{Grad}\ p(t) - 1$. 这是因为 $p(t) = p(t) - p(\lambda) = \sum_{i\geq 1} a_i(t^i - \lambda^i)$. 而 $(t^i - \lambda^i)$ 形如 $(t-\lambda)(t^{i-1} + t^{i-2}\lambda + \cdots + \lambda^i)$.

命题5.1.6 设 $A = (a_{ij}) \in M_K(n,n)$. 于是 $\chi_A(t)$ 的阶为 n. 精确地说, 如果我们将 $\chi_A(t)$ 写成如 $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i$, 于是对 $i > n$, 有 $\alpha_i = 0$, $\alpha_n = 1, \alpha_{n-1} = -\sum_i a_{ii}, \cdots$, $\alpha_0 = (-1)^n \det A$. 也称 $-\alpha_{n-1}$ 为 A 的迹, 记为 $\text{Tr}A$.

证明: 考察在行列式公式5.1.5中关于 $\sigma = \text{id}$ 的求和项:

$$(t - a_{11})\cdots(t - a_{nn}) = t^n - \sum_i a_{ii}t^{n-1}\cdots$$

在所有剩下的其它求和项中遇到形如 $(t - a_{ii})$ 的因子的次数只能 $\leq n-2$ 次. 于是上述的乘积给出了关于 t^n 和 t^{n-1} 的系数.

如将 $t = 0$ 代入, 就得到了 $\chi_A(t)$ 中的常系数. □

例5.1.7

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & -2 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} = t^3 - t^2 + t - 1.$$

引理5.1.8 设 A 和 A' 在环 $M_K(n,n)$ (见4.3.1) 中是互相共轭的元素, 则成立

$$\chi_A(t) = \chi_{A'}(t).$$

证明: A 与 A' 共轭表明 $A' = TAT^{-1}$, 这里 $T \in GL(n,K)$, 见4.3.1. 于是成立 $(tE_n - A') = T(tE_n - A)T^{-1}$. 因此, 由4.4.5:

$$\chi_{A'}(t) = \det(tE_n - A') = \det T \cdot \det(tE_n - A) \cdot \det T^{-1} = \chi_A(t).$$

□

命题5.1.9 设$f: V \longmapsto V$是线性的. 特征多项式$\chi_f(t)$定义为$\chi_A(t)$. 这里$A = \Phi_B \circ f \circ \Phi_B^{-1}$ 是f的一个矩阵表示. f的行列式$\det f$及f的迹分别定义为$\det A$和 $\mathrm{Tr} A$. 这些定义与矩阵表示的选取无关.

证明: 注意, $\det A$及 $\mathrm{Tr} A$作为$\chi_A(t)$的系数而出现, 见5.1.6. 于是由5.1.8及3.4.12就得出了结论. □

现在我们来讨论在上面所导入的概念之间的一个基本的关系.

定理5.1.10 A或f的特征多项式的根一一对应于A或f的特征值.

证明: 我们限于对(n,n)-矩阵A进行讨论. 于是成立:

$$\lambda\text{是特征值} \Longleftrightarrow \mathrm{rg}\ (A - \lambda E_n) < n \Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.$$

□

例5.1.11 1. 由5.1.7, 矩阵A的特征值是$(t-1)(t^2+1)$的根. 于是$\lambda = 1$是特征值, 且对$K = \mathbf{R}$, 这是唯一的特征值. 对$K = \mathbf{C}$, $\pm \mathrm{i}$也是特征值.

2. 在例5.1.3中对$K = \mathbf{C}$, 已存在了特征值$\cos\alpha \pm \mathrm{i} \sin\alpha$. 当情形$\alpha = 0$或$\alpha = \pi$时, 必须把它们计算2次, 对于重数的定义, 可参见5.2.7.

3. 设$A = (a_{ij})$是一个三角矩阵, 见3.5.7. 于是$\chi_A(t) = (t - a_{11}) \cdot \cdots \cdot (t - a_{nn})$. 即特征值位于对角线上.

5.2 标准形、初等理论

现在我们来研究, 在(n,n)-矩阵的共轭类中(见4.3.1)是否存在一个特别简单的表示. 将它与3.6.7中相似矩阵的分类问题作比较. 对此我们需要假设特征多项式可分解成线性因

子. 一般地，这意味着关于基域K的一个条件. 在$K = \mathbf{C}$的情形，这个条件总是满足的. 这里所考察的向量空间是有限维的.

定理5.2.1 1. 矩阵$A \in M_K(n,n)$共轭于对角矩阵的充要条件是在K^n中存在着一组由A的特征向量所构成的基

$$B=\{b_1, \cdots, b_n\}.$$

我们在这里把A理解为线性映射.

2. 线性映射$f : V \longmapsto V$具有一个由一个对角矩阵组成的坐标表示$\Phi_B \circ f \circ \Phi_B^{-1}$的充要条件为所属的基是由特征向量所构成.

证明: 显然只需证明2. 当元素$b_j, 1 \le j \le n$, 是B的特征向量时，则$f(b_j) = \lambda_j b_j$, 于是由3.4.10, 矩阵$\Phi_B \circ f \circ \Phi_B^{-1}$是用$(< f(b_j), b_i^* >) = (\delta_{ij}\lambda_j)$给出的. 反过来，如果$\Phi_B \circ f \circ \Phi_B^{-1}$有此形式，则有$f(b_j) = \lambda_j b_j$. □

例5.2.2 矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$不共轭于对角矩阵. 其特征多项式为$(t-1)^2$, 于是$\lambda = 1$是其唯一的特征值. 特征向量是由方程$A(x) = x$所确定的，于是$x_1 + x_2 = x_1, x_2 = x_2$. 于是$x = (1,0)$的倍数是唯一的特征向量.

如我们所见，A的特征多项式确实是二阶的，但并不具有两个不相同的根，见5.2.9.

引理5.2.3 设$f : V \longmapsto V$是线性的. 设$b_1, \cdots, b_r$是f的非零特征向量，它们有互不相同的特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$. 则$b_1, \cdots, b_r$是线性无关的.

证明: 我们对r施行归纳法. 对$r = 1$, 结论是显然的. 假设$(r-1)$时结论已经证得. 于是在引理的假设下，$\{b_1, \cdots, b_{r-1}\}$是线性无关的.

考察形如$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i b_i=0$的关系式. 于是在该式两边作用了$(f-\lambda_r\,\mathrm{id})$后就得到了$\sum_{i=1}^{r-1}\alpha_i(\lambda_i-\lambda_r)b_i=0$. 因为$\lambda_i-\lambda_r\neq 0$, 于是得出：对$i<r$, 有$\alpha_i=0$, 于是亦有$\alpha_r=0$. □

我们从5.1.10得知, 特征多项式的根对应于特征值. 于是我们插入一段对多项式的一般的考察.

对于域K上的多项式环$K[t]$的结构，其根本的重要性是所谓“欧几里得算法”的有效性. 下面我们来讨论整数环$\mathbf{Z}$中的“带余除法”的下列类似结果，可参见1.4.11的证明.

定理5.2.4 设$p(t)$和$q(t)$是系数在K中的两个多项式，且

$$\text{Grad }p(t)=n\geq 0 \text{ 及 } \text{Grad }q(t)=m\geq 0.$$

于是存在着唯一确定的多项式$m(t)$及$r(t)$, 使得

$$p(t)=m(t)q(t)+r(t) \text{ 且 } \text{Grad }\ (t)<m. \tag{5.2}$$

当$n<m$时，则有$m(t)=0, r(t)=p(t)$. 当$n\geq m$时，则Grad $m(t)=n-m$, Grad $r(t)<m$, 也包括$r(t)=0$, 即Grad $r(t)=-\infty$的情形.

证明: 设

$$p(t)=\sum_{h=0}^{n}a_i t^i,\ a_n\neq 0;\quad q(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j t^j,\ b_m\neq 0.$$

我们假设$n-m\geq 0$. 令

$$m(t)=\sum_{k=0}^{n-m}c_k t^k,\ c_{n-m}\neq 0;\quad r(t)=\sum_{l=0}^{m-1}d_l t^l.$$

我们指出，条件 (5. 2)唯一地确定了系数c_k和d_l.

为此，我们对上述所写出的多项式$m(t)$, $q(t)$, $r(t)$实施(5.2)的右边的乘法和加法，再把t的不同幂次所包含的系数

与左边 $p(t)$ 相应的幂次的系数相比较. 我们发现对每个满足 $m \le n-j \le n$ 的 j, 有

$$a_{n-j} = \sum_{i=m-j}^{m} c_{n-i-j} b_i.$$

对 $j=0$, 有 $a_n = c_{n-m} b_m$. 由此可确定出 c_{n-m}. 如果已按此方式确定了 c_{n-i-j}, 这里 $n-i-j > n-m-j$, 则上述关于值 j 的方程给出了系数 c_{n-m-j}.

在以此方式确定了所有的 c_k, $0 \le k \le n-m$, 以后, d_{n-j}, $0 \le n-j < m$, 就可由方程

$$a_{n-j} = \sum_{i=0}^{n-j} c_{n-i-j} b_i + d_{n-j}$$

来确定. □

系 5.2.5 设 $p(t) \in K[t]$ 是一个阶 $n \ge 1$ 的多项式. $\lambda \in K$ 是 $p(t)$ 的零点 (即 $p(\lambda)=0$) 的充要条件是存在一个阶为 $n-1$ 的多项式 $m(t)$, 使得

$$p(t) = m(t)(t-\lambda).$$

证明: 当 $p(t)$ 有一个这样的表示时, 则有 $p(\lambda)=0$. 反过来, 我们从 5.2.4 知道, 对 $p(t)$, 利用 $q(t)=t-\lambda$, 有形如 $p(t)=m(t)(t-\lambda)+r(t)$ 的表示, 这里 $\text{Grad } r(t) < \text{Grad } (t-\lambda) = 1$. 于是 $r(t) = d_0 =$ 常数, 当 $p(\lambda)=0$ 时, 则成立 $0 = p(\lambda) = m(\lambda)(\lambda-\lambda)+d_0 = d_0$. □

定义 5.2.6 我们说阶 $n \ge 1$ 的多项式 $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i \in K[t]$ 能完全分解成线性因子, 如果在 K 中存在 (不必须互不相等的) 元素 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 使得

$$p(t) = a_n (t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_n).$$

称$\lambda_i, 1 \leq i \leq n$, 为$p(t)$的零点 (或根).

注:

1. 称λ_i为"零点"是确切的. 因为显然有$p(\lambda_i)=0$, 而对$\lambda \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, 有$p(\lambda)=a_n \prod_i (\lambda-\lambda_i) \neq 0$.

2. 集合$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$中$n$个元素并不需要互不相同. 我们可在此集合上将恒同关系定义为等价关系, 并在陪集中选择代表元素. 当把这些代表元素记为$\{\mu_1, \cdots, \mu_r\}$时, 我们有

补充5.2.7 设5.2.6中的$p(t)$形如

$$p(t)=a_n(t-\mu_1)^{m_1}\cdots(t-\mu_r)^{m_r},$$

且$\{\mu_1, \cdots, \mu_r\}$中元素互不相等. 于是称m_j为零点μ_j的重数.

注解5.2.8 1. 显然有$\sum_{j=1}^{r} m_j=n$. r是介于1和n之间的一个整数, $m_j \geq 1$.

2. 存在着这样的问题: 是否每个多项式$p(t) \in K[t]$都能分解成线性因子. 这是关于K的一个条件. 譬如对$K=\mathbf{R}$, 这是不满足的, 例如我们可以考察$p(t)=t^2+1$. 但如把$p(t)$看成是$\mathbf{C}[t]$中的元素, 则有表示$p(t)=(t-\mathrm{i})(t+\mathrm{i})$. 在域的理论中, 要研究哪些多项式$p(t) \in K[t]$可分解成线性因子的问题. 我们总能把一个给定的域扩张成一个域, 使得在这个域中所有的多项式可分解成线性因子. 我们只限于引用所谓的代数基本定理:

"每个多项式$p(t) \in \mathbf{C}[t]$可分解成线性因子",

而对其证明, 存在着一个利用函数论方法的简单的证明.

3. 我们在这里叙述这个定理的一个简单的推论, 称它为实多项式的基本定理: "每个多项式$p(t) \in \mathbf{R}[t]$可分解为1阶和2阶多项式的乘积". 我们在稍后将需要它.

证明可直接地得自注解: $p(t)$能被考虑成$\mathbf{C}[t]$中的多项式, 于是可分解成线性因子:

$$p(t)=a_n(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n), \text{其中 } \lambda_j \in \mathbf{C}.$$

因为$p(t)$的系数是实的，所以$\bar{p}(t)=p(t)$，于是

$$(t-\bar{\lambda}_1)\cdots(t-\bar{\lambda}_n)=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n).$$

即λ_j和$\bar{\lambda}_j$都是$p(t)$的根．当$\lambda_j\neq\bar{\lambda}_j$时，则存在$k$，使得$\bar{\lambda}_j=\lambda_k$．两个因子$(t-\lambda_j)$和$(t-\lambda_k)=(t-\bar{\lambda}_j)$的乘积是实的2次多项式

$$(t-\lambda_j)(t-\bar{\lambda}_j)=t^2-(\lambda_j+\bar{\lambda}_j)t+\lambda_j\bar{\lambda}_j.$$

标准形的初等理论所达到的顶峰是

定理5.2.9 设$f:V\longmapsto V$是线性的．当$\chi_f(t)$完全分解成线性因子$\chi_f(t)=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$，且其中的根互不相同时，则$f$是具有形如$(\delta_{ij}\lambda_j)$的坐标表示．

空间V是由相应于λ_i的n个特征向量所构成的1维子空间$V_f(\lambda_i)$的直和．

特别地，如果$\chi_A(t)$完全分解成线性因子，且有互不相同的根，则$A\in M_K(n,n)$共轭于一个对角矩阵．

证明：对每个i，令b_i是相应于λ_i的非零特征向量．按照5.2.3，$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$是自由的，且包含$n=\dim V$个元素．于是B是一组基，现在结论可得自5.2.1．□

5.3 Hamilton-Cayley定理

设V是K上的一个n维向量空间．我们固定一个线性映射$f\in L(V;V)$．于是可由此确定出环$K[t]$到环$L(V;V)$中的一个态射，它对于进一步的理论有着根本的意义．

定义5.3.1 设$f:V\longmapsto V$是线性的．定义映射

$$\psi_f:K[t]\to L(V;V)$$

如下：对多项式$p(t)=\sum_i\alpha_it^i$，让它与线性映射

$$\psi_f(p(t))=p(f)=\sum_i a_if^i:V\to V$$

相对应.

注: 注意, $L(V;V)$ 是一个环 (甚至还是一个 K- 代数). 于是有 $\sum_i a_i f^i \in L(V;V)$. 这里, f^0 代表恒等元 id_V.

引理 5.3.2 5.3.1 中的映射 ψ_f 是一个环态射 (甚至还是 K- 代数态射), 即

$$\psi_f(ap(t)+a'p'(t)) = a\psi_f(p(t)) + a'\psi_f(p'(t)),$$
$$\psi_f(p(t)q(t)) = \psi_f(p(t))\psi_f(q(t)).$$

我们也用 $K[f]$ 来记 $\mathrm{im}\ \psi_f$.

证明: 显然 ψ_f 是线性的. 于是只需证明 $\psi_f(t^k)\psi_f(t^l) = \psi_f(t^{k+l})$. 而这也是显然的: $f^k f^l = f^{k+l}$. □

Hamilton-Cayley 定理是:

定理 5.3.3 设 $f \in L(V;V), \chi_f(t) \in K[t]$ 是 f 的特征多项式, 于是 $\psi_f(\chi_f(t)) = \chi_f(f) = 0 \in L(V;V)$.

证明: 如我们在 5.1.5.1 中已经注意到那样, 在 4.4 和 4.5 中所阐明的行列式理论, 对元素在交换环 R 中的矩阵来说, 也是成立的. 现在我们选取 R 为 $L(V;V)$ 的子环 $K[f] = \mathrm{im}\ \psi_f$.

设 $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ 是 V 的一组基, $B^* = \{b_1^*, \cdots, b_n^*\}$ 是其对偶基. f 的矩阵表示 $\Phi_B \circ f \circ \Phi_B^{-1}$ 是用 $A = (a_{ij})$ 给出的, 这里 $a_{ij} =< b_i^*, f(b_j) >$. 于是特别地, 有

$$\sum_i (f\delta_{il} - a_{il})(b_i) = 0, \quad \text{对所有的 } l. \tag{5.3}$$

考察元素在 $K[f]$ 中的矩阵 $fE - A = (f\delta_{ij} - a_{ij})$. 如在 4.5.1 和 4.5.2 中那样, 我们定义 $(fE-A)_{kl} =$ (简记为)$A_{kl}(f)$, 于是

$$\sum_i (f\delta_{il} - a_{il}) \det A_{kl}(f) = \delta_{ik} \det(fE - A) = \delta_{ik}\chi_f(f).$$

将此方程式应用于一个基元素b_i上，并关于i作和. 利用 (5.3), 可以得出 (注意， $K[f]$是交换的):

$$0 = \sum_l \det A_{kl}(f) \sum_i (f\delta_{il} - a_{il})(b_i) = \chi_f(f)(b_k).$$

□

作为5.3.3的第一个应用，我们来证明:

定理5.3.4 设$f: V \longmapsto V$是线性的，于是存在恰好一个首项系数为1的多项式$\mu_f(t)$, 使得每一个满足$p(f)=0$的多项式$p(t)$都是$\mu_f(t)$的倍式. 特别地， $\mu_f(t)$是特征多项式$\chi_f(t)$的因式.

定义5.3.5 称上述所定义的多项式$\mu_f(t)$为f的极小多项式. 它是首项系数为1的最小阶的非零多项式，使得当用f去替代t时， V成为它的零空间.

5.3.4的证明: 用$N_f[t]$来记使$p(f)=0$的多项式$p(t) \in K[t]$的集合，即对所有$x \in V$, 有$p(f)(x)=0$. 当$p \neq 0$, 首项系数应为1.

按照 5.3.3, $\chi(t) \equiv \chi_f(t)$属于$N_f[t]$. 于是在$N_f[t]$中存在一个最小阶的多项式$\mu(t) \equiv \mu_f(t) \neq 0$, $\mu(t)$的阶 $\leq$ $\chi(t)$的阶 $= n =$ $\dim V$.

设$p(t) \in N_f[t], p(t) \neq 0$. 欧氏算法5.2.4给出了公式

$$p(t) = m(t)\mu(t) + r(t),$$

且 $\mathrm{Grad}\ r(t) < \mathrm{Grad}\ \mu(t)$. 由$p(f)=0$及$\mu(f)=0$得出$r(f)=0$, 于是由$\mu(t)$的定义知道$r(t)=0$.

现设$\mu'(t)$是如上所定义的极小多项式. 于是$\mu'(t)$是$\mu(t)$的倍式. 因为这两个多项式的首项系数均为1, 所以得出$\mu'(t) = \mu(t)$. □

我们再重提在5.2中所提到的线性映射的简单的矩阵表示的问题. 作为目前的结果, 我们指出

定理5.3.6 $f \in L(V;V)$ 具有一个三角矩阵的坐标表示的充要条件为 $\chi_f(t)$ 完全分解成线性因子.

证明: 设 $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} = A = (a_{ij})$ 是一个 (上) 三角矩阵, 即对 $i > j$, 有 $a_{ij} = 0$, 见 **3.5.7.3**. 于是 $(tE - A)$ 也是上三角矩阵, 且由命题5.1.9, 对 $\chi_A(t) = \chi_f(t)$, 可以得到:

$$\chi_f(t) = (t - a_{11}) \cdots (t - a_{nn}).$$

反过来, 现设 $\chi_f(t) = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$. 我们对 n 运用归纳法, 利用三角矩阵去证明 f 的坐标表示 $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ 的存在性. 对 $n = 1$, 结论显然是正确的. 现设对 $f' : V' \longrightarrow V'$, $\dim V' = n - 1$, 结论已被证得.

现对 $f : V \longrightarrow V$, 考察对应于特征值 λ_1 的非零特征向量 b_1. 设 U 是由 b_1 所生成的子空间, V' 是 U 在 V 中的补. 定义 $f' : V' \longrightarrow V'$ 为 $f|_{V'} : V' \longrightarrow V$ 与投影 $V = U + V' \longrightarrow V'$ 的复合. 我们断言:

$$\chi_{f'}(t) = (t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n).$$

事实上, 通过 V' 的一组基 B' 补充 b_1, 使其成为 V 的一组基 B. 在矩阵 $\Phi_B \circ f \circ \Phi_B^{-1} = A = (a_{ij})$ 中的第一列为 $a_{i1} = \delta_{i1}\lambda_1$. 于是 $(tE - A)$ 中的第一列为 $\delta_{i1}(t - \lambda_1)$. 与 $(tE - A)$ 的 $(1,1)$ 元素 $(t - \lambda_1)$ 相补的 $(n-1, n-1)$-矩阵 $S_{11}(tE - A)$ 是矩阵 $(tE' - A')$, 其中 $A' = \Phi_{B'} \circ f \circ \Phi_{B'}^{-1}$ 及 $E' = (n-1, n-1)$-单位矩阵. 于是有

$$\chi_f(t) = \det(tE - A) = (t - \lambda_1)\det(tE' - A') = (t - \lambda_1)\chi_{f'}(t),$$

因而得到了我们的结论.

因此我们能按照对 V' 的归纳假设去选取基 B'，使得 $A' = \Phi_{B'} \circ f' \circ \Phi_{B'}^{-1}$ 是一个 $(n-1, n-1)$- 矩阵. 因而 $A = \Phi_B \circ f \circ \Phi_B^{-1}$ 也是一个三角矩阵. □

推论 5.3.7 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，则

$$\det A = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$$

证明: 在三角阵中，特征值排列在对角线上. 对这样的矩阵，行列式是对角元素的乘积.

5.4 Jordan标准形

我们指出，对每个线性映射 $f: V \longrightarrow V$，如果特征多项式 $\chi_f(t)$ 可完全分解成线性因子，则存在一个极好的矩阵表示. 这个所谓的Jordan标准形在每一个共轭矩阵的类中是唯一确定的，且能作为这个类的特征. 因为我们不能排除 $\chi_f(t)$ 会有重数 > 1 的根出现的情形，所以下面的概念是重要的.

定义 5.4.1 设 λ 是 $f: V \longrightarrow V$ 的重数为 $m \geq 1$ 的特征值. 我们也把 $f - \lambda \mathrm{id}$ 写成 $f - \lambda$. 定义 λ 的广义特征空间 $V_f(\lambda)$ 为 $\ker\ (f - \lambda)^m$. 称 $V_f(\lambda)$ 中的元素为广义特征向量. 我们用 $V_f'(\lambda)$ 来标记 $\mathrm{im}\ (f - \lambda)^m \subset V$.

注解 5.4.2 因为 $V_f(\lambda)$ 包含了 λ 的特征向量，所以得到 $V_f(\lambda) \neq 0$.

命题 5.4.3 利用 5.4.1 中的概念，成立

1. $V_f(\lambda)$ 和 $V_f'(\lambda)$ 是 f 不变的:

$$f(V_f(\lambda)) \subset V_f(\lambda); \qquad f(V_f'(\lambda)) \subset V_f'(\lambda).$$

2. 设元素 $b_i = (f - \lambda)^{i-1}(y)$, $1 \leq i \leq k$, 不为 0, 但 $b_{k+1} = (f - \lambda)^k(y) = 0$, 则 $\{b_i, 1 \leq i \leq k\}$ 是自由的.

3. $V = V_f(\lambda) \oplus V_f'(\lambda)$ (直和).

4. $\chi_{f|_{V_f(\lambda)}}(t) = (t-\lambda)^m, \quad \dim V_f(\lambda) = m$.

证明: 为简单起见, 我们将

$$V_f(\lambda), V_f'(\lambda)$$

分别写成

$$V(\lambda), V'(\lambda)$$

1. 得自 $f(f-\lambda)^r = (f-\lambda)^r f$.

对于 2. 的证明, 考虑关系式 $\sum \alpha_i b_i = 0, 1 \leq i \leq k$. 应用 $(f-\lambda)^{k-1}$ 后就得出 $\alpha_1 b_k = 0$. 于是 $\alpha_1 = 0$. 应用 $(f-\lambda)^{k-2}$ 后, 得出 $\alpha_2 b_{k-1} = 0$, 依此类推.

对3. 的证明, 注意, 由2.6.7知道 $\dim V(\lambda) + \dim V'(\lambda) = \dim V$. 于是只需证明: 如果 $z \in V(\lambda) \cap V'(\lambda)$, 则 $z = 0$. 我们有 $(f-\lambda)^m(z) = 0$ 和 $z = (f-\lambda)^m(y)$. 如果 $z \neq 0$, 则我们有一个 $l, 1 \leq l \leq m$, 使得对 $1 \leq i \leq m+1$, 有 $b_i = (f-\lambda)^{i-1}(y) \neq 0$ 及 $b_{m+l+1} = 0$. 由 2., 对 $1 \leq i \leq m+l, b_i$ 是自由的. 进而, $f(b_i) = \lambda b_i + b_{i-1}$, 且 $b_0 = 0$. 把 $b_i, 1 \leq i \leq m+l$ 补充成 V 的一组基. 在所从属的矩阵表示下, 前 $m+l$ 列在对角线上是 λ, 在对角线下是 0. 特征多项式 $\chi_f(t)$ 包含因式 $(t-\lambda)^{m+l}, l > 0$, 于是得出矛盾.

对 4. 的证明, 令 $f|_{V(\lambda)} = f_0, f|_{V'(\lambda)} = f_1$. 如果 A_0 和 A_1 分别是 f_0 和 f_1 的矩阵表示, 则 f 的矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\chi_f(t) = \chi_{f_0}(t) \cdot \chi_{f_1}(t)$. 因为 $V'(\lambda)$ 没有特征值 λ 的非零特征向量, $\chi_f(t)$ 的因子是 $\chi_{f_0}(t)$ 的因子. 剩下要去证明: $\chi_{f_0}(t) =$

$(t-\lambda)^m$. 因为 $(f_0-\lambda)^m=0$, 存在一个最小的 $p, 1\leq p\leq m$, 使得 $(f_0-\lambda)^p=0$. 对 $i=0,\cdots p$, 定义 $U_i=\ker\,(f_0-\lambda)^i$. 于是

$$\{0\}=U_0\subset\cdots\subset U_p=V(\lambda)$$

及 $f_0(U_i)\subset U_i$. 进而，对 $1\leq i\leq p$, 有 $U_{i-1}\neq U_i$. 这是因为要不然, 应用 $(f_0-\lambda)^{p-i}$ 后就有 $\ker\,(f_0-\lambda)^{p-1}=\ker\,(f_0-\lambda)^p=V(\lambda)$, 这与 p 的选取相矛盾.

我们对 i 运用归纳法来证明 U_i 具有一组基, 使得 $f_0|_{U_i}$ 的矩阵表示是一个上三角矩阵，且 λ 位于对角线上， $1\leq i\leq p$. 于是得出，对 $i=p, \chi_{f_0}(t)=(t-\lambda)^m$.

对 $i=1$, 显然存在一个这样的矩阵，这是因为 U_1 是 λ 的特征空间. 如果 $p>1$, 则假设对 $U_{i-1}, 1\leq i-1<p$, 结论已经证得. 对 $y\in U_i\backslash U_{i-1}$, 我们有 $f_0(y)=\lambda y+x$, 且 $x\in U_{i-1}$. 这表明， U_{i-1} 的一组基能以上述论及的方式补充成 U_i 的一组基, 且在此基下， $f_0|_{U_i}$ 所从属的矩阵表示在对角线上为 λ, 而在对角线下方为0. □

定义5.4.4 所谓 Jordan 矩阵 $J_m(\lambda)\in M_K(m,m)$ (对元素 $\lambda\in K$) 是指形如

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdot & \cdots \\ 0 & \lambda & \cdot & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdot & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

的矩阵. 于是 $J_m(\lambda)$ 是一个上三角矩阵，且 $\alpha_{ii}=\lambda, \alpha_{ii+1}=1$, 而且对 $j>i+1$, 有 $\alpha_{ij}=0$.

Jordan 矩阵的意义以下列结果为基础:

引理5.4.5 设 $f:V\longrightarrow V$ 是线性的，且仅有唯一的一个重数为 $\dim V$ 的特征值 λ. 于是 f 具有一个坐标表示 $\Phi_B\circ f\circ\Phi_B^{-1}$, 其矩阵是由放在对角线上的 r 个 Jordan 矩阵 $J_{q_j}(\lambda)$,

$1 \le j \le r$, 所组成. 这里 $\sum_j q_j = n = \dim V$, r 是一个介于 1 到 n 的值，且能使 $q_1 \ge \cdots \ge q_r$.

注解 5.4.6 1. 如果 f 只有一个重数为 $\dim V$ 的特征值，则有 $\chi_f(t) = (t-\lambda)^n$. 于是由 5.3.3, 有 $(f-\lambda)^n = 0$, 即 $V = V_f(\lambda)$.

2. Jordan 矩阵 $J_1(\lambda)$ 是具有特征值为 λ 的 $(1,1)$-矩阵. 于是当 $r = n$ 时， f 可用数量矩阵 λE_n 来表示. 在另一个极端的情形，即 $r = 1$ 时，有 $\Phi_B \circ f \circ \Phi_B^{-1} = J_n(\lambda)$.

证明: 存在一个最小的 $m_1, 1 \le m_1 \le n$, 使得 $(f-\lambda)^{m_1} = 0$. 考察子空间 $(f-\lambda)^{m_1-1}(V) = U \ne \{0\}$. U 是由 f 的特征向量所组成. 对 U, 选取一组形如 $\{(f-\lambda)^{m_1-1}(d_1), \cdots, (f-\lambda)^{m_1-1}(d_{k_1})\}$ 的基. 我们对这些 d_j 中的每一个，联系下列 m_1 个元素:

$$d_{j,i} = (f-\lambda)^{m_1-i}(d_j), \quad 1 \le i \le m_1,$$

由 5.4.3.3 知道，集合 $D_j = \{d_{j,1}, \cdots, d_{j,m_1} = d_j\}, 1 \le j \le k_1$, 是自由的. 进而成立

$$\begin{aligned} f(d_{j,i}) &= f(f-\lambda)^{m_1-i}(d_j) \\ &= (f-\lambda)^{m_1-i+1}(d_j) + \lambda(f-\lambda)^{m_1-i}(d_j) \\ &= d_{j,i-1} + \lambda d_{j,i}, \end{aligned}$$

这里我们把 $d_{j,0}$ 定义为 0. 这就是说：由 D_j 所生成的子空间 U_j 在 f 下被映至其自身. 关于基 D_j, $f|_{U_j}$ 以 Jordan 矩阵 $J_{m_1}(\lambda)$ 作为坐标表示. 自由集合 D_j, $1 \le j \le k_1$, 的和集 E_1 是自由的. 为了看出这一点，我们考虑一个形如

$$\sum_{j,i} \alpha_{ji} d_{j,i} = 0$$

的关系. 在这个关系上应用 $(f-\lambda)^{m_1-1}$. 于是得到

$$\sum_j \alpha_{jm_1} d_{j,m_1} = \sum_j \alpha_{jm_1} (f-\lambda)^{m_1-1}(d_j) = 0, \text{因此 } \alpha_{jm_1} = 0.$$

再应用 $(f-\lambda)^{m_1-2}$, 得到 $\alpha_{jm_1-1}=0$, 以此类推. 可以得到: 子空间 $U_1,\cdots,U_{k_1}$ 生成了一个 (k_1m_1) 维的子空间 V_1, 它在 f 下被映至自身. $f|_{V_1}$ 关于 V_1 的基 E_1 的坐标表示是由 k_1 个 Jordan 矩阵 $J_{m_1}(\lambda)$ 所组成.

现设 $V_1\neq V$. 这表明: 存在一个 m_2, $1\leq m_2<m_1$, 使得 $(f-\lambda)^{m_2-1}(V_1)\neq(f-\lambda)^{m_2-1}(V)$. 设 m_2 是具有此性质的最大者. 用 $\{(f-\lambda)^{m_2-1}(d_{k_1+1}),\cdots,(f-\lambda)^{m_2-1}(d_{k_1+k_2})\}$ 把由

$$\{(f-\lambda)^{m_2-1}(d_{j,i})=(f-\lambda)^{m_1-i+m_2-1}(d_j),$$
$$m_2\leq i\leq m_1, 1\leq j\leq k_1\}$$

所构成的 $(f-\lambda)^{m_2-1}(V_1)$ 的基补充成 $(f-\lambda)^{m_2-1}(V)$ 的一组基. 如上面那样, 我们把 d_{k_1+j} 中的每一个编排成 m_2 个元素

$$d_{k_1+j,i}=(f-\lambda)^{m_2-i}(d_{k_1+j}),\quad 1\leq i\leq m_2.$$

集合

$$D_{k_1+j}=\{d_{k_1+j,1},\cdots,d_{k_1+j,m_2}=d_{k+j}\},\ 1\leq j\leq k_2,$$

是自由的. 用 U_{k_1+j} 来标记由 D_{k_1+j} 所生成的空间. 如我们在上面所指出的那样, $D_{k_1+j}, 1\leq j\leq k_2$ 的和集 E_2 是自由的. 于是 E_2 是由 U_{k_1+j} $(1\leq j\leq k_2)$ 所生成的 V_2 中的一组基. $f|_{V_2}$ 关于 E_2 具有一个坐标表示, 它将 k_2 个 Jordan 矩阵 $J_{m_2}(\lambda)$ 放置在对角线上.

和集 $E_1\cup E_2$ 是自由的这样一个结论可以如上面应用形如 $(f-\lambda)^{m_2-1-i}, 0\leq i\leq m_2-1,$ 的映射去得到 E_1 的自由性那样地得出.

于是由此知道 $E_1\cup E_2$ 是 V_1+V_2 的一组基, $f|_{V_1+V_2}$ 关于 $E_1\cup E_2$ 具有在定理中表为 Jordan 矩阵所要求的坐标表示.

如果 $V_1+V_2\neq V$，则我们继续去构造 V_3，从 $m_3<m_2$ 出发，使得 $(f-\lambda)^{m_3-1}(V_1+V_2)\neq(f-\lambda)^{m_3-1}(V)$，使得 m_3 是具有此性质的最大者．经有限多步后，我们得到了一个分解 $V=V_1+\cdots+V_p$． □

注解5.4.7 在证明过程中我们把映射 $f:V\longrightarrow V$ 对应于唯一的一组整数：数 $m_1>\cdots>m_p$ 给出了在 f 的矩阵表示中 Jordan 矩阵的大小，而数 $k_1,\cdots k_p$ 描述了这种矩阵的个数．注意：$m_1k_1+\cdots+m_pk_p=n$．于是当 $m_1=1$ 时，有 $k_1=n,p=1$．当 $m_1=n$ 时，有 $k_1=1,p=1$．

与 5.2.9 相对照，对于特征多项式具有重数 >1 的根的情形，有：

定理5.4.8 设 $f:V\longrightarrow V$ 是线性的，且

$$\chi_f(t)=(t-\mu_1)^{m_1}\cdot\cdots\cdot(t-\mu_r)^{m_r},$$

其中 $\{\mu_1,\cdots,\mu_r\}$ 互不相同．设 $V_f(\mu_j)=$ (简记为 $V(\mu_j)$) 是广义特征空间，$1\leq j\leq r$．于是有

$$V=V(\mu_1)\oplus\cdots\oplus V(\mu_r).$$

注解5.4.9 在上面的公式中，$\oplus$ 表示直和，见 2.1.9．这等价于对 $j=1,\cdots,r$，有 $V(\mu_j)\cap\sum_{k\neq j}V(\mu_k)=\{0\}$．

证明：对 $s=0,1,\cdots$，令 $\{x\in V;(f-\mu_i)^s(x)=0\}=V_s(\mu_i)$．于是 $V_0(\mu_i)=\{0\}$，$V_1(\mu_i)$ 是特征值 μ_i 的特征空间，且对 s 充分大，譬如说 $s=\dim V$，有 $V_s(\mu_i)=V(\mu_i)$．上面我们假设已经知道了和式 $\sum_{i=1}^{r}V_{s-1}(\mu_i)$ 是直和．对 $s=1$，这是显然的．设已经证明：

$$V_s(\mu_1)\oplus\cdots\oplus V_s(\mu_{t-1})\oplus V_{s-k}(\mu_t),$$

这里 k 满足 $0\leq s-k<s$．对 $t=1$，这确实是正确的．如果 $b_i\in V_s(\mu_i),1\leq i\leq t-1,b_t\in V_{s-k+1}(\mu_t)$，则由 $\sum_{i\leq t}b_i=0$ 通过

运用 $(f-\mu_t)$ 可立即得出

$$0=\sum_{i\leq t-1}(f-\mu_t)(b_i)+(f-\mu_t)(b_t)\in\bigoplus_{i\leq t-1}V_s(\mu_i)\oplus V_{s-k}(\mu_t).$$

于是对 $i\leq t-1$, 有 $b_i=0$, 且由此也有 $b_t=0$. 对 k 和 t 运用归纳法，于是我们发现 $\sum_{i=1}^k V_s(\mu_i)$ 是直和.

剩下要证明的是 $V(\mu_j), 1\leq j\leq r$, 的直和 U 是整个 V. 由 U 在 V 中的补 V' 不等于 $\{0\}$ 的假设，我们将导出矛盾.

与 5.3.6 相类似，我们考虑映射 $f':V'\longrightarrow V'$, 它可从 $f|_{V'}:V'\longrightarrow V=U+V'$ 和投影 $U+V'\longrightarrow V'$ 的复合而得到. 我们第一个目的是要去证明： $\chi_{f'}(t)$ 是 $\chi_f(t)$ 的因式.

为此目的, 我们注意: 按照5.4.5, 每个 $V(\mu_j)$ 具有一组基, 关于这组基 $f|_{V(\mu_j)}$ 可用一串 Jordan 矩阵 $J_*(\mu_j)$ 放在对角线处而表示出来.

令 $\dim V(\mu_j)=m_j'$. 把用此法对 U 所确定的基 B_U 通过 V' 的一组基 B' 补充成 V 的一组基 B. f 关于 B 的矩阵表示在相应于 B_U 的部分上是一个三角矩阵. 由此可看出 $\chi_f(t)$ 的表达式

$$\chi_f(t)=(t-\mu_1)^{m_1'}\cdot\cdots\cdot(t-\mu_r)^{m_r'}\chi_{f'}(t).$$

于是 $\chi_{f'}(t)$ 是由形如 $(t-\mu_j)^{m_j-m_j'}$ 的幂的乘积所构成，这里至少对一个 j, 有 $m_j-m_j'\neq 0$. 考虑一个这样的 j. 于是 f' 在 V' 中具有一个关于特征值 μ_j 的特征空间 $U'\neq 0$. 这就是说

$$(f-\mu_j)(U')=\sum_{k=1}^r U_k\subset U,\quad \text{其中 } U_k\subset V(\mu_k).$$

因为对 $k\neq j$, $(f-\mu_j)|_{V(\mu_k)}:V(\mu_k)\longrightarrow V(\mu_k)$ 只具有非零的特征值 $\mu_k-\mu_j$, 所以这个映射是可逆的. 于是我们能对 $k\neq j$, 写出 $U_k=(f-\mu_j)(W_k), W_k\subset V(\mu_k)$. 令

$$U'-\sum_{k\neq j}W_k=U''.$$

于是有 $(f-\mu_j)(U'')=U_j\subset V(\mu_j)$, 因此 $U''\subset V(\mu_j)$, 所以由此得到 $U'\subset U$, 这是一个矛盾. □

现在我们来叙述关于线性映射的标准形的主要结果. 特征多项式总可分解成线性因子的假设提供了在 $M_K(n,n)$ 中的共轭类的一种分类. 如我们在 5.2.8.2 中所注意的那样, 这特别地在 $K=\mathbf{C}$ 时是成立的.

定理5.4.10 1. 设 $f:V\longrightarrow V$ 是线性的, 且 $\chi_f(t)$ 具有互不相同的特征值 $\{\mu_1,\cdots,\mu_r\}$ 的表示:

$$\chi_f(t)=(t-\mu_1)^{m_1}\cdot\cdots\cdot(t-\mu_r)^{m_r}.$$

于是 V 是 f-不变的子空间 $V_f(\mu_j)$ 的直和:

$$V=V_f(\mu_1)\oplus\cdots\oplus V_f(\mu_r).$$

$V_f(\mu_j)$ 中的每一个都具有一组基 B_j, 使得 $\Phi_{B_j}\circ f|_{V_f(\mu_j)}\circ\Phi_{B_j}^{-1}$ 是把 Jordan 矩阵 $J_*(\mu_j)$ 放在对角线上而构成的.

2. 设 $A\in M_K(n,n)$, 且

$$\chi_A(t)=(t-\mu_1)^{m_1}\cdot\cdots\cdot(t-\mu_r)^{m_r}$$

具有互不相同的 $\{\mu_1,\cdots,\mu_r\}$. 于是 A 共轭于一个形如

$$\begin{pmatrix} A(\mu_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A(\mu_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(\mu_r) \end{pmatrix}$$

的矩阵. 这里 $A(\mu_j)$ 是一个 (m_i,m_j)-矩阵, 它是把形如 $J_*(\mu_j)$ 的 Jordan 矩阵放在对角线上的方法所而构成的. 这就是所谓的 A 的 Jordan 标准形. 在上述每个子矩阵 $A(\mu_j)$ 中假设 Jordan 矩阵 $J_m(\mu_j)$ 是按 m 减少的次序排列的.

补充5.4.11 每个矩阵$A(\mu_j)$能用数偶

$$(m_{j,1},k_{j,1}),\cdots,(m_{j,p_j},k_{j,p_j})$$

来确定. 这里$k_{j,i}$是Jordan矩阵 $J_{m_{j,i}}(\mu_j)$的个数，它们满足

$$\sum_i m_{j,i}k_{j,i}=m_j,$$

且$m_{j,1}>\cdots>m_{j,p_j}$.

$M_K(n,n)$中特征多项式可分解成线性因子的两个矩阵A和A'是共轭的充要条件是它们具有同样的Jordan标准形.

证明: V在$V(\mu_j)$中的分解已在5.4.8中证得. 对$f|_{V(\mu_j)}$, 存在着一个表为Jordan标准形的矩阵表示, 见5.4.4. 5.4.7, 它表明了在给定μ_j后，$A(\mu_j)$是如何用数偶$\{(m_{j,i},k_{j,i}),1\le i\le p_j\}$来确定的. □

例5.4.12

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}6&5&-4&-\frac{11}{3}\\2&3&-2&-\frac{4}{3}\\1&1&0&-\frac{2}{3}\\6&6&-6&-3\end{pmatrix}.$$

$\chi_A(t)=(t-1)^2(t-2)^2$. 于是Jordan标准形是由两个 (2,2)矩阵 $A(1),A(2)$所组成的，这里$A(i)$是由$J_m(i)$构造出来的，$m=1$ 或2.

对特征值$\lambda=1$, 我们发现 $\mathrm{rg}\ (E-A)=2$, 于是对$\lambda=1$, 存在两个线性无关的特征向量，即

$$A(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

对特征值$\mu=2$, 得知 $\mathrm{rg}\ (2E-A)=3$. 于是$\mu=2$的特征空间是1维的，即

$$A(2)=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}.$$

5.5 常系数线性微分方程组 (复的情形)

我们用Jordan标准形来描述常系数1阶线性微分方程组的解. 在这里, 我们对域**R**和**C**用一个公共的记号K.

定义5.5.1 所谓常系数n个1阶线性微分方程是指形如

$$\dot{y}_j(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i(t), \quad 1 \leq j \leq n, \tag{5.4}$$

的一个表达式, 其中$A = (a_{ij}) \in M_K(n,n)$. 我们以后也写

$$\dot{y}(t) = A(y(t)) \quad \text{或简写为} \dot{y} = A(y). \tag{5.5}$$

所谓这样的方程组的一个解是指一个可微函数$y : t \in \mathbf{R} \mapsto y(t) = (y_1(t), \cdots, y_n(t)) \in K^n$, 使得 (5.4)是满足的.

命题5.5.2 $\dot{y} = A(y)$的解集$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{y} = A(y))$构成了连续映射$c : \mathbf{R} \longrightarrow K^n$的向量空间$\mathcal{C}(\mathbf{R}; K^n)$的一个子空间.

证明: 集合$\mathcal{C}(\mathbf{R}; K^n)$在加法$(c+c')(t) = c(t)+c(t')$及数量乘法$(\alpha c)(t) = \alpha c(t)$下构成一个向量空间, 这可如3.2.2.2中那样得出. 所以我们仅需对$\mathcal{L}$验证子空间判据: 由$\dot{y} = A(y), \dot{y}' = A(y')$可得出$(y \dot{-} y') = \dot{y} - \dot{y}' = A(y) - A(y') = A(y - y')$ 及$(\dot{\alpha y}) = \alpha\dot{y} = \alpha A(y) = A(\alpha y)$. □

引理5.5.3 设A和B是共轭的(n,n)-矩阵: $B=TAT^{-1}$. 于是$\dot{y} = A(y)$ 和$\dot{z} = B(z)$的解有关系式$y(t) = T^{-1}(z(t))$. 精确地说:

$$T^{-1} : z(t) \in \mathcal{L}(\dot{z}=B(z)) \longmapsto y(t)=T^{-1}(z(t)) \in \mathcal{L}(\dot{y}=A(y)) \tag{5.6}$$

是一个同构.

证明: $T^{-1} : K^n \longrightarrow K^n$是一个线性同构. 于是$T^{-1} : \mathcal{L}(\dot{z} = B(z)) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{R}; K^n)$也是线性的. 象集正好由$\mathcal{L}(\dot{y} = A(y))$来确定的事实是得自

$$\dot{z} = B(z(t)) \Longleftrightarrow$$

$$T^{-1}(\dot{z}(t)) = (T^{-1}(B(z(t))) = (T^{-1}BT)(T^{-1}(z(t))).$$

□

定理5.5.4　设 $B=(b_{ij})=(\delta_{ij}\lambda_j)$ 是对角矩阵. 于是解 $z(t)\in\mathcal{L}=\mathcal{L}(\dot{z}=B(z))$ 形如

$$z(t)=(b_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\cdots,b_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}),$$

这里 $b=(b_1,\cdots,b_n)\in K^n$ 可任取. 对每一个 $t_0\in\mathbf{R}$, 映射

$$\mathrm{ev}_{t_0}: z(t)\in\mathcal{L}(\dot{z}=B(z))\longmapsto z(t_0)\in K^n$$

(见3.3.3.2)是一个线性双射. 特别地, 有 $\dim\mathcal{L}=n$.

证明: $\dot{z}_j(t)=\lambda_j z_j(t)$ 等价于 $(\mathrm{e}^{-\lambda_j t}z_j(t))^{\cdot}=0$, 于是得到 $\mathrm{e}^{-\lambda_j t}z_j(t)=b_j=$ 常数. 对每个 $t_0\in\mathbf{R}$, $z_j(t_0)=\mathrm{e}^{\lambda_j t_0}b_j$ 是一个关于 $b_1,\cdots,b_n$ 的线性方程组, 其系数行列式不等于0. 即 $b\in K^n\longmapsto z(t)\in\mathcal{L}\longmapsto z(t_0)\in K^n$ 是线性同构. □

例5.5.5

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1(t)\\ \dot{y}_2(t)\\ \dot{y}_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{pmatrix},$$

这里出现的矩阵 A 共轭于对角矩阵 B:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&0&0\\1&1&0\\-\frac12&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12&0&0\\1&1&0\\-\frac12&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

由 $\dot{z}(t)=B(z(t))$ 的通解

$$(z_1(t),z_2(t),z_3(t))=(b_1\mathrm{e}^{t},b_2\mathrm{e}^{2t},b_3\mathrm{e}^{-t})$$

得出 $\dot{y}(t)=A(y(t))$ 的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1\mathrm{e}^t \\ -2b_1\mathrm{e}^t + b_2\mathrm{e}^{2t} \\ b_1\mathrm{e}^t + b_3\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

为了讨论一般的情形，我们先来证明：

引理 5.5.6 考察方程组 $\dot{w}(t)=J_n(\mu)(w(t))$. 于是这个方程组的通解形如

$$w_j(t) = p^{(j-1)}(t)\mathrm{e}^{\mu t}, \quad 1 \le j \le n.$$

这里 $p(t)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i \dfrac{t^i}{i!}$ 是一个阶 $\le n-1$ 的任意的多项式，且记 $p^{(j-1)}(t)$ 为其 $(j-1)$ 阶导数. 且对每一个 $t_0 \in \mathbf{R}$,

$$w(t) \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{w} = J_n(\mu)(w)) \longmapsto w(t_0) \in K^n$$

是一个线性双射. 特别地，有 $\dim \mathcal{L} = n$.

证明: 微分方程组是等价于 n 个方程式

$$\begin{aligned} &(\mathrm{e}^{-\mu t} w_j(t))^{\cdot} = \mathrm{e}^{-\mu t} w_{j+1}(t), \quad 1 \le j \le n-1, \\ &(\mathrm{e}^{-\mu t} w_n(t))^{\cdot} = 0. \end{aligned}$$

于是 $\mathrm{e}^{-\mu t}w_1(t)$ 的 n 阶导数等于 0, 即 $w_1(t)=p(t)\mathrm{e}^{\mu t}$, 这里 $p(t)$ 是一个阶 $\le n-1$ 的多项式. 于是对每个 $t_0 \in \mathbf{R}$, $w_j(t_0) = p^{(j-1)}(t_0)\mathrm{e}^{\mu t_0}, 1 \le j \le n$, 是关于 $p(t)$ 的系数 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 的一个线性方程组，且其系数行列式不为 0. □

例 5.5.7 当 $J_m(\mu)=J_2(1)$ 时，方程组的通解为 $w_1(t) = (a_1+a_2t)\mathrm{e}^t$, $w_2(t)=a_2\mathrm{e}^t$.

综上所述，我们有

定理 5.5.8 考察 $\dot{y}(t)=A(y(t)), A \in M_{\mathbf{C}}(n,n)$. A 是共轭于一个 5.4.10 中的 Jordan 标准形的矩阵 $B: B=TAT^{-1}$. 于是

通解 $y(t)$ 形如 $y(t) = T^{-1}(z(t))$, 其中 $z(t)$ 是 $\dot{z}(t) = B(z(t))$ 的通解.

上述的 $z(t)$ 可写成形如5.5.6的微分方程

$$\dot{w}(t) = J_m(\mu_j)(w(t))$$

的解之和, 这里 $J_m(\mu_j)$ 是沿着 B 的对角线放置的Jordan矩阵. 对每一个 $t_0 \in \mathbf{R}$,

$$y \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{y} = A(y)) \longmapsto y(t_0) \in \mathbf{C}^n$$

是一个线性双射. 特别地, $\dim \mathcal{L} = n$. □

5.6 R上的Jordan标准形*

矩阵 $A \in M_{\mathbf{R}}(n,n)$ 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 不一定完全地分解成线性因子, 见5.1.3. 而且由5.2.8.3知道, $\chi_A(t)$ 总可分解成线性的和二次因子. 我们在对实矩阵导入类似于5.4.10的Jordan标准形的一个标准形式时要用到这一点.

我们现在开始讨论关于 $\mathbf{R}$-向量空间 V 的复扩张 $V_{\mathbf{C}}$ 的一个定理:

定理5.6.1 1. 设 V 是一个 $\mathbf{R}$ 上的向量空间. 于是可用 V 如下地确定出一个 $\mathbf{C}$ 上的向量空间 $V_{\mathbf{C}}$: $V_{\mathbf{C}}$ 中的元素形如 $z = x + \mathrm{i}y$, 其中 x 和 y 属于 V. $V_{\mathbf{C}}$ 中的两个元素 $z = x + \mathrm{i}y$, $z' = x' + \mathrm{i}y'$ 的加法及与数量 $\gamma = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbf{C}$ 的乘法定义如下:

$$z + z' = (x + x') + \mathrm{i}(y + y'); \quad \gamma z = (\alpha x - \beta y) + \mathrm{i}(\alpha y + \beta x).$$

2. 也可把 $V_{\mathbf{C}}$ 视为 $\mathbf{R}$ 上的向量空间, 我们将数量乘法限制在域 $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ 上. 映射 $x \in V \longmapsto x + \mathrm{i}0 \in V_{\mathbf{C}}$ 是一个从 V 到 $\mathbf{R}$-向

---

* 译者注: Jordan标准形也称为若尔当典范形.

量空间 $V_{\mathbf{C}}$ 的 R- 线性单射. 我们将其象集与 V 恒同. 即我们把满足 $y=0$ 的 $z=x+\mathrm{i}y\in V_{\mathbf{C}}$ 也简单地写为 x.

3. 可用

$$(^{-}):V_{\mathbf{C}}\longrightarrow V_{\mathbf{C}};\quad z=x+\mathrm{i}y\longmapsto \bar{z}=x-\mathrm{i}y$$

去定义 $V_{\mathbf{C}}$ 上的复共轭映射, 且有 $(^{-})\circ(^{-})=\mathrm{id}$. $(^{-})$是 (作为 $\mathbf{R}$- 向量空间的) $V_{\mathbf{C}}$ 的一个同构. 子空间 $V\subset V_{\mathbf{C}}$ 正好是由 $(^{-})$ 的不变元素所组成, 即 $z\in V\Longleftrightarrow \bar{z}=z$.

4. V 的一组基 B 也是 $\mathbf{C}$- 向量空间 $V_{\mathbf{C}}$ 的一组基. $\mathbf{R}$- 向量空间 $V_{\mathbf{C}}$ 的一组基可用 $B\cup\mathrm{i}B$ 给出.

5. 对一个线性映射 $f:V\longrightarrow V$, 我们用 $f_C(x+\mathrm{i}y)=f(x)+\mathrm{i}f(y)$ 来定义扩张 $f_{\mathbf{C}}:V_{\mathbf{C}}\longrightarrow V_{\mathbf{C}}$. 于是 $f_{\mathbf{C}}|_V=f$. $f_{\mathbf{C}}$ 是线性的, 且 $\overline{f_{\mathbf{C}}(z)}=f_{\mathbf{C}}(\bar{z})$.

证明: 向量空间的公理2.1.1对 $V_{\mathbf{C}}$ 成立是显然的. 对2. 和3., 同样也是显然的. 对于4. 的证明, 我们注意: 由

$$x=\sum_b x_b b,\ y=\sum_b y_b b$$

可以得出

$$z=x+\mathrm{i}y=\sum_b(x_b+\mathrm{i}y_b)b,\ b\in B.$$

形如 $\sum_b\gamma_b b=0$, 其中 $\gamma_b=\alpha_b+\mathrm{i}\beta_b$, 此关系蕴含 $\sum_b\alpha_b b=0$ 和 $\sum_b\beta_b b=0$, 于是 $\alpha_b=\beta_b=\gamma_b=0$.

最后, 5. 得自

$$f_{\mathbf{C}}(\alpha z)=\alpha f_{\mathbf{C}}(z),\quad f_{\mathbf{C}}(\mathrm{i}z)=\mathrm{i}f_{\mathbf{C}}(z)$$

及

$$\overline{f_{\mathbf{C}}(z)}=\overline{f_{\mathbf{C}}(x+\mathrm{i}y)}=\overline{f(x)+\mathrm{i}f(y)}=f_{\mathbf{C}}(x-\mathrm{i}y)=f_{\mathbf{C}}(\bar{z}).$$

□

我们也需要下面的结果:

命题5.6.2 设V是一个$2m$维实向量空间, $V_{\mathbf{C}}$是它的复扩张.

如$E=\{e_j, e_{m+j}, 1\leq j\leq m\}$是$V$的一组基,则由

$$d_j=\frac{(\mathrm{i}e_j+e_{j+m})}{\sqrt{2}};\ \bar{d}_j=\frac{(-\mathrm{i}e_j+e_{j+m})}{\sqrt{2}},\ 1\leq j\leq m,$$

给出了$V_{\mathbf{C}}$的一组基$D=D(E)$.

反过来, $V_{\mathbf{C}}$的形如

$$\{d_j, \bar{d}_j, 1\leq j\leq m\}$$

的一组基D确定了$V_{\mathbf{C}}$的一组实基$E=E(D)$, 因而利用

$$e_j=\frac{d_j-\bar{d}_j}{i\sqrt{2}};\quad e_{j+m}=\frac{d_j+\bar{d}_j}{\sqrt{2}},\quad 1\leq j\leq m,$$

可确定出V的一组基. 对应关系$E\longmapsto D(E), D\longmapsto E(D)$是一对一可逆的. 相应的坐标变换

$$T_E^D=\Phi_E\circ\Phi_D^{-1}:\mathbf{C}^{2m}\longrightarrow\mathbf{C}^{2m}$$

(见3.4.11)为

$$T_E^D=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}E_m & -\mathrm{i}E_m\\ E_m & E_m\end{pmatrix},$$
$$T_E^{D^{-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}E_m & E_m\\ iE_m & E_m\end{pmatrix}.$$

于是矩阵

$$\begin{pmatrix}J_m(\mu) & 0\\ 0 & J_m(\overline{\mu})\end{pmatrix},\qquad \mu=\alpha+\mathrm{i}\beta,$$

变至矩阵

$$T_E^D \begin{pmatrix} J_m(\mu) & 0 \\ 0 & J_m(\overline{\mu}) \end{pmatrix} T_E^{D^{-1}} = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta E_m \\ \beta E_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= (\text{简记为}) J_{2m}(\alpha, \beta).$$

我们称 $J_{2m}(\alpha,\beta)$ 是一个实的 Jordan 矩阵.

证明: 结论得自简单的换算. □

现在我们在此能导出实的 Jordan 标准形.

定理 5.6.3 1. 设 V 是一个 n 维实向量空间, $f: V \longrightarrow V$ 是一个线性映射. 把 f 的特征多项式写成形如

$$\chi_f(t) = (t-\lambda_1)^{l_1} \cdot \cdots \cdot (t-\lambda_r)^{l_r} (t-\mu_1)^{m_1} (t-\overline{\mu}_1)^{m_1} \cdot \cdots \cdot (t-\mu_s)^{m_s} (t-\overline{\mu}_s)^{m_s}. \tag{5.7}$$

这里 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ 是互不相同的实根, $\{\mu_1, \bar{\mu_1}, \cdots, \mu_s, \bar{\mu_s}\}$ 是互不相同的非实根, $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j, \beta_j > 0$.

于是 V 具有一个形如

$$V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r) \oplus V(\mu_1, \bar{\mu_1}) \oplus \cdots \oplus V(\mu_s, \bar{\mu_s}).$$

的 f-不变子空间的分解, 这是一个直和, 在其中 $V(\lambda_i) = V_f(\lambda_i)$ 是特征值为 λ_i 的广义特征空间, $\dim V_f(\lambda_i) = l_i$.

$V(\mu_j, \bar{\mu_j})$ 是空间 $V_{\mathrm{C}}(\mu_j) \oplus V_{\mathrm{C}}(\bar{\mu_j})$ 中的实子空间. 这里的 $V_{\mathrm{C}}(\mu_j)$ 和 $V_{\mathrm{C}}(\bar{\mu_j})$ 分别是 f 的复扩张 $f_{\mathrm{C}}: V_{\mathrm{C}} \longrightarrow V_{\mathrm{C}}$ 的本征值 μ_j 和 $\bar{\mu_j}$ 的广义特征空间, $\dim V(\mu_j, \bar{\mu_j}) = 2m_j$.

$f|_{V(\lambda_i)}$ 关于适当的基的矩阵表示能用矩阵 $A(\lambda_i)$ 表出, 它是由在对角线上放置形如 $J_*(\lambda_i)$ 的 Jordan 矩阵所构成的.

$f|_{V(\mu_j, \bar{\mu_j})}$ 关于适当的基的矩阵表示能用矩阵 $B(\mu_j, \bar{\mu_j})$ 表出, 它是由在对角线上放置形如 $J_*(\alpha_j, \beta_j)$ 的实 Jordan 矩阵所构成的.

2. 设A是一个实的(n,n)-矩阵. 其$\chi_A(t)$可写成上述的形式 (5.7). 则A共轭于一个矩阵B, 它是通过把矩阵

$$A(\lambda_1),\cdots,A(\lambda_r),B(\mu_1,\bar{\mu_1}),\cdots,B(\mu_s,\bar{\mu_s})$$

放置在对角线上而构成的.

补充5.6.4 1. 两个实的(n,n)-矩阵A和A'是共轭的充要条件为它们之中的每一个均共轭于在5.6.3.2中所描述的同一个的标准形.

2. 一个标准形是用下列数据来确定的:

(a) 根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\mu_1,\bar{\mu_1},\cdots,\mu_s,\bar{\mu_s}$, 其中 $\mu_j=\alpha+\mathrm{i}\beta_j$, 而 $\beta_j>0$.

(b) 对每个$i,1\leq i\leq r$, 用整数偶

$$\{(m_{i,1},k_{i,1}),\cdots,(m_{i,p_i},k_{i,p_i})\},$$

其中$m_{i,1}>\cdots>m_{i,p_i}\geq 1,\sum_{j=1}^{p_i}m_{i,j}k_{i,j}=l_j=\lambda_i$的重数. 这里$m_{i,j}$对应于Jordan矩阵$J_{m_{i,j}}(\lambda_i)$, 而$k_{i,j}$表示这种矩阵在对角线上出现的次数.

(c) 对每个$j,1\leq j\leq s$, 用整数偶

$$\{(m'_{j,1},k'_{i,1}),\cdots,(m'_{i,p_i},k'_{i,p_i})\},$$

其中$m'_{j,1}>\cdots>m'_{j,q_j}\geq 1,\sum_{j=1}^{q_j}m'_{j,i}k'_{j,i}=2m_j=\mu_j$或$\bar{\mu_j}$的重数的两倍. 这里$m'_{j,i}$对应于实Jordan矩阵$J_{m'_{j,i}}(\alpha_i,\beta_i)$, 而$k'_{j,i}$表示这种矩阵在对角线上出现的次数.

证明: 5.6.3得自5.4.10及5.6.2: 我们考虑$f:V\longrightarrow V$的复扩张$f_{\mathbf{C}}:V_{\mathbf{C}}\longrightarrow V_{\mathbf{C}}$, 且对$f_{\mathbf{C}}$导入标准形式5.4.10. 对$\chi_f(t)=\chi_{f_{\mathbf{C}}}(t)$的每个非实的根$\mu_j=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j$, $\bar{\mu_j}$也作为具有与μ_j有相同重数m_j的根. 我们假设: $\beta_j>0$. 于是在$V_{\mathbf{C}}$表为$f_{\mathbf{C}}$-

不变子空间的分解中，我们有 $V_{\mathbf{C}}(\mu_j)$ 和 $V_{\mathbf{C}}(\bar{\mu_j})$, 且关于 $V_{\mathbf{C}}(\mu_j)$ 的一个适当的基， $f_{\mathbf{C}}|_{V_{\mathbf{C}}(\mu_j)}$ 具有一个表示，它是用一个将形如 $J_*(\mu_j)$ 的Jordan矩阵放置在对角线上而构成的矩阵来表出的.

设 $J_m(\mu_j)$ 是这样一个Jordan矩阵. 即在 $V_{\mathbf{C}}(\mu_j)$ 中我们有一组 $f_{\mathbf{C}}$- 不变的子空间及一组基 $\{d_1, \cdots, d_m\}$, 使得

$$f_{\mathbf{C}}(d_j) = \mu_j d_j + d_{j-1}, \quad 且\ d_0 = 0.$$

因为 $f_{\mathbf{C}}$ 是实的，即 $\overline{f_{\mathbf{C}}(z)} = f_{\mathbf{C}}(\bar{z})$. 于是成立

$$f_{\mathbf{C}}(\bar{d_j}) = \overline{\mu}_j \bar{d}_j + \bar{d}_{j-1}.$$

这就是说，$\{\bar{d_1}, \cdots, \bar{d_m}\}$ 是 $V_{\mathbf{C}}(\bar{\mu_j})$ 中的一个 m 维的 $f_{\mathbf{C}}$- 不变的子空间的基, 使得 $f_{\mathbf{C}}$ 可用 $J_m(\bar{\mu_j})$ 来表示. 于是空间 $V_{\mathbf{C}}(\mu_j) + V_{\mathbf{C}}(\bar{\mu_j})$ 分解成 $f_{\mathbf{C}}$- 不变的子空间，且具有形如 $D = \{d_1, \cdots, d_m, \bar{d_1}, \cdots, \bar{d_m}\}$ 的基，使得 $f_{\mathbf{C}}$ 限制在这些子空间上，用

$$\begin{pmatrix} J_m(\mu_j) & 0 \\ 0 & J_m(\overline{\mu}_j) \end{pmatrix}$$

来表示. 但由5.6.2, 我们知道：在这些子空间的实子空间上，f 关于由 D 所确定的实基 $E = E(D)$, 可用 $J_{2m}(\alpha_j, \beta_j)$ 来表出，这里 $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$. 于是证得了1.

2. 得自1., 在其中我们把 A 解释为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 中的线性映射. □

为了证明补充5.6.4, 我们注意：在5.6.4.2中所提出的数据(也称为不变量，因为它们仅依赖于共轭类)确定了标准形.

剩下要去证明：对两个互相共轭的标准形，所有这些数据都必须一致. 但这得自5.4.11, 因为这些数据与在那里所给出的数据是双方一一对应的.

例5.6.5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$\chi_A(t) = t^2(t^2+2)$. 于是$\lambda = 0$是重数为2的实根. $\mu = \mathrm{i}\sqrt{2}, \bar{\mu} = -\mathrm{i}\sqrt{2}$是非实数根. 可以证明：对 $\lambda = 0$, 不存在两个线性无关的特征向量. 于是A共轭于这样的一个矩阵，其中 $J_2(0)$及$J_2(0, \sqrt{2})$位于这个矩阵的对角线处.

5.7 线性常系数微分方程组（实的情形）

现在我们将前面所述的结果应用到具有实系数的线性微分方去程组. 复标准形5.4.10与实标准形5.6.3的唯一的区别是后者会遇到实的Jordan矩阵. 因此，我们首先对这种矩阵去证明5.5.6的类似结果.

命题5.7.1 方程组

$$\dot{z}(t) = J_{2m}(\alpha, \beta)(z(t))$$

的通解形如

$$z_j(t) = -(r^{(j-1)}(t)\cos\beta t + q^{(j-1)}(t)\sin\beta t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$
$$z_{j+m}(t) = (-r^{(j-1)}(t)\sin\beta t + q^{(j-1)}(t)\cos\beta t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$

这里$q(t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \dfrac{t^k}{k!}, r(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k \dfrac{t^k}{k!}$是阶$\leq m-1$的（实）多项式. 对每个$t_0 \in \mathbf{R}$, 这些多项式的$2m$个系数可以用值$z_j(t_0)$, $z_{j+m}(t_0)$, $1 \leq j \leq m$, 唯一地、线性地确定出来，这里 $\dim \mathcal{L} = 2m$.

证明: 从5.6.2中我们知道，实Jordan矩阵$J_{2m}(\alpha, \beta)$共轭于一个复的$(2m, 2m)$-矩阵，而$J_m(\mu)$, $J_m(\bar{\mu})$位于此矩阵的对角

线上，$\mu=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $\beta\geq 0$. 对具有这种矩阵的微分方程组，我们从 5.5.8 中知道其解为：

$$w_j(t)=p^{(j-1)}(t)\mathrm{e}^{\mu t};\qquad \overline{w}_j(t)=\overline{p}^{(j-1)}(t)\mathrm{e}^{\overline{\mu}t}.$$

这里我们把阶 $\leq m-1$ 的多项式 $p(t)$ 写成形如

$$p(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{2}}(a_k+\mathrm{i}b_k)\frac{t^k}{k!},\text{其中 } a_k,b_k \text{ 为实数}.$$

利用 $\mathrm{e}^{\mu t}=(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\mathrm{e}^{\alpha t}$, 我们发现如同在 5.6.2 中那样，用矩阵 T_E^D 可将从关于基 $D=\{d_j,\bar{d}_j,1\leq j\leq m\}$ 的复坐标 $\{w_j(t),\bar{w}_j(t),1\leq j\leq m\}$ 变换至关于其从属的实基 $E=E(D)$ 的实坐标 $\{z_j(t),z_{j+m}(t),1\leq j\leq m\}$. 于是

$$z_j=\frac{\mathrm{i}w_j-\mathrm{i}\overline{w}_j}{\sqrt{2}};\qquad z_{j+m}=\frac{w_j+\overline{w}_j}{\sqrt{2}}.$$

这正好给出了上面的表达式.

最后的结论得自 5.5.8. □

对一般的微分方程，我们现在有

定理 5.7.2 设 $\dot{y}(t)=A(y(t))$ 是一个具有实的 (n,n)-矩阵 A 的微分方程组. 设 $B=TAT^{-1}$ 是共轭于 A 的具有标准形式 5.6.3 的矩阵. 按照 5.5.3, 只需描述方程组 $\dot{z}(t)=B(z(t))$ 的解即可.

现在方程组的解 $z(t)$ 是下述类型的方程组的解的线性组合：即对 $\chi_A(t)=\chi_B(t)$ 的实根 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$, 它是形如

$$\dot{z}(t)=J_m(\lambda_i)(z(t))$$

的解，而对 $\chi_A(t)=\chi_B(t)$ 的非实根 $\{\mu_1,\bar{\mu}_1,\cdots,\mu_s,\bar{\mu}_s\}$, 它是形如

$$\dot{z}(t)=J_{2m}(\alpha_j,\beta_j)(z(t))$$

的解，这里 $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j, \beta_j > 0$. 这两组方程的解前面已经描述过了.

定义5.7.3 设 $\dot{y}(t) = A(y(t))$ 是一个实的方程组. 称其零解 $y_0(t) = 0$ 是稳定的，如果对每个解 $y(t)$, 成立

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0.$$

定理5.7.4 方程组 $\dot{y}(t) = A(y(t))$ 的零解 $y_0(t) = 0$ 是稳定的充要条件为 $\chi_A(t)$ 的所有特征值有负的实部，即对实的特征值 $\lambda_j < 0$, 而对复的特征值 $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$, 其中 $\alpha_j < 0$.

证明: 稳定性显然只与矩阵 A 的共轭类有关. 于是我们能假定 A 呈实标准形5.6.3. 在5.7.2中对解的描述指出:

如果 $\lambda_i < 0$, $\alpha_j < 0$, 则每个解是稳定的. 这是因为解是形如多项式乘以 $\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ 和多项式乘以 $\mathrm{e}^{\alpha_j t}$ 的线性组合.

但如果譬如说 $\lambda_1 \geq 0$, 则存在一个解，含有分量 $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$; 当 $t \to \infty$ 时，它不趋向于零. 如果譬如说 $\alpha_1 \geq 0$, 则相应的事实成立. □

定义5.7.5 所谓 n 阶常系数线性齐次微分方程是指一个形如

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = 0 \tag{5.8}$$

的表达式. 这里的 a_i 属于 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 其解分别是一个可微映射 $x : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ 或 $x : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, 它满足上述方程.

定理5.7.6 5.7.5中的 $n > 1$ 的微分方程 (5.8) 的解 $x(t)$ 唯一地对应于方程组 $\dot{y}(t) = A(y(t))$ 的解，这里 A 由

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

给出，于是

$$\dot{y}_i(t) = y_{i+1}(t),\ i < n,$$
$$\dot{y}_n(t) = -a_0 y_1(t) - \cdots - a_{n-1} y_n(t).$$

此外，成立 $x(t) = y_1(t)$.

证明: 代入验证即可. □

例 5.7.7 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \omega > 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(t) = t^2 + \omega^2,\ \mu = \mathrm{i}\omega,\ \overline{\mu} = -\mathrm{i}\omega.$$

相应的实 Jordan 矩阵为

$$TAT^{-1} = J_2(0, \omega),$$

且

$$T = \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2\omega} & \dfrac{1}{2\omega} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

按照 5.7.1, 方程组 $\dot{z} = J_2(0, \omega)(z)$ 的解为:

$$z_1(t) = -b_0 \cos \omega t - a_0 \sin \omega t,$$
$$z_2(t) = -b_0 \sin \omega t + a_0 \cos \omega t.$$

于是通解 $x(t)$ 是 $T^{-1}\binom{z_1}{z_2}$ 中的第一个元素，即 $x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$, a, b 为任意实数.

习题

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{\mathbf{R}}(3, 3).$$

确定A的特征值和特征空间. A是可对角化的吗(即A共轭于一个对角矩阵吗)?

2. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \in M_{\mathbf{C}}(6,6).$$

试确定A的特征值. A是可对角化的吗?

(提示: 用$(x+2)^2$去除A的特征多项式.)

3. 设$V=C^{\infty}(\mathbf{R})$是任意次可微的实函数$f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$的向量空间. 考察自同态

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:\ V\longrightarrow V;\quad f\longmapsto\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f.$$

证明: 每个$\lambda\in\mathbf{R}$都是$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的特征值, 并确定特征值为0的特征空间.

是否存在有限维的实向量空间的自同态, 使得每一个$\lambda\in\mathbf{R}$是它的特征值?

4. 分解实多项式

$$p(t)=t^4+1,\quad q(t)=t^5-t^4+3t^3-3t^2+2t-2$$

为阶≤ 2的实多项式.

5. 试将矩阵$A\in M_{\mathbf{C}}(4,4)$分类成Jordan标准形.

6. 设$f,g:V\longrightarrow V$是自同态, 且$f\circ g=g\circ f$. 证明: 如果U是f的一个特征空间, 则成立$g(U)\subset U$. 如果U是f的一个广义特征空间, 则$g(U)\subset U$同样成立.

7. 设 $V=\{f\in\mathbf{R}[x];\ \text{Grad}\ f\leq 5\}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:V\longrightarrow V$ 为映射. 试确定 V 的一组基，使得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 关于这组基为 Jordan 标准形.

8. 设 $f:V\longrightarrow V$ 是域 K 上的向量空间 V 的一个自同态. $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$ 是一个多项式，且 $a_i\in K$. 于是 $p(f)=a_0+a_1f+\cdots+a_kf^k$ 是 V 的一个自同态. 证明：如果 λ 是 f 的特征值，则 $p(\lambda)$ 是 $p(f)$ 的特征值.

9. 设 $\sigma:\{1,\cdots,n\}\longrightarrow\{1,\cdots,n\}$ 是一个置换，则用 $f_\sigma:\mathbf{C}^n\longrightarrow\mathbf{C}^n;f_\sigma(x_1,\cdots,x_n)=(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})$ 可定义一个线性映射. 试确定 f_σ 的全部特征值.

10. 设 A 是一个实的 (3,3)- 矩阵，且 $A\,{}^tA={}^tAA=E_3$.

(a) 证明：$\det A=\pm1$.

(b) A 的特征值 $\lambda\in\mathbf{C}$ 的模等于1.

(提示：由 $A(x)=\lambda x$ 可得出 ${}^tA(x)=\lambda^{-1}x$.)

(c) 至少有一个特征值是 ±1. 于是精确地说，如果 $\det A=1$, 则1是特征值.

(d) 写出 A 的实 Jordan 标准形.

11. 设 $N\in M_K(n,n)$ 是一个幂零矩阵，即 $N^n=0$. 证明：

(a) N 没有特征值1. 于是 E_n-N 是可逆的.

(b) 成立：$(E_n-N)^{-1}=\sum_{i=0}^{n}N^i$.

(c) 由此确定矩阵

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\\0&0&1&2&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

的逆.

12. 试确定下列实矩阵的实 Jordan 标准形:

$$A=\begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\18&-9&-6\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3&-1&1&-7\\9&-3&-7&-1\\0&0&4&-8\\0&0&2&-4\end{pmatrix}.$$

提示: 对 A: 证明所有特征值是不相等的.

对 B: 所有三个特征值是相等的.

对 C: 特征值全为 0, 于是矩阵是幂零的, 进而成立 $C^2=0$.

13. 试确定

$$D=\begin{pmatrix}0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\\a&0&0&0\end{pmatrix},a\in\mathbf{R}$$

的实 Jordan 标准形.

提示: 在 $\mathbf{C}$ 中的特征值形如 $a(\cos\frac{2\pi j}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi j}{4})$, $j=1,2,3,4$.

第 6 章

度量向量空间

6.1 酉向量空间

现在我们要在 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的向量空间 V 上考虑一个附加的结构：数量积. 在本节中我们先考虑 $\dim V<\infty$ 的情形. 可是对应用而言，某些无限维向量空间恰好是重要的，我们将在以后的章节中作进一步讨论.

K 表示域 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 设 $(\bar{\ }) : \mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}$ 是复共轭 $z=x+\mathrm{i}y\longmapsto\bar{z}=x-\mathrm{i}y$, 见 5.6.1.3. 在 $\mathbf{R}$ 上 $(\bar{\ }) : \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ 等于 $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$.

定义 6.1.1 设 V 是一个 K 上的向量空间，$K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 所谓 V 上的一个数量积是指一个映射

$$<\ ,\ >: (x,y)\in V\times V\longmapsto <x,y>\in K,$$

它具有性质：

1. $<\alpha x+\alpha' x',y>=\alpha<x,y>+\alpha'<x',y>$. (对第一个变量的线性性质)

2. $<y,x>=\overline{<x,y>}$. (对称性)

3. $x\neq 0\Rightarrow <x,x>>0$.

我们称具有数量积 $<\ ,\ >$ 的向量空间 V 为酉空间. 在 $K=\mathbf{R}$ 的情形，我们也称其为欧氏向量空间.

注解 6.1.2 映射 $<\ ,\ >$ 关于第二个变量是共轭 - 线性的：

$$<x,\beta y+\beta' y'>=\bar{\beta}<x,y>+\bar{\beta}'<x,y>.$$

这可立即得自 1. 和 2. 当 $K=\mathbf{R}$ 时，这就是通常的线性性质.

命题 6.1.3 考察 $\{V,<\ ,\ >\}$. 设 U 是 V 的子空间，于是 $<\ ,\ >$ 在 $U\times U$ 上的限制给出了 U 上的一个数量积.

证明: 显然. □

例6.1.4 1. 在$V=K^n$上，我们用

$$<x,y>=\sum_i \xi_i\bar{\eta}_i$$

定义典范数量积，这里$x=(\xi_i), y=(\eta_j)$.

2. 设$I=[a,b]$是$\mathbf{R}$中的一个紧致区间. 在3.2.2.2中我们已经导入了连续函数$f:I\longrightarrow R$的向量空间$\mathcal{C}(I;\mathbf{R})$. 现在我们也考虑连续函数$f:I\longrightarrow \mathbf{C}$的向量空间$\mathcal{C}(I;\mathbf{C})$, 并对这两者统一地记为$\mathcal{C}(I;K)$.

在$\mathcal{C}(I;K)$上的典范数量积定义为

$$<f,g>=\int_I f(t)\bar{g}(t)\mathrm{d}t.$$

6.1.1中的性质1, 2, 3是显然的.

定义6.1.5 考虑$\{V,<\ ,\ >\}$.

1. V中的元素x和y称为是互相正交的, 如果$<x,y>=0$. 由于6.1.1.2, 这等价于$<y,x>=0$. 今后我们也写$x\perp y$或$y\perp x$.

2. 称V的子空间U和U'是互相正交的，并记为$U\perp U'$或者$U'\perp U$, 如果对所有$x\in U$, $x'\in U'$, 有$x\perp x'$.

3. 所谓$x\in V$的绝对值或范数是指数$|x|=\sqrt{<x,x>}\geq 0$.

4. 设$S=\{d_\iota,\iota\in I\}$是V中的一个族. 称S是一个标准正交系 (ON- 系统), 如果对$\iota=\kappa$, $<d_\iota,d_\kappa>=\delta_{\iota\kappa}=1$, 对$\iota\neq\kappa$, $<d_\iota,d_\kappa>=0$. 此外，如果S是一组基，则我们称其为一组标准正交基(ON- 基).

命题6.1.6 ON- 系统$S=\{d_\iota,\iota\in I\}$是自由的.

证明: 由关系式$\sum_{\iota\in I}\alpha_\iota d_\iota=0$可得到

$$0=<\sum_{\iota\in I}\alpha_\iota d_\iota,\sum_{\kappa\in I}\alpha_\kappa d_\kappa>=\sum_{\iota,\kappa}\alpha_\iota\bar{\alpha}_\kappa\delta_{\iota\kappa}=\sum_\iota\alpha_\iota\bar{\alpha}_\iota,$$

于是对所有 $\iota \in I$, 有 $\alpha_\iota = 0$. □

例6.1.7 我们考察6.1.4中的例子.

1. $|x| = \sqrt{\sum_i \xi_i \bar{\xi}_i}$. K^n 的典范基 $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ 是一个ON-基.

2. $|f| = \sqrt{\int\limits_I f(t)\bar{f}(t)\mathrm{d}t}$.

设 $K = \mathbf{C}, I = [a,b]$. 令 $b - a = L$. 于是

$$\{f_m(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} mt}{L}}, m \in \mathbf{Z}\}$$

是 $\mathcal{C}(I;\mathbf{C})$ 的一个ON-系统. 这是因为

$$\int_a^b f_m(t)\bar{f}_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}(m-n)t}{L}}\mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & m-n=0 \\ 0, & m-n \neq 0 \end{cases}.$$

特别地, 我们考虑情形 $I = [-\pi,\pi]$. 于是由 $f_m(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{\sqrt{2\pi}}$, 我们得到了 $\mathcal{C}([-\pi,\pi];\mathbf{R})$ 的一个ON-系统:

$$\{f_0(t), \frac{(f_m(t)+f_{-m}(t))}{\sqrt{2}}, \frac{(f_m(t)-f_{-m}(t))}{\mathrm{i}\sqrt{2}}, m = 1,2,\cdots\}$$
$$= \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mt, m = 1,2,\cdots\}.$$

我们现在来讨论Gram-Schmidt正交化方法. 它表明如何从 $\{V, <\ ,\ >\}$ 中的一个可数的自由集合出发唯一地确定出一个ON-系统.

引理6.1.8 设 $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$ 是酉向量空间 V 中的一组可数的 (有限或无限的) 自由子集. 于是存在恰好一个ON-系统 $D = \{d_1, d_2, \cdots\}$, 使得

$$d_k = \sum_{j \leq k} \alpha_{jk} b_j, \quad \alpha_{kk} > 0.$$

于是特别地，对每个 k, 有 $[\{b_1,\cdots,b_k\}]=[\{d_1,\cdots,d_k\}]$.

证明: 由我们的要求可以知道， d_1 被确定为 $\frac{b_1}{|b_1|}$. 假设我们已经确定了具有所要求的性质的 ON- 系统 $\{d_1,\cdots,d_{k-1}\}$. 于是我们能置 d_k 为 $\{d_1,\cdots,d_{k-1},b_k\}$ 的线性组合:

$$d_k=\alpha_k b_k+\sum_{j<k}\beta_j d_j.$$

由于对 $j<k$, 有 $<d_k,d_j>=0$ 以及对 $i,j<k$, 有 $<d_i,d_j>=\delta_{ij}$, 可得出 $0=\alpha_k<b_k,d_j>+\beta_j$. 于是

$$d_k=\alpha_k(b_k-\sum_{j<k}<b_k,d_j>d_j).$$

于是由 $<d_k,d_k>=1$ 及 $\alpha_k>0$, α_k 也可被确定. 因为 $\alpha_k\neq 0$, 所以

$$[\{d_1,\cdots,d_k\}]=[\{b_1,\cdots,b_k\}].$$

□

定理6.1.9 设 V 是酉空间， $\dim V<\infty$. 于是 V 具有一个 ON- 基 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$.

考察具有典范 $<\ ,\ >$ 的 K^n. 于是同构 $\Phi_D:V\longrightarrow K^n$ (见 2.5.8) 是等距，即

$$<\Phi_D(x),\Phi_D(y)>=<x,y>.$$

证明: 第一部分得自 6.1.8. 为了证明 Φ_D 是一个等距，我们写 $x=\sum_j\xi_j d_j, y=\sum_k\eta_k d_k$. 于是

$$\Phi_D(x)=\sum_j\xi_j e_j,$$

$$\Phi_D(y)=\sum_k\eta_k e_k,$$

$$< \Phi_D(x), \Phi_D(y) > = \sum_j \xi_j \bar{\eta}_j.$$

另一方面，利用$< d_j, d_k >= \delta_{jk}$，我们有

$$\begin{aligned} < x, y > &=< \sum_j \xi_j d_j, \sum_k \eta_k d_k > \\ &= \sum_{j,k} \xi_j \bar{\eta}_k < d_j, d_k >= \sum_j \xi_j \bar{\eta}_j. \end{aligned}$$

□

注: 在 6.1.9 中 $\dim V < \infty$的假设是本质的. 在6.3中我们将会看到在某种情况下是如何将上述结果转移至 $\dim V = \infty$的情形. 下面成立的结果没有维数的限制.

引理6.1.10 设E是酉空间V的ON-生成系. 如果对所有的$e \in E$, 有$< x, e >= 0$, 则可得出$x = 0$.

证明: 写$x = \sum_{e \in E} \alpha_e e$. 由

$$< x, x >=< x, \sum_{e \in E} \alpha_e e >= \sum_{e \in E} \bar{\alpha}_e < x, e >= 0$$

可得出$x = 0$. □

推论6.1.11 设$D = \{d_1, \cdots, d_n\}$是酉空间V的ON-基, 于是对V中的x和y, 成立

$$x = \sum_j < x, d_j > d_j; \quad < x, y >= \sum_j < x, d_j > \overline{< y, d_j >}.$$

注: 将它与3.2.11作比较.

证明: 对所有k, 有

$$< x - \sum_j < x, d_j > d_j, d_k >$$

$$=< x, d_k > - \sum_j < x, d_j >< d_j, d_k >$$
$$=< x, d_k > - < x, d_k >= 0.$$

应用6.1.10, 于是得出第二个等式. □

定理6.1.12 设V是酉空间, U是V的一个子空间. 定义

$$U^\perp = \{y \in V; < x, y >= 0, \text{对所有的 } x \in U\}.$$

于是$U^\perp$是V的子空间, 称它为正交于U的子空间. 成立$U \cap U^\perp = \{0\}$. 当 $\dim V < \infty$时, 则

$$V = U + U^\perp.$$

即$U^\perp$是U在2.6.1 意义下的补. 一般地: 设$A \subset V$是一个任意的子集. 定义$A^\perp = \{y \in V; < x, y >= 0$, 对所有的$x \in A\}$. 于是$A^\perp$是一个子空间.

证明: 显然$A^\perp$满足子空间判据2.1.5. 现设 $\dim V = n$. 当$U = \{0\}$时, 有$U^\perp = V$, 而当$U = V$时, 按照6.1.10, 有$U^\perp = \{0\}$. 于是我们能假设$0 < k = \dim U < n$. 考虑V作为一个带有诱导的数量积的酉向量空间, 见6.1.3. 按照6.1.9, U具有一组ON-基$\{d_1, \cdots, d_k\}$. 利用6.1.8中的方法, 我们把这些元素通过$\{d_{k+1}, \cdots, d_n\}$补充成V的一组ON-基. 我们断言:

$$U^\perp = U' = [\{d_{k+1}, \cdots, d_n\}].$$

事实上, 总有$U' \subset U^\perp$. 如果$y \in U^\perp$, 则可写为$y = \sum_j \eta_j d_j$. 于是对每个$j \geq k$, 必成立$\eta_j = 0$, 于是$U^\perp \subset U'$. □

我们回忆3.2.5中的自然配对$< , >: V \times V^* \longrightarrow K$. 对酉空间$V$, 自然配对可用数量积来描述:

定理6.1.13 设V是酉空间，$\dim V < \infty$. 对$y \in V$，定义$\sigma(y) =< \ , y >$. 即

$$\sigma(y) : x \in V \longmapsto < x, y > \in K.$$

于是$\sigma(y) \in V^*$，且对所有$x \in V$，有$< x, \sigma(y) >=< x, y >$.

反过来，如果$y^* \in V^*$，则由此可确定一个$\tau(y^*) \in V$，使得对所有$x \in V$，有$< x, y^* >=< x, \tau(y^*) >$.

如此定义的映射

$$\sigma : V \longrightarrow V^*; \quad \tau : V^* \longrightarrow V$$

是互为逆元的：$\tau = \sigma^{-1}$. τ和σ是共轭－线性的，即

$$\sigma(\beta y + \beta' y') = \bar{\beta}\sigma(y) + \bar{\beta}'\sigma(y'),$$
$$\tau(\beta y^* + \beta' y'^*) = \bar{\beta}\tau(y^*) + \bar{\beta}'\tau(y'^*).$$

证明: $\sigma(y) \in V^*$得自6.1.1.1. 关于σ的共轭线性性质得自6.1.1.2.

对$y^* = 0$，令$\tau(y^*) = 0$. 对$y^* \neq 0$，我们按照6.1.12，对V有分解$V = U + U^\perp$，这里$U = \ker\ y^*$，$\text{codim}\ U = 1$，见3.2.3，于是$\dim U^\perp = 1$. 在$U^\perp$中选一个$e, |e| = 1$. 如果我们令$\tau(y^*) =< e, y^* > e$，则我们就得到了所希望的元素：对$x \in U$，有$< x, \tau(y^*) >= 0$，而对$x =< x, e > e \in U^\perp$，有

$$< x, \tau(y^*) >=< x, e >< e, \tau(y^*) >=< x, e >< e, y^* >=< y^*, x > .$$

于是从

$$< x, y >=< x, \sigma(y) >=< x, \tau \circ \sigma(y) >$$

及

$$< x, y^* >=< x, \tau(y^*) >=< x, \sigma \circ \tau(y^*) >,$$

我们就可得出结论的其余部分. □

推论6.1.14 设$D = \{d_1, \cdots, d_n\}$是酉空间V的一组基. 则D是ON-基的充要条件为其象集

$$\sigma D = \{\sigma(d_1), \cdots, \sigma(d_n)\}$$

是V^*的对偶基D^*.

证明: $< d_i, \sigma(d_j) >= \delta_{ij}$是与$< d_i, d_j >= \delta_{ij}$等价的. □

注解6.1.15 我们现在在这里给出一个例子, 它表明了在 $\dim V = \infty$的情形, 6.1.12不一定成立. 对于进一步的例子, 可参见6.3.4.2.

现考虑具有6.1.4.2中的典范数量积$<\ ,\ >$的$V = \mathcal{C}(I; \mathbf{R})$. 分析中熟知的Weierstraß逼近定理说:

"设$f \in \mathcal{C}(I; \mathbf{R})$, 于是对每个$\varepsilon > 0$, 存在一个(依赖于$\varepsilon$的)多项式$p$, 使得$\sup_{t \in I} |f(t) - p(t)| < \varepsilon$".

我们考虑在V中的多项式的子空间U. 显然$U \neq V$, 我们指出: $U^\perp = \{0\}$.

这是因为如果$f \in U^\perp$, 则令$\max_{t \in I} |f(t)| = c$. 选$\varepsilon > 0$, 使得$0 \le c\varepsilon(b - a) \le \dfrac{< f, f >}{2}$, 这里$I = [a, b]$. 按照逼近定理, 存在$p \in U$, 使得对所有的$t \in I$, 有$|f(t) - p(t)| < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} 0 =< f, p > &=< f, f > - < f, f - p > \\ &\ge< f, f > - \int_I |f(t)||f(t) - p(t)| \mathrm{d}t \\ &\ge< f, f > - \int_I c\varepsilon \mathrm{d}t \\ &\ge \frac{< f, f >}{2}, \end{aligned}$$

即

$$f = 0.$$

6.2 赋范向量空间

在酉空间V中，我们对每个$x \in V$定义了范数

$$|x|=\sqrt{<x,x>}.$$

现在我们来研究K上的向量空间V, 要在V上定义一个具有一些简单性质的范数，这里$K=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$. 特别地，我们要应用它来定义V上的一个度量及拓扑.

赋范空间的类包含了酉空间的类.

定义6.2.1 设V是一个K-向量空间， $K=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$. 所谓V上的一个范数是指一个映射

$$|\ \ |: V \longrightarrow \mathbf{R}; \quad x \longmapsto |x|,$$

它具有下列性质：

1. $|x| \geq 0$, 且$|x|=0$仅对$x=0$成立.
2. $|\alpha x|=|\alpha||x|$.
3. $|x+y| \leq |x|+|y|$(三角形不等式).

如果在V上已给定了一个范数，则我们称V是赋范的.

例6.2.2 1. 在$V=K^n$上对$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 用$|x|_\infty=\sup_i|\xi_i|$来定义其最大范数 (也称为最大模).

2. 在$V=\mathcal{C}(I;K)$上的最大范数定义为

$$|f|_\infty=\max\{|f(t)|, t \in I\}.$$

为了证明由数量积$<,>$所导入的范数$|x|=\sqrt{<x,x>}$是在6.2.1意义下的范数，我们先来证明：

引理6.2.3 设V是酉空间. 于是成立着所谓的Cauchy - Schwarz不等式：

$$<x,y>\overline{<x,y>}=|<x,y>|^2 \leq <x,x><y,y>.$$

这里等号仅当x和y线性相关时成立.

证明: 我们可以限于$x\neq 0$和$y\neq 0$的情形. 由

$$\begin{aligned}0 &\leq <x-\alpha y, x-\alpha y>\\ &=<x,x> -\bar{\alpha}<x,y> -\alpha<y,x> +\alpha\bar{\alpha}<y,y>\end{aligned}$$

并取$\alpha=\dfrac{<x,y>}{<y,y>}$可得出不等式. 等号仅当$x-\alpha y=0$时成立.

□

命题6.2.4 对酉空间V, $|x|=\sqrt{<x,x>}$是一个范数.

证明: 6.2.1的1和2是显然的. 为了证明3, 注意对$z\in\mathbf{C}$, 有 $(z-\bar{z})^2\leq 0$. 于是 $z+\bar{z}\leq 2|z|$. 令 $<x,y>=z$, 于是 $<x,y>+<y,x>\leq 2|<x,y>|$. 因此利用6.2.3, 我们有

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &=<x+y,x+y>\\ &=<x,x>+<x,y>+<y,x>+<y,y>\\ &\leq |x|^2+2|x||y|+|y|^2\\ &=(|x|+|y|)^2.\end{aligned}$$

□

定义6.2.5 设V是赋范空间.

1. 所谓V中的x和y的距离$d(x,y)$是指数$|x-y|=|y-x|$.

2. 设$x\in V, r>0$. 以x为心, 半径为r的开球和闭球分别定义为

$$B_r(x)=\{y\in V; d(y,x)<r\};\quad \bar{B}_r(x)=\{y\in V; d(y,x)\leq r\}.$$

以x为心, 半径为r的球面定义为

$$S_r(x)=\{y\in V; d(y,x)=r\}.$$

3. 称子集 $A \subset V$ 是开的，如果对每个 $x \in A$，存在一个 $r = r(x) > 0$，使得 $B_r(x) \subset A$. 称 $B \subset V$ 是闭的，如果 $V \backslash B$ 是开的.

命题6.2.6 利用在6.2.5中所定义的距离，V 成为一个度量空间. 即

1. $d(x,y) \geq 0$，且 $d(x,y) = 0$ 仅对 $x = y$ 时成立;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (三角形不等式).

证明: 这可利用6.2.1中的定义而得到. □

注解6.2.7 由此得出，用6.2.5.3可在 V 上定义一个拓扑. 即在 V 的子集 A 的集合中特定了一个子集合 $\mathcal{O}$ (其中的元素称为 V 的开集)，使得 $\mathcal{O}$ 中元素的和集仍然属于 $\mathcal{O}$，同样地，$\mathcal{O}$ 中有限个元素的交集也仍然属于 $\mathcal{O}$.

由此可给出在两个赋范向量空间之间的映射 $f: V \longrightarrow V'$ 是连续的定义. 即 f 是连续的，如果:

对每个开的 $A' \subset V'$，$f^{-1}(A') \subset V$ 也是开的. 或者: 对闭的 $B' \subset V'$，$f^{-1}(B') \subset V$ 是闭的. 或者: 对给定的 $x \in V, \varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$，使得 $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

命题6.2.8 设 V 是赋范空间. 则

1. $x \in V \longmapsto |x| \in \mathbf{R}$ 是连续的.
2. 对每个 $x \in V$，映射

$$T_x : V \longrightarrow V; \quad y \longmapsto x + y$$

是连续双射，且以 T_{-x} 为其连续逆.

证明: 对2.: $T_x B_r(y) = B_r(x+y)$.

对1.: 由2.，我们只需研究这个映射在点 $x = 0$ 处的连续性. $B_\varepsilon(0)$ 在 $|\ \ |$ 下的象位于 $(-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbf{R}$ 之中. □

定义6.2.9 1. 设 (M,d) 是一个度量空间，即 $d:(p,q) \in M \times M \longmapsto d(p,q) \in \mathbf{R}$ 是一个具有6.2.6中性质的映射. 称 (M,d)

是完备的，如果 M 中的每个 Cauchy 序列在 M 中具有一个极限.

2. 所谓 Banach 空间是指一个赋范的向量空间，它关于其所导入的度量 6.2.5.1 是完备的.

注解 6.2.10 我们回忆在度量空间 (M, d) 中 Cauchy 序列的概念；这是一个序列 $\{p_n\}$，使得对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $n(\varepsilon)$，使得对 $n, m > n(\varepsilon)$，有 $d(p_n, p_m) < \varepsilon$. 如果对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个 $n(\varepsilon)$，使得当 $n > n(\varepsilon)$ 时，有 $d(p, p_n) < \varepsilon$，则称 $\{p_n\}$ 收敛，且以 p 为极限.

每个度量空间可扩张到一个完备的度量空间. 对于赋范空间 V 的情形，这种扩张可以进行，使得它仍然是一个赋范向量空间，我们可以用 V 的范数的极限来定义极限的范数.

定义 6.2.11 称 V 上的两个范数 $|\ \ |, |\ \ |'$ 是拓扑等价的，$|\ \ | \sim |\ \ |'$，如果存在正数 a, A，使得对所有 $x \in V$，有

$$a|x|' \leq |x| \leq A|x|'.$$

注：显然这是在 V 的范数的集合上的一个等价关系. 这是因为 $|\ \ | \sim |\ \ |$，及 $a|x|' \leq |x| \leq A|x|'$ 蕴含 $A^{-1}|x| \leq |x|' \leq a^{-1}|x|$，即它是对称的. 最后，如果还有 $a'|x|'' \leq |x|' \leq A'|x|''$，则 $aa'|x|'' \leq |x| \leq AA'|x|''$.

命题 6.2.12 当 V 关于 $|\ \ |$ 是一个 Banach 空间，则关于任何与 $|\ \ |$ 拓扑等价的 $|\ \ |'$，它也是一个 Banach 空间.

证明：$|x - y| < \varepsilon$ 蕴含 $|x - y|' \leq a^{-1}|x - y| < a^{-1}\varepsilon$. □

定理 6.2.13 当 $\dim V < \infty$ 时，V 上任意两个范数 $|\ \ |$ 和 $|\ \ |'$ 都是拓扑等价的. 于是得出：V 总是一个 Banach 空间.

证明：设 $S_1'(0) = \{x \in V; |x|' = 1\}$ 是 $\{V, |\ \ |'\}$ 中以 0 为心，半径为 1 的球面. $S_1'(0)$ 是闭的和有界的，于是是紧致的.

$|\ |: V \longrightarrow \mathbf{R}$是连续的. 于是存在数$a, A > 0$, 使得对 $x \in S_1'(0)$,

$$a \leq |x| \leq A,$$

于是$a|x|' \leq |x| \leq A|x|'$.

现在注意：带有最大范数的K^n是完备的，这里$K = \mathbf{R}$或$\mathbf{C}$. 即$|y - x| < \varepsilon$是等价于对所有的$j = 1, \cdots, n$, 有$|\eta_j - \xi_j| < \varepsilon$.

考虑一个线性同构 $\Phi : V \longrightarrow K^n$. V上的一个范数是用$|x| = |\Phi(x)|_\infty$来定义的. □

例6.2.14 $\mathcal{C}(I, K)$关于最大范数是完备的. 这是分析中的一个著名的定理：连续函数$f_n : I \longrightarrow K$的一致收敛序列$\{f_n\}$以一个连续函数作为其极限.

反之，关于6.1.7.2的范数$|f| = \sqrt{< f, f >}$, $\mathcal{C}(I; K)$是不完备的：例如，考虑$I = [0, 2]$和序列

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n, & \text{对 } 0 \leq t < 1; \\ 1, & \text{对 } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

$$|f_n - f_m|^2 = \int_0^1 (t^n - t^m)^2 \mathrm{d}t = \frac{2(n - m)^2}{(2n + 1)(2m + 1)(n + m + 1)}.$$

于是$\{f_n\}$是一个Cauchy 序列. 因对$0 \leq t < 1$, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t) = 0$, 且对 $1 \leq t \leq 2$, $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = 1$, 极限 $f \in \mathcal{C}(I; K)$有值$f|[0, 1) = 0$及$f|[1, 2] = 1$, 而这显然是不可能的.

定义6.2.15 V上的一个范数$|\ |$称为是严格凸的，如果对 $S_1(0)$中的$x, y, x \neq y$, 可得出$|\dfrac{x + y}{2}| < 1$. 换言之，球面$S_1(0)$上两个不同点的连接线段的中点属于$B_1(0)$.

命题6.2.16 对于一个酉空间V的范数$|x| = \sqrt{< x, x >}$, 成立：

1. $|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - < x, y > - \overline{< x, y >}$(余弦定理).
2. $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + |y|^2$(平行四边形公式).

于是特别地，这个范数是严格凸的.

证明：1. 得自定义 $|x-y|^2 = <x-y, x-y>$. 如果我们计算出 $|x+y|^2 = <x+y, x+y>$，并将它加上 $|x-y|^2$，则得到2. 对 $|x|^2 = |y|^2 = 1$，有 $|x-y|^2 > 0$，于是 $|\frac{x+y}{2}|^2 < 1$. □

注解6.2.17 为了解释6.2.16中的命名，考虑具有典范数量积的 $V = \mathbf{R}^2$. 满足 $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x - y \neq 0$ 的元素确定了一个具有顶点为 $p = 0$, $q = x$, $r = y$ 的三角形. 这个三角形的边是用 x, y 和 $y - x$ 给出的. 如果我们写 $<x, y> = |x||y| \cos\alpha$，这里 α 记为在 p 处的角度，则有1.

$$d(q,r)^2 = d(p,q)^2 + d(p,r)^2 - 2d(p,q)d(p,r)\cos\alpha.$$

这是初等几何的余弦定理，见8.5.3. 对 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，我们得到了直角三角形边的勾股定理：

$$d(q,r)^2 = d(p,q)^2 + d(p,r)^2.$$

2. 元素 $\{0, x, y, x+y\}$ 确定了平行四边形的顶点 $\{p, q, r, s\}$. $|x+y| = d(p,s)$ 和 $|x-y| = d(q,r)$ 是这个平行四边形的对角线的长度，而 $|x| = d(p,q) = d(r,s)$, $|y| = d(p,r) = d(q,s)$ 是其边长.

例6.2.18 1. K^n 上的最大范数不是严格凸的. 对此，我们注意：关于这个范数，$\mathbf{R}^2$ 中的 $S_1(0)$ 是由顶点为 $(\pm1, \pm1)$ 的正方形所给出.

2. 考虑在 K^n 上的范数 $|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$. 对 $n = 2, K = \mathbf{R}$, $S_1(0)$ 是用顶点在 $(\pm1, 0), (0, \pm1)$ 的正方形所给出. 于是这个范数同样不是严格凸的.

3. 对每个实数 p, $1 \leq p \leq \infty$，所谓在 K^n 上的 p-范数是用

$$|x|_p = (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

来定义的. 对 $p=1$, 这是在 2 中所导入的范数, 对 $p=2$, 这是范数 $\sqrt{<\ ,\ >}$. 对 $p=\infty$, 这是 6.2.2 中的最大范数.

性质 1 和 2 的有效性显然可立即得自 6.2.1, 而三角形不等式的证明就没有这么简单. 在此情况下, 它是

$$(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

且称之为 Minkowski 不等式. 对 $p=1$, 这显然是平凡的. 对 $p=2$, 这个不等式已在 6.2.4 中借助于 Cauchy-Schwarz 不等式 6.2.3 而得到证明. 对一般的 $p>1$ 的情形, 这个不等式得自所谓的 Hölder 不等式:

设 p 和 q 是正整数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i\eta_i| \le (\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

对于 Hölder 不等式的证明, 令

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi|^p = A^p, \qquad \sum_{j=1}^{n}|\eta|^q = B^q.$$

我们能假设 $A>0, B>0$. 利用 $\xi_i'=\frac{\xi_i}{A}, \eta_j'=\frac{\eta_j}{B}$, 上述不等式能通过对 $i=1,\cdots,n$ 相加

$$|\xi_i'\eta_i'| \le \frac{|\xi_i'|^p}{p}+\frac{|\eta_i'|^q}{q} \tag{6.1}$$

而得出.

于是我们现在来证明 (6.1):

引理 6.2.19 对 $0\le\alpha\le 1, a\ge 0, b\ge 0$, 成立

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \le \alpha a+(1-\alpha)b. \tag{6.2}$$

如果我们特别地令$\alpha = \dfrac{1}{p}, 1 - \alpha = \dfrac{1}{q}, a = |c|^p, b = |d|^q$, 则得到

$$|cd| \le \frac{|c|^p}{p} + \frac{|d|^q}{q}. \tag{6.1}$$

证明: 对$a = b$, (6.2) 中等号成立. 于是我们能假设$b > a > 0$. 按照微积分中的中值定理，有

$$b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} = (1-\alpha)(b-a)\xi^{-\alpha}, \quad 且 \quad a < \xi < b.$$

因为$\xi^{-\alpha} < a^{-\alpha}$, 所以成立

$$b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} < (1-\alpha)(b-a)a^{-\alpha}.$$

乘a^α后就得到 (6.2).

现在我们来证明如何从 Hölder 不等式得出 Minkowski 不等式. 在这里，设$p > 1$.

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p \le \sum_{i=1}^n |\xi_i||\xi_i + \eta_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |\eta_i||\xi_i + \eta_i|^{p-1}.$$

应用于右边每一个求和式，再由于$(p-1)q = p$, Hölder 不等式给出为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p \\
&\le (\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p)^{\frac{1}{q}} + (\sum_{i=1}^n |\eta_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p)^{\frac{1}{q}} \\
&= [(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |\eta_i|^p)^{\frac{1}{p}}](\sum_{i=1}^n |\xi_i + \eta_i|^p)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

用最后的因子的逆去乘不等式，因为$1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$, 就得出了 Minkowski 不等式.

4. 在$\mathcal{C}(I;K)$上对每个$p, 1 \le p \le \infty$, 我们用

$$|f|_p = (\int_I |f(t)|^p \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}.$$

来定义p-范数. 利用Minkowski 和Hölder 不等式的积分, 我们指出: 事实上这是一个范数.

5. 人们能够证明: 对$1 < p < \infty$, 在K^n和$\mathcal{C}(I;K)$上的范数$|\ |_p$是严格凸的.

作为本节的结束, 我们来证明: 平行四边形公式6.2.16.2 的有效性不仅是必要的, 而且对由一个数量积所导入的范数也是足够的.

为了简单起见, 我们限于对实的情形进行讨论.

定理6.2.20 如果对赋范$\mathbf{R}$-向量空间V, 平行四边形公式成立, 则可用

$$< x, y >= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2)$$

去定义V上的一个数量积, 使得$|x| = \sqrt{< x, x >}$.

注: 对一个$\mathbf{C}$-向量空间, 我们令

$$< x, y >= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2 + \mathrm{i}|x+\mathrm{i}y|^2 - \mathrm{i}|x-\mathrm{i}y|^2).$$

证明: 对$x \ne 0, < x, x > \ge 0$和$< x, x >> 0$是显然的. 同样地, $< x, y >=< y, x >$. 剩下只需证明$< x, y >$关于第一个变量是线性的. 在这里, 我们应用平行四边形公式6.2.16.2.

$$\begin{aligned} &< z+z', y > + < z-z', y > \\ &\quad = \frac{1}{4}(|z+z'+y|^2 - |z+z'-y|^2 \\ &\qquad\qquad + |z-z'+y|^2 - |z-z'-y|^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(|z+y|^2 - |z-y|^2)$$
$$= 2 < z, y > .$$

利用 $z = z'$, 可得出 $< 2z, y >= 2 < z, y >$, 于是

$$< z + z', y > + < z - z', y >=< 2z, y > .$$

令 $z + z' = 2x, z - z' = 2x'$. 因此

$$< x, y > + < x', y >=< x + x', y > .$$

于是对所有的 $p \in \mathbf{Z} :< px, y >= p < x, y >$. 如果 $q \neq 0$ 取自 $\mathbf{Z}$, 则由 $qx' = x$ 可得: $< x, y >= q < \frac{x}{q}, y >$. 即对所有 $r \in \mathbf{Q}$, 成立 $< rx, y >= r < x, y >$. 由映射 $x \in V \longmapsto < x, y > \in \mathbf{R}$ 的连续性, 可以得到: 对所有 $\alpha \in \mathbf{R}$, 有

$$< \alpha x, y >= \alpha < x, y > .$$

□

6.3 Hilbert空间

为了将在有限维假设下, 在6.1中所导入的结果尽可能地推广到无限维的情形, 我们现在再次考虑酉向量空间. 在6.1.15中的例子表明这并非没有进一步的可能. 如果我们考虑用范数所确定的拓扑, 并假设映射具有线性性质、连续性以及完备性, 则6.1中的结果就完全地转移进来了.

我们在这里限于讨论可分空间. 于是在完备的酉空间 (也称为Hilbert空间)—— 除了差一个等距外 —— 除去一个有限维酉空间外, 正好只有一个无限维空间.

定义6.3.1 1. 称赋范空间V是可分的，如果在V中关于所导入的度量存在一个可数稠密的子集.

2. 所谓一个准Hilbert是指一个酉空间，它关于所导入的范数是可分的. 如果V是完备的，则也称它为Hilbert空间.

例6.3.2 1. 一个有限维的酉空间V是一个Hilbert空间. 这是因为按照 6.2.13, 它是完备的. 且可数的稠密子集是用关于图$\Phi : V \longrightarrow K^n$ 具有有理数坐标$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$的元素来给出的. 即$\xi_i \in \mathbf{Q}$ 或者$\in \mathbf{Q} + \mathrm{i}\mathbf{Q}$.

2. 用l_K^2或简单地用l^2来记K中的序列$\{\xi_n\}$的K-向量空间，这里$\sum_n \xi_n \bar{\xi_n} < \infty$. $\sum_n$代表无限项求和，理解为部分和$\sum_{n=1}^k \xi_n \bar{\xi_n}$, $k = 1, 2, \cdots$, 的单调增加的序列的极限.

我们必须证明：集合l^2是一个向量空间. 对此，我们把l^2考虑成取值在K中的序列全体的空间的一部分，并验证子空间判据2.1.5的有效性. 我们首先指出：

$$\sum_n \xi_n \bar{\xi}_n < \infty \quad 和 \quad \sum_n \eta_n \bar{\eta}_n < \infty$$
$$\Longrightarrow \left|\sum_n \xi_n \bar{\eta}_n\right| \leq \sum_n |\xi_n||\eta_n| < \infty. \tag{6.3}$$

事实上，由6.2.3, 我们对每个k, 有

$$\left|\sum_{n=1}^k \xi_n \bar{\eta}_n\right|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^k |\xi_n||\bar{\eta}_n|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^k |\xi_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^k |\bar{\eta}_n|^2\right),$$

取极限$k \to \infty$后就得到了结论.

于是如果$x \in l^2, y \in l^2, \alpha \in K$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_n (\xi_n + \eta_n)\overline{(\xi_n + \eta_n)} \\
&\qquad = \sum_n \xi_n \bar{\xi}_n + \sum_n \xi_n \bar{\eta}_n + \sum_n \bar{\xi}_n \eta_n + \sum_n \eta_n \bar{\eta}_n < \infty
\end{aligned}$$

和

$$\sum_n (\alpha\xi_n)\overline{(\alpha\xi_n)} = \alpha\bar{\alpha}\sum_n \xi_n\bar{\xi}_n < \infty,$$

同样有 $x+y\in l^2$ 及 $\alpha x\in l^2$.

我们的考虑也表明，在 l^2 上用

$$< x, y >= \sum_n \xi_n\bar{\eta}_n$$

可定义一个典范的数量积.

l^2 关于所导出的范数是完备的. 这是因为如果设

$$\{x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots)\}$$

是一个 Cauchy 序列，则对每个 k, $\{\xi_{n_k}\}$ 也是 Cauchy 序列. 令 $\lim_{n\to\infty}\xi_{nk} = \xi_k, (\xi_1, \xi_2, \cdots) = x$. 我们断言： $x\in l^2$.

这是因为对于给定的 $\varepsilon > 0$, 对充分大的 l 和 m 成立着

$$\sum_{n=1}^{k} |\xi_{ln} - \xi_{mn}|^2 < \varepsilon^2.$$

于是对充分大的 m, 也有 $\sum_{n=1}^{k} |\xi_n - \xi_{mn}|^2 \le \varepsilon^2$, 即对充分大的 m, 有 $|x - x_m| \le \varepsilon$.

因为 K^n 的和集 $K^1\cup K^2\cup K^3\cup\cdots$ 在 l^2 中是稠密的，且每个 K^n 是可分的，于是 l^2 也是可分的.

6.1.12 的下面的扩张是具有基本意义的.

定理6.3.3 设 V 是一个酉空间， U 是 V 的一个带有诱导的数量积的子空间，它是一个 Hilbert.

于是对每一个 $x\in V$, 存在一个唯一确定的元素 $x_U\in U$, 它具有到 x 的最小距离，即

$$|x - x_U| \le |x - y|, \quad 对所有\ y\in U.$$

$$x - x_U \in U^{\perp};$$

$$x \in V \longmapsto x_U + (x - x_U) \in U \oplus U^{\perp} = V$$

是将 V 分解成和 $U + U^{\perp}$,$U \cap U^{\perp} = \{0\}$, $U^{\perp}$ 是一个闭的子空间.

注解6.3.4 1. 我们也把元素 $x_U \in U$ 称为 x 在 U 中的最佳逼近.

2. 注意: V 的一个有限维子空间总是一个 Hilbert 空间, 见6.3.2.1.

3. 在证明中我们将利用: 由数量积所导出的范数是严格凸的, 见6.2.16.

4. U 是Hilbert空间的假设是重要的, 这是因为如果譬如说考虑在 l^2 中序列 $\{\xi_n\}$ 的子空间 U, 这里对几乎所有的 n, 有 $\xi_n = 0$, 则 $U^{\perp} = \{0\}$, 但是 $U \neq l^2$.

6.3.3的证明: 我们首先证明: 对 $x \in V$, 可确定唯一的一个 $x_U \in U$, 使得对所有 $y \in U$, 有 $|x - x_U| \leq |x - y|$. 令 $\inf_{y \in U} |x - y| = d$. 存在 U 中一个序列 $\{y_n\}$, 使得 $\lim_{n\to\infty} |x - y_n| = d$. 如果我们证明: $\{y_n\}$ 是一个 Cauchy 序列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_U$ 是欲找的元素, 而且它显然是唯一的.

对 $\varepsilon > 0$, 则对所有充分大的 n 和 m, 成立

$$2|y_n - x|^2 + 2|y_m - x|^2 < 4d^2 + \varepsilon^2.$$

利用 $y_n - y_m = (y_n - x) - (y_m - x)$, 在应用了6.2.16.2后, 我们得到

$$\begin{aligned} |y_n - y_m|^2 &= 2|y_n - x|^2 + 2|y_m - x|^2 - |y_n + y_m - 2x|^2 \\ &< 4d^2 + \varepsilon^2 - 4d^2 = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

现在我们指出: $z = x - x_U \in U^{\perp}$. 这是因为对所有的 $t \in \mathbf{R}$, 所有的 $y \in U$, 成立

$$|z|^2 \leq |z + t < z, y > y|^2$$

$$= |z|^2 + 2t| < z, y > |^2 + t^2| < z, y > |^2 |y|^2.$$

由此得到 $< z, y >= 0$. 这是因为如果 $y \neq 0$, 及利用 $t = -\frac{1}{|y|^2}$, 就得到右边 $< |z|^2$.

因为 $x = x_U + (x - x_U) \in U + U^{\perp}$, 我们有 $V = U + U^{\perp}$. 作为连续映射 $x \in V \longmapsto x_U \in U$ 的核, $U^{\perp}$ 是闭的. □

命题6.3.5 设 V 是一个准Hilbert空间. 于是 V 中的一组ON-系统 S 总是可数的. 于是我们总能把这样一个系统写成形如 $S = \{d_1, d_2, \cdots\}$.

证明: 用 A 来记 V 的一个可数的稠密子集. 设 $S = \{d_\iota, \iota \in I\}$ 是一个ON-系统. 只需证明: 存在一个单射 $f : S \longrightarrow A$.

对此, 我们先注意: 按照勾股定理, 对 $\iota \neq x$, 有 $|d_\iota - d_\kappa| = \sqrt{2}$. 选 $f : S \longrightarrow A$, 使得 $|f(d_\iota) - d_\iota| < \frac{1}{2}$ 对所有的 $\iota \in I$. 于是对 $\iota \neq \kappa$, 我们有

$$\begin{aligned} |f(d_\iota) - f(d_\kappa)| &= |(d_\iota - d_\kappa) - (d_\iota - f(d_\iota)) - (f(d_\kappa) - d_\kappa)| \\ &\geq |d_\iota - d_\kappa| - |d_\iota - f(d_\iota)| - |f(d_\kappa) - d_\kappa| > 0. \end{aligned}$$

□

引理6.3.6 设 $S = \{d_1, d_2, \cdots\}$ 是酉空间 V 的一组ON-基. 于是对每个 $x \in V$, 成立Bessel不等式

$$\sum_n | < x, d_n > |^2 \leq |x|^2. \tag{6.4}$$

证明: 对每个 $k = 1, 2, \cdots$, 我们用 $U(k)$ 来记由 $\{d_1, \cdots, d_k\}$ 所生成的 k 维子空间. 于是 $\{d_1, \cdots, d_k\}$ 是 $U(k)$ 的一组ON-基. $x - \sum_{n=1}^k < x, d_n > d_n \in U(k)^{\perp}$, 即 $\sum_{n=1}^k < x, d_n > d_n$ 是由6.3.3中所述的元素 $x_{U(k)} \in U(k)$. 于是

$$|x_{U(k)}|^2 \leq |x_{U(k)}|^2 + |x - x_{U(k)}|^2 = |x|^2.$$

如果k走遍S的指标集中的所有元素，则 (6.4) 就得出了. □

定义6.3.7 设V是一个准Hilbert空间. 所谓V中的一组Hilbert基是指一个ON- 系统$S=\{d_1,d_2,\cdots\}$，使得对每个$x\in V$，在部分和$\sum_{n=1}^{k}\xi_n d_n$收敛的意义下，有形如$x=\sum_n \xi_n d_n$的表示.

例6.3.8 1. 如果V是酉空间，且为有限维，则Hilbert基与ON- 基是相同的.

2. 对 Hilbert空间 l^2，我们用 $e_n=(0,\cdots,1,0,\cdots)$ (1在第 n个位置，所有其它的位置均为 0) 定义典范的 Hilbert基 $E=\{e_1,e_2,\cdots\}$. 显然，E是Hilbert基. 反之，作为K- 向量空间，E不是l^2的基. 这是因为由E所生成的空间$[E]$正好是在6.3.4.4中所考虑的子空间$U\neq l^2$.

定理6.3.9 设 $S=\{d_1,d_2,\cdots\}$是可分的酉空间 (又称准 Hilbert空间) V 的一个ON- 系统.

1. 下列陈述是等价的：

(a) $[S]$在V中稠密的.

(b) S是Hilbert基.

(c) 成立Parseval恒等式

$$<x,y>=\sum_n <x,d_n>\overline{<y,d_n>},\quad (见6.1.11).$$

(d) 成立Parseval等式

$$|x|^2=\sum_n |<x,d_n>|^2,\quad (见6.1.11).$$

2. 从上述性质1(a), 1(b), 1(c), 1(d) 中的每一个得出：

$$对所有\ n, <x,d_n>=0\Longrightarrow x=0.\quad (见6.1.10).\qquad (6.5)$$

当$\{V,<\ ,\ >\}$是Hilbert空间时，(6.5) 蕴含性质1(a), 1(b), 1(c), 1(d) 中的每一个.

证明: 1.(a)$\Longrightarrow$ 1.(b): 设 $x = \lim x_n, x_n \in [S]$. 对每个 $\varepsilon > 0$, 于是存在 $n_0 = n(\varepsilon)$, 使得对 $n \geq n_0$, 有 $|x - x_n| < \varepsilon$. 对每个 n 存在 $m(n)$, 使得 $x_n \in U(m(n)) =$ 由 $d_1, \cdots, d_{m(n)}$ 所生成的 $m(n)$ 维空间. 令 $\sum_{k=1}^{m(n)} < x, d_k > d_k = x'_n$. 因为 $U(m(n))$ 作为有限维空间是完备的, 由 6.3.2 可得出 $|x - x'_n| \leq |x - x_n| < \varepsilon$. 因为

$$|x - \sum_{n=1}^{m+1} < x, d_n > d_n| \leq |x - \sum_{n=1}^{m} < x, d_n > d_n|,$$

所以成立

$$\lim_{t\to\infty} |x - x'_n| \leq \varepsilon, \text{于是} x = \sum_n < x, d_n > d_n.$$

1.(b)$\Longrightarrow$ 1.(c): 利用

$$x = \sum_n < x, d_n > d_n, y = \sum_n < y, d_n > d_n,$$

$$x_k = \sum_{n=1}^{k} < x, d_n >, y_k = \sum_{n=1}^{k} < y, d_n > d_n,$$

我们有

$$< x_k, y_k >= \sum_{n=1}^{k} < x, d_n > \overline{< y, d_n >},$$

且由于连续性, 这对 $k \to \infty$ 也成立.

1.(c)$\Longrightarrow$ 1.(d): 是显然的.

1.(d)$\Longrightarrow$ 1.(a): 这是因为每个 x 是等于 $\sum_n < x, d_n > d_n$, 且由此可得出 $[S]$ 在 V 是稠密的.

1.(b)$\Longrightarrow$(6.5) 是显然的.

现设 V 是一个 Hilbert 空间, 且对 S, 成立 (6.5). 因此集合 $[S]$ 的闭包是 V 的一个完备的子空间 U. (6.5) 表明: $U^\perp = \{0\}$, 于是 $U = V$. □

定理6.3.10 Hilbert空间V具有一组Hilbert基. 准确地说: V中每一个ON-系统S_0可扩张成一个Hilbert基.

证明: 对 $\dim V < \infty$, 这得自6.1.7. 对于无限维的情形, 我们利用Zorn引理, 也可参见2.4.7的证明: 设S_0是一组ON-系统, 用$\mathcal{F} = \mathcal{F}(S_0)$来标记ON-系统$S'$的族, 这里$S_0 \subset S'$. $\mathcal{F}$关于包含关系是偏序的, 且全序子族的和集代表了这些子族在$\mathcal{F}$中的一个上界, 按照Zorn引理, 于是在$\mathcal{F}$中存在一个最大元素S.

S是一个Hilbert基. 这是因为$[S]$的闭包U是完备的. 于是由6.3.3, 有$V = U \oplus U^{\perp}$. 选$U^{\perp} \neq \{0\}$, 于是我们用$U^{\perp}$中的一个元素$e, |e| = 1$, 把S扩张出去, 而这将与S的最大性发生矛盾. □

定理6.3.11 Hilbert空间V能用其维数来确定 (直至一个等距).

精确地说: 如果 $\dim V = n < \infty$, 则一组ON-基$D = \{d_1, \cdots, d_n\}$给出了一个等距.

$$\Phi_D : V \longrightarrow K^n.$$

如果 $\dim V = \infty$, 则一组Hilbert基$D = \{d_1, d_2, \cdots\}$给出了一个等距.

$$\Phi_D : V \longrightarrow l^2; \quad d_j \longmapsto e_j.$$

证明: 由6.3.10, V总具有一个ON-基$D = \{d_1, d_2, \cdots\}$. 按照6.3.9, 于是每个$x \in V$可写成$\sum_n < x, d_n > d_n$. 定义

$$\Phi_D : V \longrightarrow l^2; \quad x \longmapsto \sum_n < x, d_n > e_n.$$

Parseval恒等式说, 这是一个等距. □

例6.3.12 我们回至6.1.7.2中定义的$\mathcal{C}=\mathcal{C}([-\pi,\pi];\mathbf{R})$的ON-系统:

$$d_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$
$$d_{2m-1}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mt,$$
$$d_{2m}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mt,\quad (m>0).$$

f的Fourier级数定义为$\mathrm{Four}(f)=\sum_{m=0}^{\infty}<f,d_m>d_m$. 令

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t=<f,\frac{d_0}{\sqrt{2\pi}}>=\frac{a_0}{2},$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mt\mathrm{d}t=<f,\frac{d_{2m-1}}{\sqrt{\pi}}>=a_m,$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin mt\mathrm{d}t=<f,\frac{d_{2m}}{\sqrt{\pi}}>=b_m.$$

于是有

$$\mathrm{Four}(f)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}a_m\cos mt+\sum_{m=1}^{k}b_m\sin mt.$$

由6.3.3, 第k个Fourier多项式

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{k}a_m\cos mt+\sum_{m=1}^{k}b_m\sin mt$$

是函数f在范数为$|\ \ |=\sqrt{<\ ,\ >}$的意义下用由

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin mt}{\sqrt{\pi}},1\leq m\leq k\}$$

所张成的有限维空间中的元素所做出的最佳逼近.

Bessel不等式6.3.6蕴含

$$\sum_{n=0}^{\infty}|<f,d_n>|^2\leq<f,f>.$$

如我们在6.2.14中已经看到的那样，$\mathcal{C}$是不完备的．于是也不期望总有Four $(f)\in\mathcal{C}$．但是比较容易证明：$f\in\mathcal{C}$及对所有$n=0,1,\cdots$，有$<f,d_n>=0$蕴含$f=0$．此外，$\mathcal{C}$是可分的．这是因为$<f,f>\leq|f|_\infty^2 2\pi$．又因为我们在6.1.15中已经注意到多项式在具有范数$|\ \ |_\infty$的$\mathcal{C}$中是稠密的，且因为这对具有有理数的系数的多项式也成立，于是得到具有范数$\sqrt{<\ ,>}$的空间$\mathcal{C}$也是可分的．

在Fourier级数理论中，为了把$f\in\mathcal{C}$用Four(f)表出，需要有条件．例如，一个够用的条件是$f(-\pi)=f(\pi)$及$f(t)$是逐段连续的．

6.4　线性算子、酉群

在本节中我们考虑赋范向量空间的某种态射，它是连续线性映射，称之为线性算子．对有限维的情形，每个线性映射是一个线性算子．我们特别对Hilbert空间的线性算子进行讨论，对某些算子导入一个标准形式．如果我们只限于讨论有限维空间，则连续性的讨论是多余的，而且证明将相应地简化．

定义6.4.1　设V,W是赋范（向量）空间．所谓从V到W的线性算子是指一个连续的线性映射$f:V\longrightarrow W$．

注：如果 $\dim V<\infty$，则每个$f\in L(V;W)$是连续的．

引理6.4.2　设$f:V\longrightarrow W$是线性的，V和W是赋范空间，则f是连续的充要条件为f是有界的，即存在一个$k>0$，使得对所有$x\in V$，有$|f(x)|\leq k|x|$．

证明：由$|f(y)-f(x)|=|f(x-y)|$可以得到：如果f是有界的，则f是连续的．现设f不是有界的．即存在V中的一个序列

$\{x_n\}$, 使得 $|f(x_n)| > n|x_n|$. 令 $\frac{x_n}{|f(x_n)|} = z_n$. 于是当 $|f(z_n)| = 1$ 时, $\{z_n\}$是一个零序列, 因此$\{f(z_n)\}$没有零序列. 即f是不连续的. □

例6.4.3 我们给出一个不有界的线性映射 $f : l^2 \longrightarrow K$ 的例子. 设$E = \{e_1, e_2, \cdots\}$是l^2的典范Hilbert基. 设在$U = [E]$上用 $f(e_n) = n$, 在$U \neq l^2$的补上用 $f|_{U'} = 0$来给出f.

定义6.4.4 设$f : V \longrightarrow W$是一个线性算子. 定义

$$|f| = \inf\{k \geq 0; |f(x)| \leq k|x| \quad \text{对所有的 } x \in V\}.$$

注: 从6.4.4可得出

$$|f| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |f(x)|.$$

定理6.4.5 设V和W是赋范的. 用$L_b(V;W)$来标记线性算子$f : V \longrightarrow W$的集合. 于是$L_b(V,W)$是$L(V,W)$的一个赋范子空间, 且$|f|$是如在6.4.4中那样给出的.

证明: 由 $|f(x)| \leq |f||x|, |g(x)| \leq |g||x|$ 得出 $|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq (|f|+|g|)|x|$. $|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)| \leq |\alpha||f||x|$. 于是$L_b(V;W)$满足子空间判据. 对范数, 成立三角形不等式以及$|\alpha f| = |\alpha||f|$. $|f| \geq 0$, 且$|f| = 0$仅对$f = 0 : V \to W$成立. □

命题6.4.6 设V是Hilbert空间. 用V_b^*来记连续线性映射$f : V \longrightarrow K$的空间. 如在3.2.5中那样用$< x, y^* >= y^*(x)$定义自然配对

$$< \, , \, >: V \times V_b^* \longrightarrow K; \ (x, y^*) \longmapsto < x, y^* > .$$

这个映射是连续的.

证明: 这得自$| < x, y^* > | \leq |x||y^*|$. □

在6.1.13中，我们已经指出：对一个有限维酉空间V，已定义了一个典范的同构$\sigma : V \longrightarrow V^*$. 对Hilbert空间的相应结果是Riesz表示定理.

定理6.4.7 设V是Hilbert空间，V_b^*是V上连续泛函的空间 (也称Hilbert对偶空间).

我们可利用自然配对$< \ , \ >: V \times V_b^* \to K$, 用

$$< x, \sigma(y) >=< x, y >$$

去定义$\sigma : V \longrightarrow V_b^*$. 于是$\sigma$是连续的双射，且有连续逆$\tau = \sigma^{-1} : V_b^* \longrightarrow V; < x, \tau(y^*) >=< x, y^* >$. σ是共轭 - 线性的，且$|\sigma(x)| = |x|$. 利用$< x^*, y^* >=< \sigma^{-1}(y^*), \sigma^{-1}(x^*) >$, V_b^*将是一个同构于V的Hilbert空间. 于是σ是一个共轭等距，即有$< \sigma(x), \sigma(y) >= \overline{< x, y >}$.

证明：显然有$\sigma(y) \in V_b^*$. 我们可以如在6.1.13那样定义$\tau : V_b^* \longrightarrow V$: 对$y^* = 0$, 令$\tau(y^*) = 0$. 如果$y^* \neq 0$, 则$U = \ker\ y^* \neq V$是闭的，于是是完备的. 按照6.3.3, 于是有$V = U + U^\perp$. 按照3.2.3, 有 $\dim\ U^\perp = 1$. 当$e \in U^\perp$时，$|e| = 1$. 于是我们对每一个$x \in V$, 有分解

$$x = (x- < x, e > e)+ < x, e > e \in U + U^\perp.$$

用$\overline{< e, y^* >}e$来定义$\tau(y^*)$. 利用$x \in V$的前述的表示，则有

$$< x, \tau(y^*) >=< e, y^* >< x, e >=<< x, e > e, y^* >=< x, y^* >,$$

于是，可如6.1.13的证明那样得到定理的其余部分. □

在3.2.10中我们已经定义了线性单射

$$(^{**}) : V \longrightarrow V^{**}; \quad x^{**} : y^* \in V^* \longmapsto < y^*, x > \in K.$$

当 $\dim V < \infty$时，这是一个同构. 对Hilbert空间，相应地有

命题6.4.8 设V是Hilbert空间，映射的复合

$$\sigma : V \longrightarrow V_b^*; \quad \sigma^* : V_b^* \longrightarrow (V_b^*)_b^* = (\text{简记为})V_b^{**}$$

是一个等距的同构； $\sigma^* \circ \sigma$对应于映射(**).

证明: σ和σ^*的义及V_b^*上数量积的定义给出：对V中任意的x和y, 有

$$\begin{aligned} < \sigma(y), \sigma^* \circ \sigma(x) > &= < \sigma(y), \sigma(x) > = < x, y > \\ &= < x, \sigma(y) > = < \sigma(y), x^{**} > . \end{aligned}$$

作为共轭 - 等距映射σ和σ^*的复合， $\sigma^* \circ \sigma$是一个等距. □

3.3.6 的对照是

定理6.4.9 设V和W是Hilbert空间. 如$f \in L_b(V;W)$, 则有${}^t f \in L_b(W_b^*; V_b^*)$, 这里$< x, {}^t f(y^*) > = < f(x), y^* >$, 对$(x, y^*) \in V \times W_b^*$. $|{}^t f| = |f|$. 于是这个与f相伴随的映射

$$f^* = \sigma_V^{-1} \circ {}^t f \circ \sigma_W : W \longrightarrow V$$

也是连续的，且如在6.4.7那样，有$\sigma_W : W \longrightarrow W_b^*, \sigma_V : V \longrightarrow V_b^*$. f^*是用

$$< f(x), y > = < x, f^*(y) >, \text{对}(x, y) \in V \times W$$

来特征的. 特别地，有$f^{**} = f$. 最后，

$$(^*) : f \in L_b(V;V) \longmapsto f^* \in L_b(V;V)$$

是一个环 - 反同构$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

证明: 对所有$(x, y^*) \in V \times W_b^*$, 由${}^t f$的定义：

$$< x, {}^t f(y^*) > = < f(x), y^* >$$

得出：

$$|{}^t f(y^*)(x)| \le |y^*||f(x)| \le |y^*||f||x|.$$

于是 $|{}^t f(y^*)| \le |y^*||f|$，即 $|{}^t f| \le |f|$. 因为 ${}^{tt}f = f$，得到 $|{}^t f| = |f|$. 因为 σ_W 和 σ_V^{-1} 是共轭 - 线性的同构， f^* 是线性的、连续的，且 $|f^*| = |f|$. 由此我们有

$$\begin{aligned}< x, f^*(y) > &=< x, \sigma_V^{-1} \circ {}^t f \circ \sigma_W(y) >=< x, {}^t f \circ \sigma_W(y) > \\ &=< f(x), \sigma_W(y) >=< f(x), y >, \\ < f(x), y > =< x, f^*(y) >&= \overline{< f^*(y), x >} \\ &= \overline{< y, f^{**}(x) >} =< f^{**}(x), y >,\end{aligned}$$

即 $f = f^{**}$. 其余部分得自 3.3.6. □

定义6.4.10 设 V 是 Hilbert 空间， $f \in L_b(V; V)$.

1. 称 f 是正规的，如果 $f \circ f^* = f^* \circ f$.
2. 称 f 是自伴的，如果 $f = f^*$.
3. 称 f 是酉的，如果 $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{id}_V$.

注:

1. f 是自伴的或酉的 $\Longrightarrow f$ 是正规的.
2. 酉变换 f 是可逆的： $f^{-1} = f^*$，见 1.1.11.
3. 设 $f: V \longrightarrow V$ 是一个连续的线性映射，且对所有的 $(x, y) \in V \times V$，有 $< f(x), f(y) >=< x, y >$. 我们称这样的 f 为等距. 这是因为对所从属的距离 $d(x, y) = |x - y|, |\ \ | = \sqrt{< >}$，成立 $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

酉变换是等距的，这是因为

$$< f(x), f(y) >=< x, f^* \circ f(y) >=< x, y > .$$

对一个等距的变换 f，有 $\ker f = 0$，这是因为 $f(x) = 0 \Longrightarrow < f(x), f(x) >=< x, x >= 0$，于是 $x = 0$. 如果 $\dim V < \infty$，

则等距也是可逆的，于是是酉变换．对 $\dim V = \infty$, 则使得 $f(e_i) = e_{i+1}$ 的 $f : l^2 \to l^2$ 是一个等距，但不是酉变换．

定理6.4.11 设 V 是Hilbert空间．酉算子的集合 $\boldsymbol{U}(V)$ 是 $GL(V)$ 的一个子群，称它为 V 的酉群．在 $K = \mathbf{R}$ 的情形下，我们也称它是正交群 $\boldsymbol{O}(V)$.

证明: 我们来验证子群判据1.2.10的有效性：由 $f \circ f^* = \mathrm{id}, g \circ g^* = \mathrm{id}$ 及6.4.9, 可以得出 $(g \circ f) \circ (g \circ f)^* = g \circ f \circ f^* \circ g^* = \mathrm{id}$.

□

命题6.4.12 设 V 是Hilbert空间， $f : V \longrightarrow V$ 是一个线性算子．设 λ 是 f 的特征值，即 $\ker\ (f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq 0$.

1．如果 f 是正规的，则 $\ker\ (f - \lambda\,\mathrm{id}) = \ker\ (f^* - \bar{\lambda}\,\mathrm{id})$, 特别地， $\ker\ f = \ker\ f^*$.

2．如果 f 是自伴的，则 λ 的实的．

3．如果 f 是酉的，则 $\lambda\bar{\lambda} = 1$, 即 $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$.

证明: 对1.:

$$
\begin{aligned}
< f(x), f(y) > &= < x, f^* \circ f(x) > = < x, f \circ f^*(x) > \\
&= < f^*(x), f^*(x) > \quad (\text{因为 } f^{**} = f).
\end{aligned}
$$

于是 $f(x) = 0 \Longleftrightarrow f^*(x) = 0$. 因为 $(f - \lambda\,\mathrm{id})^* = f^* - \bar{\lambda}\,\mathrm{id}$, 结论得出．

对2.: 对 $f(x) = \lambda x, x \neq 0$, 这得自 1.

对3.: 按前面的办法，对 $f(x) = \lambda x, x \neq 0$, 有

$$
x = f^* \circ f(x) = f^*(\lambda x) = \lambda\bar{\lambda}x.
$$

□

命题6.4.13 设 $f : V \longrightarrow V$ 是正规算子， λ 是 f 的特征值．设 V_λ 是相应的特征空间．于是 V 等于闭子空间的直和 $V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, 且 $f|V_\lambda^\perp : V_\lambda^\perp \longrightarrow V_\lambda^\perp$ 是正规的．

证明: $V_\lambda = \ker(f-\lambda\,\mathrm{id})$是闭的，因此它是完备的. 由6.3.3, 我们得到分解. 设$y \in V_\lambda, x \in V_\lambda^\perp$. 于是有

$$< f(x), y > = < x, f^*(y) > = \lambda < x, y > = 0,$$

从而$f(x) \in V_\lambda^\perp$. □

定理6.4.14 设$f: V \longrightarrow V$是正规算子. 如$\{\mu_1, \cdots, \mu_k\}$是f的有限多个互不相同的特征值， $V_{\mu_1}, \cdots, V_{\mu_k}$是相应的特征空间，则$V$可分解成相互正交的子空间

$$V = V_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_k} \oplus V',$$

且$f|_{V'}: V' \longrightarrow V'$是正规的.

特别地，如果 $\dim V = \infty$及$K = \mathbf{C}$, 则V分解成正规算子$f: V \longrightarrow V$的特征空间V_λ, $1 \le i \le k$, 的正交和. 由此， V上的正规算子以此为特征.

证明: 这立即得自6.4.13及定义6.4.10. □

例6.4.15 当$f: V \longrightarrow V$具有无限多个特征值时，则不一定能给出由特征向量所构成的基：考虑l^2的典范基$E = \{e_1, e_2, \cdots\}$, 且令$f(e_k) = \dfrac{e_k}{k}$. 于是f作为在l^2上稠密的线性有界映射，但不是闭的子空间$[E]$上的线性有界映射. f具有一个在整个l^2上由$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$所唯一确定的连续扩张，这里$x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 而$x_n \in [E]$.

f的这些独特的特征值$\lambda = \dfrac{1}{k}$, 以e_k为特征向量. 这是因为设$x = \sum_k \xi_k e_k, x_n = \sum_k \xi_{nk} e_k \in [E]$, 使得$\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 如果$f(x) = \lambda x$, 则$\lambda \xi_k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\xi_{nk}}{k} = \dfrac{\xi_k}{k}$. 即如果$x \ne 0$, 则一定给出一个$k$, 使得$x = \xi_k e_k$.

在我们的例子中，值$\lambda = 0$起了一个特别的作用：称$\lambda \in K$为谱值，如果$(f - \lambda\,\mathrm{id}): V \longrightarrow V$ 不具有连续逆. 每个特征值是

谱值. 在我们的例子中, $\lambda = 0$是谱值, 但不是特征值. 这是因为如果给出一个算子$g: V \longrightarrow V$, 使得$g \circ (f - 0\,\mathrm{id}) = g \circ f = \mathrm{id}_V$, 于是$e_k = g \circ f(e_k) = g(\frac{e_k}{k}) = \frac{g(e_k)}{k}$, 即$g(e_k) = ke_k$, g不是有界的.

如果 $\dim V < \infty$, 则我们也能用矩阵来描述上面的概念和结果.

引理6.4.16 设V是酉空间, $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$是V的一组ON-基, 如果$\Phi_D \circ f \circ \Phi_D^{-1} = A \in M_K(n,n)$, 及$\Phi_D \circ f^* \circ \Phi_D^{-1} = A^*$, 则$A^* = {}^t\bar{A}$. 特别地,

f是正规的 $\Longleftrightarrow A\,{}^t\bar{A} = {}^t\bar{A}A$.

f是自伴的 $\Longleftrightarrow A = {}^t\bar{A}$.

f是酉的 $\Longleftrightarrow A\,{}^t\bar{A} = E$.

我们称A是正规的、自伴的或者酉的, 如果它满足上述相应的条件.

证明: 按照 6.1.11, A的元素a_{ij} 和$A^* = \Phi_D \circ f^* \circ \Phi_D^{-1}$的元素$a^*_{ij}$是用

$$a_{ij} =< f(d_j), d_i >; \ a^*_{ji} =< f^*(d_i), d_j >$$

来给出的. 于是

$$\begin{aligned}\overline{a^*_{ij}} = \overline{< f^*(d_i), d_j >} &=< d_j, f^*(d_i) > \\ &=< f(d_j), d_i >= a_{ij}.\end{aligned}$$

□

定义6.4.17 所谓n个变量的酉群$U(n)$是指由所有满足 $A\,{}^t\bar{A} = E$的 $A \in M_K(n,m)$所构成的群. 在情形 $K = \mathbf{R}$时, 我们也称它为n个变量的正交群$O(n)$, 即$O(n) = \{A \in M_K(n,n); A\ {}^t\bar{A} = E\}$.

注: 于是由 6.4.16, $\boldsymbol{U}(n)$ 是 $\boldsymbol{U}(V)$ 关于 V 的一组 ON-基的坐标表示， $\dim V = n$.

命题6.4.18 现考虑限制在 $\boldsymbol{U}(V)$ 上的行列式同态 $\det : \boldsymbol{U}(V) \longrightarrow K^*$.

1. 在 $K = \mathbf{C}$ 的情形下，象集是模为 1 的复数的群 $S^1 = \{e^{i\phi}\}$.

2. 在 $K = \mathbf{R}$ 的情形下，于是在 $\boldsymbol{O}(V)$ 的情形下，象集为群 $S^0 = \{\pm 1\} \subset \mathbf{R}^*$.

证明: 按照6.4.14, 6.4.12, $f \in \boldsymbol{U}(V)$ 具有一个以元素为 λ_i 的对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 表出的坐标表示, 其中 $\lambda_i\bar{\lambda}_i = 1$. 于是 $\det f \in S^1$. 因为对角矩阵 $(\lambda, 1, \cdots, 1) \in \boldsymbol{U}(V)$, 且因为 $\lambda\bar{\lambda} = 1$, 根据 $K = \mathbf{C}$ 或 $K = \mathbf{R}$, 于是 $\mathrm{im}\ \det \boldsymbol{U}(V)$ 分别是 S^1 及 S^0.

命题6.4.19 记映射 $\det : \boldsymbol{U}(V) \to \mathbf{C}^*$ 及 $\det : \boldsymbol{O}(V) \longrightarrow \mathbf{R}^*$ 的核分别为 $\boldsymbol{SU}(V)$ 及 $\boldsymbol{SO}(V)$. 特别地，分别称 $\boldsymbol{SU}(V)$ 及 $\boldsymbol{SO}(V)$ 为特殊酉群及特殊正交群. 于是成立

$$\boldsymbol{U}(V)/\boldsymbol{SU}(V) \cong S^1 \quad (K = \mathbf{C}),$$
$$\boldsymbol{O}(V)/\boldsymbol{SO}(V) \cong S^0 \quad (K = \mathbf{R}).$$

证明: 这得自 1.4.12. □

我们以描述 $f \in \boldsymbol{U}(V)$ 及 $f \in \boldsymbol{O}(V)$ 的 Jordan 标准形来结束本节.

定理6.4.20 设 $f \in \boldsymbol{U}(V), K = \mathbf{C}$, $\dim V = n$. 于是关于一个适当选取的 ON-基， f 具有一个坐标表示，它用一个对角矩阵 $(\lambda_i\delta_{ij})$ 来表出，其中 $\lambda_i \in S^1$ 是 f 的特征值.

特别地, 每个矩阵 $A \in \boldsymbol{U}(n)$ 共轭于一个这样的对角矩阵.

证明: 这得自 6.4.14和6.4.12.3. □

定理6.4.21 设 $f \in O(V)$, $\dim V = n$. 则 f 的特征多项式有形状

$$\chi_f(t) = (t-1)^{l_+} \cdot (t+1)^{l_-} \cdot (t^2-2t\cos\phi_1+1)^{m_1} \cdot \cdots \cdot (t^2-2t\cos\phi_s+1)^{m_s},$$

其中 $\{\cos\phi_1, \cdots, \cos\phi_s\}$ 互不相同，且均 $\neq \pm 1$. $l_+ \geq 0, l_- \geq 0, m_j \geq 0$ 及 $l_+ + l_- + 2m_1 + \cdots + 2m_s = n = \dim V$.

于是关于一个适当选取的ON-基，f 具有一个坐标表示，它是用 l_+ 个 $+1$, l_- 个 -1 以及 m_j 个 $(2,2)$-矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_j & -\sin\phi_j \\ \sin\phi_j & \cos\phi_j \end{pmatrix}$$

放在对角线上而构成的矩阵. 所有其他元素均为0.

特别地，每个矩阵 $A \in O(n)$ 共轭于一个这样的矩阵.

证明: 与我们在5.6中从复的Jordan标准形导出实的Jordan标准形一样，我们在这里利用了6.4.20中 $f \in U(V)$ 的标准形.

考虑 V 的复扩张 $V_{\mathbb{C}}$, 见5.6.1. 我们用

$$<x+\mathrm{i}y, x'+\mathrm{i}y'>_{\mathbb{C}} = <x,x'> + \mathrm{i}<y,x'> - \mathrm{i}<x,y'> + <y,y'>$$

把 V 上的数量积扩张成 $V_{\mathbb{C}}$ 上的一个数量积 $< \, , >_{\mathbb{C}}$. 如果 $f \in O(V)$, 则复扩张 $f_{\mathbb{C}}$ 属于 $U(V_{\mathbb{C}})$. 因为 $f_{\mathbb{C}}$ 的特征值属于 S', 所以 $\chi_f(t)$ 具有上述所给出的形状. 在 $f_{\mathbb{C}}$ 的Jordan标准形中我们只遇到 (1,1)-Jordan 矩阵 $J_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j})$. 按照5.6.2, 相应的实Jordan矩阵 $J_2(\cos\phi_j, \sin\phi_j)$ 具有上述所给出的形状.

推论6.4.22 设 $f \in O(V)$, $\dim V$ 是奇数. 于是 f 有特征值 $+1$ 或 -1. 如果 $f \in SO(V)$, 则 f 有特征值 $+1$. 一个这样的 f 也具有一个1维不变子空间 $U : f|U = \mathrm{id}_U$.

证明: 如果 Grad $\chi_f(t) = 2m+1$, 则在6.4.21中的式子中，我们有: $l_+ + l_-$ 为奇数. 因为 $\det J_2(\cos\phi, \sin\phi) = 1$, 所以在 $\det f = 1$ 的情形下， l_- 为奇数，于是 $l_+ > 0$.

6.5 埃尔米特形式

我们现在来考察 $K = \mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$ 上的有限维向量空间 V, 其上给定了一个埃尔米特或对称的双线性形式 ψ. 将些理论进一步推广到Hilbert空间是不可能的，可特别地参见6.5.3, 在那里我们把这种形式 ψ 与自伴映射恒同.

定义6.5.1 所谓 V 上的一个半双线性形式是指一个映射

$$\psi : V \times V \longrightarrow K; \quad (x,y) \longmapsto \psi(x,y),$$

它满足

$$\psi(\alpha x + \alpha' x', y) = \alpha\psi(x,y) + \alpha'\psi(x',y);$$
$$\psi(x, \beta y + \beta' y') = \bar{\beta}\bar{\psi}(x,y) + \bar{\beta}'\psi(x,y').$$

即 ψ 在第一个位置上是线性的, 在第二个位置上是共轭 - 线性的. 此外，如果

$$\psi(y,x) = \overline{\psi(x,y)}, \qquad \text{(对称)}$$

则也称 ψ 为埃尔米特形式. 当 $K = \mathbf{R}$ 时，我们也称其为对称(双线性) 形式.

注:

1. 每一个数量积 $<\ ,\ >$ 是一个埃尔米特形式.

2. 如果 $\psi(y,x) = \overline{\psi(x,y)}$, 则从第一个变量的线性性质可以得出关于第二个变量的共轭线性性质.

引理6.5.2 借助于恒等式

$$\psi(x,y) =< x,\sigma(y) >, \quad 对所有(x,y) \in V \times V, \tag{6.6}$$

V 上的半双线性形式 ψ 与共轭 - 线性映射 $\sigma : V \longrightarrow V^*$ 是双方一一地对应. 这里记 $< , >: V \times V^* \longrightarrow K$ 为自然配对. 换言之, $\sigma(y) = \psi(\ ,y)$.

注: 特别地, 当 ψ 是 V 上的一个数量积 $< , >$ 时, 则这样定义的 σ 正好是在 6.4.7 中所定义的映射. 如果 ψ 是埃尔米特的, 则进而还成立 $< x,\sigma(y) >= \overline{< y,\sigma(x) >}$.

证明: ψ 关于第一个变量的线性性质是等价于 $\sigma(y) \in V^*$. 且 ψ 关于第二个变量的共轭线性性质是等价于 $\sigma : V \longrightarrow V^*$ 的共轭线性性质. □

引理6.5.3 设 V 为酉空间, 于是借助于恒等式

$$\psi(x,y) =< x,f(y) >=< f(x),y >, \quad 对所有(x,y) \in V \times V, \tag{6.7}$$

V 上的埃尔米特形式 ψ 与自伴映射 $f : V \longrightarrow V$ 双方一一地对应.

证明: 设 $\psi(x,y) =< f(x),y >$. 于是 $\psi(x,y) = \overline{\psi(y,x)}$ 等价于

$$< f(x),y >= \overline{< f(y),x >} =< x,f(y) > .$$

按照6.5.2, 用 σ_ψ 来描述 ψ. 且用 σ 来记数量积 $< , >$ 的相应的描述. 于是 $\psi \longleftrightarrow f = \sigma^{-1} \circ \sigma_\psi$ 是由 (6.7) 所给出的对应. 这是因为

$$\psi(x,y) =< \sigma_\psi(y),x >=< x,\sigma^{-1} \circ \sigma_\psi(y) > .$$

定义6.5.4 设 ψ 是 V 上的一个埃尔米特形式, $B = \{b_1,\cdots,b_n\}$ 是 V 的一组基. 所谓 ψ 关于 B 的基本矩阵是指矩阵

$$G_B(\psi) = (\psi(b_i,b_j)) = (简记为)(g_{ij}).$$

命题6.5.5 1. 设$G_B(\psi)=(g_{ij})$是一个埃尔米特形式ψ的基本矩阵，于是成立

$$
{}^tG_B(\psi)=\overline{G_B(\psi)}, \text{从而 } g_{ji}=\overline{g_{ij}}.
$$

特别地，对$K=\mathbf{R}$, 有$g_{ji}=g_{ij}$.

2. 在ψ的分别关于V的两组基$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$和$B'=\{b'_1,\cdots,b'_n\}$的基本矩阵$G_B=G_B(\psi)$和$G_{B'}=G_{B'}(\psi)$之间，具有关系式

$$
{}^tTG_B\overline{T}=G_{B'},
$$

这里$T=\Phi_B\circ\Phi_{B'}^{-1}:K^n\to K^n$是3.4.11中的坐标变换.

证明: 对1.: $\psi(b_j,b_i)=\overline{\psi(b_i,b_j)}$.

对2.: 因为$\Phi_{B'}^{-1}\circ\Phi_B(b_k)=b'_k$是用$\sum_i t_{ik}b_i=b'_k$给出的$T$的元素$t_{ik}$. 于是

$$
\psi(b'_k,b'_l)=\psi(\sum_i t_{ik}b_i,\sum_j t_{jl}b_j)=\sum_{i,j}t_{ik}\psi(b_i,b_j)\bar{t}_{jl}.
$$

□

注: 当B和B'是ON-基时，则$\bar{T}={}^tT^{-1}$.

现在我们能来证明主轴变换的存在性.

定理6.5.6 设V是酉空间， ψ是V上的一个埃尔米特形式. 于是存在一组ON-基$D=\{d_1,\cdots,d_n\}$, 使得基本矩阵$G_D(\psi)$具有对角形式，且对角元为实数.

证明: 考虑由ψ所确定的自伴映射f, 见6.5.3. 由6.4.14, V具有一组由特征向量所构成的ON-基$D=\{d_1,\cdots,d_n\}$. 按照6.4.12.2, 特征值是实的. 于是$\psi(d_i,d_j)=<\lambda_id_i,d_j>=\lambda_i\delta_{ij}$.

□

对角基本矩阵的存在性也得自下列的方法:

定理6.5.7 设V是酉空间，ψ是V上的一个埃尔米特形式. 定义

$$\lambda_1 = \max\{\psi(x,x); < x,x >= 1\}.$$

于是λ_1是从属于ψ的自伴映射的特征值. 选取d_1使得$f(d_1) = \lambda_1 d_1, |d_1| = 1$. 如果 $\dim V > 1$, 则定义

$$\lambda_2 = \max\{\psi(x,x); < x,x >= 1 \text{ 且 } x \perp d_1\}.$$

因此λ_2是f的$\leq \lambda_1$的特征值. 选取d_2使得$f(d_2) = \lambda_2 d_2, |d_2| = 1, d_2 \perp d_1$. 如果 $\dim V > 2$, 于是继续有

$$\lambda_3 = \max\{\psi(x,x); < x,x >= 1, x \perp d_1, d_2\}.$$

在做了$n = \dim V$步以后, 我们就以这种方式得到了一组ON-基$D = \{d_1, \cdots, d_n\}$使得$G_D(\psi) = (\delta_{ij}\lambda_i)$.

证明: 如果在6.5.6中那样，选$D = \{d_1, \cdots, d_n\}$. 在此，我们能假设：基元素可以编号，使得$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. 对$x = \sum_i \xi_i d_i$, 有$\psi(x,x) = \sum_i \lambda_i \xi_i \bar{\xi}_i$, 于是利用$< x,x >= 1$:

$$\psi(x,x) = \lambda_1 + \sum_{i>1} (\lambda_i - \lambda_1)\xi_i \bar{\xi}_i \leq \lambda_1 \text{ 和 } \psi(d_1,d_1) = \lambda_1.$$

由此刻画了λ_1的特征. 因而相应地，对$\lambda_2, \cdots$, 等等也如此.

定义6.5.8 设ψ是V上的埃尔米特形式. 设$\sigma_\psi : V \longrightarrow V^*$是由其确定的共轭 - 线性映射，见6.5.2. 所谓ψ的零空间V_ψ^0是指σ_ψ的核.

定义ψ的秩 $\text{rg}\ \psi$为 $\dim V - \dim V_\psi^0$. 称ψ是非退化的，如果$V_\psi^0 = \{0\}$, 于是 $\text{rg}\ \psi = \dim V$.

注:

1. 于是$y \in V_\psi^\circ$意味着对所有的$x \in V$, 有$\psi(x,y)=0$.

2. 如果$\psi=<\ ,\ >$是V上的一个数量积，则ψ是非退化的.

命题6.5.9 设 $\dim V>0, \psi$是V上的一个埃尔米特形式，$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$是V上的一组基. 于是 $\operatorname{rg}\psi=\operatorname{rg}G_B(\psi)$. 特别地，$\psi$是非退化的充要条件是$\det G_B(\psi)\neq 0$.

证明: 由6.5.5, 在基本矩阵$G_B=G_B(\psi)$和基本矩阵$G_D=G_D(\psi)=(\lambda_i\delta_{ij})$之间有关系式$G_B={}^tTG_D\bar{T}$. 于是按照3.6.7, 有 $\operatorname{rg}G_D=\operatorname{rg}G_B$. 由矩阵$G_D$的形状，我们可看出 $\operatorname{rg}G_D=\sharp\{\lambda_i;\lambda_i\neq 0\}=\operatorname{rg}\psi$.

命题6.5.10 设ψ是埃尔米特的，V'是ψ的零空间$V^0=V_\psi^0$的补. 于是 $\psi|_{V'}$是非退化的.

证明: 设$y'\in V'$且对所有$x'\in V'$, 有$\psi(x',y')=0$. 于是对所有$x\in V$, 也有$\psi(x,y')=0$, 即$y'\in V^0\cap V'$, 于是$y'=0$. □

现在我们能来证明埃尔米特形式 ψ的 Sylvester惯性定理. 对每一个这样的形式ψ, 可唯一确定三个整数$n_0,n_+,n_-\geq 0$, 而且$n_0+n_++n_-=n=\dim V$.

定理6.5.11 设ψ是V上的一个埃尔米特形式. 于是V可分解成直和

$$V=V^0\oplus V^+\oplus V^-. \tag{6.8}$$

这里V^0是作为ψ的零空间V_ψ^0而被唯一确定的. $\psi|_{V^+}$是正定的，$\psi|_{V^-}$是负定的. 即

$$x\in V^+\backslash\{0\}\Longrightarrow\psi(x,x)>0$$

及

$$x\in V^-\backslash\{0\}\Longrightarrow\psi(x,x)<0.$$

令 $\dim V^0=n_0$, $\dim V^+=n_+$, $\dim V^-=n_-$. 整数n_0,n_+,n_-是唯一确定的.

证明: 为了证明分解 (6.8) 的存在性，我们在 V 上导入一个数量积 $<\ ,\ >$. 令 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$ 是如 6.5.6 中的一组 ON-基，于是 $\psi(d_i,d_j)=\lambda_i\delta_{ij}$. V^0 是由 $\lambda_i=0$ 的那些 d_i 所生成的空间，设 V^+ 是由使 $\lambda_i>0$ 的 d_i 所生成的子空间， V^- 为由使 $\lambda_i<0$ 的 d_i 所生成的子空间. 一般地说，这样所定义的分解自然是依赖于数量积的选取.

现在如在 (6.8) 中那样，考虑一个进一步的分解:

$$V=V'^0\oplus V'^+\oplus V'^-.$$

于是 $V'^0=V^0=\psi$ 的零空间. 剩下只要去证明 $\dim V'^+=\dim V^+$ 和 $\dim V'^-=\dim V^-$. 显然只需证明第一个等式. 对此，考虑线性投影

$$pr^+:V=V^0\oplus V^+\oplus V^-\longrightarrow V^+;$$

$$x=x_0+x_++x_-\longmapsto x_+.$$

我们指出: $\ker\ (pr^+|_{V'^+})=0$. 于是 $\dim V'^+\le\dim V^+$. 将分解反转过来，同样可得出 $\dim V^+\le\dim V'^+$.

事实上， $x\in V'^+\Longrightarrow\psi(x,x)\ge 0$ 及 $x\in\ker pr^+\Longrightarrow x=x_o+x_-$, 于是 $\psi(x,x)\le 0$, 即 $x=0$. □

我们以一个关于体积的结果作为本节的结束.

定理6.5.12 设 V 是一个酉向量空间， $\dim V=n$. 对 V 的一组 ON- 基 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$, 我们定义映射

$$\wedge_D:(x_1,\cdots,x_n)\in V\times\cdots\times V\longmapsto\det(<x_i,d_j>)\in\mathbf{C}.$$

如果 D' 进一步是一组 ON- 基，则成立

$$\wedge_{D'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\wedge_D,$$

这里

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=\det(\Phi_D^{-1}\circ\Phi_{D'})=\det(\Phi_{D'}\circ\Phi_D^{-1}).$$

最后，对任意的 $(x_1,\cdots,x_n)\in V\times\cdots\times V$，Gram 行列式定义为

$$\det(<x_i,x_j>)=\wedge_D(x_1,\cdots,x_n)\overline{\wedge_D(x_1,\cdots,x_n)}.$$

称数 $(\det(<x_i,x_j>))^{\frac{1}{2}}=|\wedge_D(x_1,\cdots,x_n)|$ 为平行多面体 $\{\sum_i t_ix_i, 0\le t_i\le 1\}$ 的体积.

证明：设 $D'=\{d_1',\cdots,d_n'\}$. 因为 $d_j=\sum_k<d_j,d_k'>d_k'$，所以 $\Phi_D^{-1}\circ\Phi_{D'}$ 关于基 D 的矩阵表示 B 的元素 b_{jk} 是用 $<d_j,d_k'>$ 来给出的. 于是

$$<x_i,d_k'>=\sum_j<x_i,d_j>\overline{<d_k',d_j>}=\sum_j<x_i,d_j><d_j,d_k'>.$$

最后的结论得自

$$<x_i,x_k>=\sum_j<x_i,d_j>\overline{<x_k,d_j>}.$$

习题

1. 对 $\mathbf{R}^2$，讨论具有下列范数的单位圆（即范数为 1 的向量的集合）的形状：

(a) $|(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2}$,

(b) $|(x,y)|=\max\{|x|,|y|\}$,

(c) $|(x,y)|=|x|+|y|$.

2. 在 $[0,1]$ 上连续实值函数的空间 $C([0,1];\mathbf{R})$ 中考虑阶 ≤ 4 的多项式所组成的子空间. 试确定关于数量积

$$<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

的一组属于基 $B=\{b_0,\cdots,b_4\}$ 的标准正交基，这里 $b_i=x^i$.

3. 证明：赋范向量空间 $(V,|\ \ |)$ 总能被完备化成一个Banach空间 $(\overline{V},|\ \ |)$. 选 V 中 Cauchy 序列的等价类为 $\overline{V}$ 中的元素 $\bar{x}$(两个序列是等价的，如果它们的差是一个零序列).

4. 考虑由 (n,n)-矩阵所构成的 K-向量空间 $M_K(n,n)$，这里 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. 这个空间能与 K^{n^2} 恒同.

(a) 证明 $\det: M_K(n,n)\longrightarrow K$ 及 $\mathrm{Tr}: M_K(n,n)\longrightarrow K$ 是连续的.

(b) 更一般地，考虑映射 $\chi_j: M_K(n,n)\longrightarrow K, 0\leq j\leq n$，它把一个矩阵 A 对应于其特征多项式 $\chi_A(t)=\sum\limits_{j=0}^{n}\chi_j t^j$ 中关于 t^j 的系数 χ_j. 证明： χ_j 是连续的.

5. 设 $[a,b]\subset\mathbf{R}$ 是一个闭的有界区间， $a<b$.

(a) 在 $\mathcal{C}([a,b];\mathbf{R})$ 上我们定义范数

$$|f|_\infty=\sup_{a\leq t\leq b}|f(t)| \quad 及 \quad |f|_2=(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}.$$

证明： $|f|_2\leq\sqrt{b-a}|f|_\infty$.

(b) 按照 Weierstraß 逼近定理，多项式所构成的子空间在 $\mathcal{C}([a,b];\mathbf{R})$ 中关于 $|\ \ |_\infty$ 是稠密的. 证明：它对于 $|\ \ |_2$ 也是成立的.

6. 设 $A=(a_{ij})\in M_{\mathbf{R}}(n,n)$ 是对称的，即对所有 i,j，有 ${}^tA=A$ 或者 $a_{ij}=a_{ji}$. 考虑映射

$$<\ ,\ >: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}; \quad <x,y>=xA^ty=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.$$

(a) 证明： $<\ ,\ >$ 对于每个变量都是线性的，且 $<\ ,\ >$ 是对称的，即对所有 $x,y\in\mathbf{R}^n$，有 $<x,y>=<y,x>$.

(b) 证明：对所有 $x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0$ 有 $< x, x >> 0$ 的充要条件是对所有 $m = 1, \cdots, n$ 及左边上面的子矩阵 $A_m = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$ 的行列式，成立 $\det A_m > 0$.

(提示：对 n 使用归纳法.)

7. 考虑一个酉向量空间 $\{V, < \ , \ >\}$. 设 $x_1, \cdots, x_k$ 是 V 中的 k 个元素. 考虑 (k,k)-矩阵 $G = (< x_i, x_j >)_{1 \leq i,j \leq k}$. 证明：$\det G \geq 0$, 且 $\det G = 0$ 仅当 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 是线性相关时才成立.

注：称 G 为 k 个元素的Gram 行列式，见6.5.12. 对 $n = 2$, 这是Cauchy-Schwarz不等式.

(提示：如果 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 是自由的，则利用这个集合所生成的子空间的一组ON-基.)

8. 考虑具有典范的数量积的 $\mathbf{R}^3$. 试确定正交矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

的实Jordan 标准形.

9. 设 V 是一个 n 维酉向量空间，且 $U \subset V$ 是一个子空间. 证明：

(a) 存在恰好一个线性映射 $s_U : V \longrightarrow V$, 使得

$$s_U(x) = \begin{cases} x; & \text{当} x \in U \\ -x; & \text{当} x \in U^{\perp}. \end{cases}$$

(b) $\det(s_U) = (-1)^{\text{codim } U}$.

(c) $s_U \in \boldsymbol{U}(V)$.

称 s_U 为关于子空间 U 的镜射.

10. 设 V 是一个有限维的酉空间. 称 $s \in \boldsymbol{U}(V)$ 为镜射，如果 $s \neq \text{id}$ 和 $s \circ s = \text{id}$. 证明：对一个镜射 s, 存在一个唯一确

定的子空间$U \subset V$, 使得$s = s_U$, 即镜像映射s是在习题9中定义的关于子空间U的镜射s_U.

11. 设V是一个2维欧氏向量空间, $f \in \boldsymbol{O}(V)$. 证明:

(a) 如果$\det(f) = -1$, 则f是关于一个1维子空间的镜像映射 (简记为: f是一个直线镜射).

(b) 如果$\det(f) = 1$, 则f是两个直线镜射的乘积.

(提示: 对一个任意的直线镜射s, 成立$\det(s \circ f) = -1$.)

12. 设V是一个有限维的酉向量空间, 设$f: V \longrightarrow V$为线性的. 证明: f是正规的 (即$f \circ f^* = f^* \circ f$) 的充要条件是关于适当的ON-基, f可用一个对角矩阵表示出来.

13. 设$(V, < , >)$是一个欧氏向量空间, 且$V_{\mathbf{C}} = V + \mathrm{i}V$是它的复扩张, 证明:

(a) 用

$$<x + \mathrm{i}y, x' + \mathrm{i}y'>_{\mathbf{C}} = <x, x'> + \mathrm{i}<y, x'> - \mathrm{i}<x, y'> + <y, y'>$$

定义了$V_{\mathbf{C}}$上的一个数量积.

(b) 设$f \in \boldsymbol{O}(V)$. 证明

$$f_{\mathbf{C}}: V_{\mathbf{C}} \longrightarrow V_{\mathbf{C}}; \quad x + \mathrm{i}y \longmapsto f(x) + \mathrm{i}f(y)$$

是酉的.

14. 设V是一个$K = \mathbf{C}$或$\mathbf{R}$上的n维向量空间, ψ是一个埃尔米特形式. 证明:

(a) 对所有$(x, y) \in V \times V$, 满足

$$\psi(f(x), f(y)) = \psi(x, y) \tag{6.9}$$

的$f \in GL(V)$的集合$U(V, \psi)$构成了$GL(V)(= V$的线性双射的群)的一个子群.

(b) 设 ψ 是非退化的. 若一个线性映射 $f: V \to V$ 满足(6.9), 则 $f \in GL(V)$.

15. 设 V 是有限维实向量空间. ψ 是 V 上的一个对称的双线性形式. 证明: 若对所有的 $x \neq 0$, $\psi(x,x) \neq 0$, 则对所有的 $x \neq 0$, $\psi(x,x)$ 有相同的符号.

第 7 章

仿射几何

7.1 仿射空间

我们来定义向量空间 V 上的仿射空间 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 的概念. $\mathcal{A}$ 和 V 的元素是1–1对应的. 本质上, 这个构造涉及到让零元素 $0\in V$ 起着一个突出的作用, 且使它与 V 的所有元素等价. 于是 $\mathcal{A}$ 成为一个齐性空间, 加法群 V 在其上单纯可迁地作用着. 将点 $o\in\mathcal{A}$ 标明为原点就导出了一个与 V 保持结构的同构.

定义 7.1.1 设 V 是任意域 K 上的一个向量空间. 我们称 V 上的仿射空间 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 是指一个集合, 称此集合中的元素 p, q, r 为点. 进而, 对每个 $x\in V$, 定义一个双射

$$x+:\quad \mathcal{A}\to\mathcal{A};\quad p\mapsto x+p,$$

称之为用 (向量) x 的平移, 使得成立:

1. $(x+y)+p=x+(y+p)$.

2. 对 $\mathcal{A}$ 中任意两点 p 和 q, 存在正好一个 $x\in V$, 使得 $x+p=q$. 这样的 x 也用 $(q-p)$ 或者 $q-p$ 来表示.

命题 7.1.2 设 $\mathcal{A}$ 是 V 上的仿射空间. 于是映射

$$V(\text{加法群})\to \operatorname{Perm}\mathcal{A};\quad x\mapsto x+ \tag{7.1}$$

是一个群态射, 且其核为 0, 于是为单射, 即

$$x+=\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\Longleftrightarrow x=0\in V.$$

证明: 按 1.2.2, $\operatorname{Perm}\mathcal{A}$ 中两个元素 f 和 g 的复合 $f\cdot g$ 是用 $g\circ f$ 给出的. 7.1.1.1 指出: (7.1) 是一个态射: $(x+y)+=$

$(x+)\cdot(y+)$. (这里我们已用了 $x+y=y+x$). 特别由此可得 $0+=\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. 7.1.1.2蕴含 $0\in V$ 是 (7.1) 的核中的唯一的元素: $x+=\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\Longleftrightarrow x=0$. □

例7.1.3 我们定义 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 的模型 $V=V(\mathcal{A})$ 如下: V 的点就是 V 的元素. $x+:V\longrightarrow V$ 是用 $z\longmapsto x+z$ 给出的. 于是按1.2.7的术语, x 作为在 V 上的左平移: $x+=L_x$. 7.1.1.1表明 $L_{x+y}=L_x\cdot L_y$. 而且由于 $(y-x)+x=y$, 7.1.1.2成立.

注: 在 $\mathcal{A}(V)$ 的模型 V 中, 点 $0\in V$ 是作为'原点'来特定的, 而在 $\mathcal{A}(V)$ 中没有特定的点. 现在我们说明, 这是 $\mathcal{A}$ 和其模型之间的唯一区别.

定理7.1.4 设 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 是 V 上的仿射空间. 点 $o\in\mathcal{A}$ (称为原点) 的选取相当于映至 $\mathcal{A}$ 的模型上的一个保持结构的同构

$$\Phi_o:\ \mathcal{A}\to V;\quad p\mapsto(p-o).$$

也称 $(p-o)$ 为 p 关于 o 的位置向量.

证明: 因为7.1.1.2, Φ_o 是双射. Φ_o 与平移交换:

$$\Phi_o(x+p)=(x+p)-o=x+(p-o)=x+\Phi_o(p).$$

中间的等式得自

$$((x+p)-o)+o=x+p=(x+(p-o))+o.$$

逆映射 Φ_o^{-1} 是用 $x\longmapsto x+o$ 给出的. □

命题7.1.5 成立着下列计算规则:

1. $(p-p)=0\in V$.
2. $-(q-p)=(p-q)$.
3. $(r-q)+(q-p)=(r-p)$ (三角形法则).
4. $(q-p)=(q'-p')\Longleftrightarrow(q'-q)=(p'-p)$ (平行边形法则).

证明: 对 1.: $(p-p)+p=0+p$.

对 2.: $(p-q)+(q-p)=(p-p)=0$.

对 3.: 在两边应用 p.

对 4.: 由假设知, $(q'-q)=(q'-p')+(p'-p)+(p-q)=(p'-p)$. 反过来, 也同样可得. □

我们现在来讨论所谓的重心计算.

引理 7.1.6 设 $(p_\iota)_{\iota\in I}$ 是 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 中的一族点. 对于 K 中的具有有限类型的族 $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ (即对几乎所有的 $\iota\in I$, 有 $\alpha_\iota=0$), 且满足 $\sum_\iota \alpha_\iota=1$, 则点 $\sum_\iota \alpha_\iota(p_\iota-o)+o$ 与 $o\in\mathcal{A}$ 的选取无关. 我们今后将它简记为 $\sum_\iota \alpha_\iota p_\iota$, 且称它为具有重量为 $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ 的族 $(p_\iota)_{\iota\in I}$ 的重点或重心.

证明: 设 o,o' 在 $\mathcal{A}$ 中. 于是

$$\begin{aligned}\sum_\iota \alpha_\iota(p_\iota-o)+o&=\sum_\iota \alpha_\iota((p_\iota-o')+(o'-o))+o\\&=\sum_\iota \alpha_\iota(p_\iota-o')+\sum_\iota \alpha_\iota(o'-o)+o\\&=\sum_\iota \alpha_\iota(p_\iota-o')+(o'-o)+o\\&=\sum_\iota \alpha_\iota(p_\iota-o')+o'.\end{aligned}$$

□

例 7.1.7 1. 如果族仅由一个元素 p 构成, 则重心总是 p. 当对所有 $\iota\in I$, 有 $p_\iota=p$, 则也有同样的结论.

2. 选 $o\in\mathcal{A}$. 设 $(p_\iota)_{\iota\in I}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个族, $(\beta_\iota)_{\iota\in I}$ 是 K 中的有限类型的一个任意的族. 则有

$$\begin{aligned}&\sum_\iota \beta_\iota p_\iota+(1-\sum_\iota \beta_\iota)o\\&\qquad=\sum_\iota \beta_\iota(p_\iota-o)+(1-\sum_\iota \beta_\iota)(o-o)+o\end{aligned}$$

$$= \sum_{\iota} \beta_{\iota}(p_{\iota} - o) + o.$$

3. 设$p_1 \neq p_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. 于是人们能把$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = \alpha_2(p_2 - p_1) + p_1$看成是过两点$p_1, p_2$的直线上的点. 因为$\alpha_2$能任意选取，所以我们能以这种方式得出直线上的所有的点. 关于直线的概念，可参见7.1.11.

4. 设在域K中，和式$1 + \cdots + 1$ (m次求和) $= m \neq 0$. 于是称$\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{m}$为点$\{p_1, \cdots, p_m\}$的 (通常) 重心. 对$m = 2$, 这是$p_1$和$p_2$的中点. 对$m = 3$, 这是三条中线

$$\{\alpha_1(\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3) + \alpha_2 p_1, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\},$$
$$\{\beta_1(\frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_1) + \beta_2 p_2, \beta_1 + \beta_2 = 1\},$$
$$\{\gamma_1(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2) + \gamma_2 p_3, \gamma_1 + \gamma_2 = 1\}$$

的交点. 这三条直线的交点得自$(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2) = (\gamma_1, \gamma_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

定义7.1.8 所谓$\mathcal{A}$的一个 (仿射) 子空间$\mathcal{B}$是指$\mathcal{A}$的一个子集$\mathcal{B} \neq \emptyset$, 它关于重心映射是闭的. 即如果$(p_\iota)_{\iota \in I}$是$\mathcal{B}$中的族，$(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$是$K$中的族，且$\sum_\iota \alpha_\iota = 1$, 则$\sum_\iota \alpha_\iota p_\iota \in \mathcal{B}$. 这里以及下文中设$(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$总是有限类型的.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$的仿射子空间和$V$的子空间有紧密的关系：

定理7.1.9 1. 设$\mathcal{B} \subset \mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$是仿射子空间. 设$o \in \mathcal{B}$. 于是$\Phi_o(\mathcal{B}) = U$是$V$的一个子空间. U与$o \in \mathcal{B}$的选取无关. 称$\Phi_o(\mathcal{B})$为$\mathcal{B}$的方向. 我们今后也将它写成$U_{\mathcal{B}}$.

2. 设$U \subset V$为子空间. 选$o \in \mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$. 于是$\mathcal{B} = \{x + o, x \in U\}$是$\mathcal{A}$的具有方向$U$的仿射子空间.

证明: 对1.: 按照7.1.7.2, $\Phi_o(\mathcal{B})$如含有$\Phi_o(p_\iota) = p_\iota - o = x_\iota$,

也含有

$$\Phi_o(\sum_\iota \beta_\iota p_\iota + (1-\sum_\iota \beta_\iota)o) = \sum_\iota \beta_\iota p_\iota + (1-\sum_\iota \beta_\iota)o - o$$
$$= \sum_\iota \beta_\iota (p_\iota - o).$$

即 $\Phi_o(\mathcal{B})$ 是 $\Phi_o(\mathcal{B})$ 中族 $(x_\iota)_{\iota\in I}$ 的线性生成集. 如果 o 和 o' 在 $\mathcal{B}$ 中, 则 $(p-o)-(o'-o)=(p-o')$ 也在 $\mathcal{B}$ 中, 且有 $(o'-o)\in\Phi_o(\mathcal{B})$. 于是 $\Phi_{o'}(\mathcal{B})\subset\Phi_o(\mathcal{B})$. 同样有 $\Phi_o(\mathcal{B})\subset\Phi_{o'}(\mathcal{B})$.

对2.: 设 $(x_\iota)_{\iota\in I}$ 是 U 中的族, $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ 是 K 中的族, 且满足 $\sum_\iota \alpha_\iota = 1$. 于是 $\sum_\iota \alpha_\iota(x_\iota+o)=\sum_\iota \alpha_\iota x_\iota + o\in\mathcal{B}$. □

在2.3.1, 2.3.3中我们已经导入了子集 $E\subset V$ 的线性生成集 $[E]$. 对子集 $\mathcal{P}\subset\mathcal{A}$ 的类似的概念为:

定义 7.1.10 设 $\mathcal{P}\neq\emptyset$ 是 $\mathcal{A}$ 的子集. 所谓 $\mathcal{P}$ 的仿射生成集是指集合 $[\mathcal{P}]=\{\sum_{p\in\mathcal{P}}\alpha_p p; \sum_{p\in\mathcal{P}}\alpha_p=1\}$. 因为 $[\mathcal{P}]$ 显然满足子空间性质 7.1.8, 我们也称由 $[\mathcal{P}]$ 为由 $\mathcal{P}$ 所生成的子空间.

定义 7.1.11 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子空间, 令 $\mathcal{B}$ 的维数 $\dim\mathcal{B}$ 为 $\dim U_{\mathcal{B}}$. 特别地, $\dim\mathcal{A}(V)=\dim V$.

$\dim\mathcal{B}=0$ 意味着 $\mathcal{B}=\{p\}$.

$\dim B=1$ 意味着 $\mathcal{B}$ 是由两个不同的点 p,q 所生成的, $\mathcal{B}=[\{p,q\}]$. 于是我们也把 $\mathcal{B}$ 记为 $\mathcal{G}_{pq}$, 且称 $\mathcal{G}_{pq}$ 为过 p 和 q 的直线.

$\dim\mathcal{B}=2$ 意味着 $\mathcal{B}$ 是由三个不共线的点 p,q,r 所生成, 即 p,q,r 不共属于一条直线 $\mathcal{G}\subset\mathcal{A}$. 于是我们也称 $\mathcal{B}$ 为一个平面, 今后记为 $\mathcal{E}$, 或如果 $\mathcal{E}$ 中的 p,q,q 不共线, 则记为 $\mathcal{E}_{pqr}$.

定义 $\mathcal{B}$ 的余维数 $\operatorname{codim}\mathcal{B}$ 为 $\operatorname{codim}U_{\mathcal{B}}$. 如果 $\operatorname{codim}\mathcal{B}=1$, 则也称 $\mathcal{B}$ 为超平面.

命题 7.1.12 如果 $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ 是子空间, 且 $\mathcal{B}\cap\mathcal{B}'\neq\emptyset$, 则 $\mathcal{B}\cap\mathcal{B}'$ 是子空间.

证明: 这直接地得自定义7.1.8. □

成立着下列的维数公式, 可参见2.6.6.

定理7.1.13 设$\mathcal{B},\mathcal{B}'$是$\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$的有限维子空间. 于是成立

$$\dim\mathcal{B}+\dim\mathcal{B}'=\begin{cases}\dim\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'+\dim\mathcal{B}\cap\mathcal{B}', & 当\ \mathcal{B}\cap\mathcal{B}'\neq\emptyset,\\ \dim\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'+\dim U_{\mathcal{B}}\cap U_{\mathcal{B}'}-1, & 当\ \mathcal{B}\cap\mathcal{B}'=\emptyset.\end{cases}$$

注: 我们在这里用$\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'$来标记由$\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'$所生成的子空间$[\mathcal{B}\cup\mathcal{B}']$, 见7.1.10.

证明: 设$\mathcal{B}\cap\mathcal{B}'\neq\emptyset$. 选取$o\in\mathcal{B}\cap\mathcal{B}'$. 在$\Phi_o:\mathcal{A}\longrightarrow V$下, $\mathcal{B}$和$\mathcal{B}'$分别变至$U_{\mathcal{B}}$和$U_{\mathcal{B}'}$. $\Phi_o(\mathcal{B}\cap\mathcal{B}')=U_{\mathcal{B}}\cap U_{\mathcal{B}'}$及$\Phi_o(\mathcal{B}\cup\mathcal{B}')=U_{\mathcal{B}}+U_{\mathcal{B}'}$, 这是因为由$p\in\mathcal{B},p'\in\mathcal{B}'$, 有$(p-o)+(p'-o)=(p+p'-o)-o\in\Phi_o(\mathcal{B}\cup\mathcal{B}')$. 公式现在得自2.6.9.

在情形$\mathcal{B}\cap\mathcal{B}'=\emptyset$, 选取$o\in\mathcal{B}$, 且考虑由$o\cup\mathcal{B}'$所生成的空间$\mathcal{B}''$. 选取$o'\in\mathcal{B}'$. 则$o'-o\notin U_{\mathcal{B}}\cap\Phi_{o'}(\mathcal{B}')$. 因为$(p'-o)=(p'-o')+(o'-o)$, 所以$\Phi_o(\mathcal{B}'')=U_{\mathcal{B}''}$是由$\Phi_{o'}(\mathcal{B}')$及不含于其中的向量$(o'-o)$所生成. 于是$\dim\mathcal{B}''=\dim\mathcal{B}'+1$.

$$\mathcal{B}\cup\mathcal{B}''=\mathcal{B}\cup\mathcal{B}',\text{这是因为}\ \mathcal{B}''=[o\cup\mathcal{B}']\ \text{及}\ o\in\mathcal{B}.$$

$$U_{\mathcal{B}}\cap U_{\mathcal{B}''}=U_{\mathcal{B}}\cap U_{\mathcal{B}'},\text{这是因为}\ U_{\mathcal{B}''}=[(o'-o)\cup U_{\mathcal{B}'}].$$

于是$\dim(\mathcal{B}\cap\mathcal{B}'')=\dim(U_B\cap U_{\mathcal{B}'})$. 我们能对$\mathcal{B},\mathcal{B}''$运用第一个公式. □

例7.1.14 1. 设$\mathcal{A}=\mathbf{R}^3$. 考虑$\mathcal{A}$中两条异面直线$\mathcal{G}$和$\mathcal{G}'$, 即$\mathcal{G}\cap\mathcal{G}'=\emptyset$和$U_{\mathcal{G}}\neq U_{\mathcal{G}'}$. 按上述公式, 有

$$\dim(\mathcal{G}\cup\mathcal{G}')=\dim\mathcal{G}+\dim\mathcal{G}'+1=3,$$

即 $\mathcal{G}\cup\mathcal{G}'=\mathcal{A}$. 这也可用下面的方法看出：在 $\mathcal{G}$ 上选 p,q, 在 $\mathcal{G}'$ 上选 p',q', $p\neq q$ 及 $p'\neq q'$. 在我们的假设下， $(p'-p),(q'-p),(q-p)$ 是线性无关的， $\Phi_p(\mathcal{G}\cup\mathcal{G}')=\mathbf{R}^3$. 我们也称这四个点 p,q,p',q' 构成了一个一般四面体.

2. 考虑在 $\mathcal{A}=\mathbf{R}^2$ 中的一个广义三角形 p,q,r, 即 $(q-p)$ 及 $(r-p)$ 是线性无关的. 于是每点 $s\in\mathbf{R}^2$ 具有一个形如 $s=\alpha p+\beta q+\gamma r$ 的表示，这里 $\alpha+\beta+\gamma=1$, 即具有唯一确定的重心坐标 (α,β,γ). 满足 $\alpha\geq 0,\beta\geq 0,\gamma\geq 0$ 的点构成了这个三角形的内部.

例 7.1.15 $\mathcal{A}$ 的两个子空间 $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ 称为是平行的 (记为 $\mathcal{B}\parallel\mathcal{B}'$), 如果 $\dim\mathcal{B}=\dim\mathcal{B}'$, 且 $U_{\mathcal{B}}=\Phi_o(\mathcal{B})$ 和 $U_{\mathcal{B}'}=\Phi_o(\mathcal{B}')$ 是一致的，这里 $o\in\mathcal{B},o'\in\mathcal{B}'$.

命题 7.1.16 1. $\mathcal{B}\parallel\mathcal{B}'$ 是在 k 维子空间中的一个等价关系.

2. $\mathcal{B}\parallel\mathcal{B}'\Longleftrightarrow$ 存在一个 $x\in V$, 使得 $x+\mathcal{B}=\mathcal{B}'$.

证明: 对 1.: 得自 1.4.2.3.

对 2.: $\Phi_{o'}^{-1}\circ\Phi_o=(o'-o)+$. 于是，如果 $\mathcal{B}\parallel\mathcal{B}'$ 和 $o\in\mathcal{B},o'\in\mathcal{B}'$, 则 $(o'-o)+\mathcal{B}=\mathcal{B}'$. 反之，得自 $x+\mathcal{B}=\mathcal{B}',\Phi_{x+o}(\mathcal{B}')=\Phi_o(\mathcal{B})$. □

7.2 仿射变换与直射变换、基本定理

我们现在来考察态射，即在两个仿射空间之间保持结构的映射. 我们讨论的最精采部分是仿射几何的基本定理. 所遇到的所有向量空间的基域都是相同的.

定义 7.2.1 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 分别是 V 和 V' 上的仿射空间. 称映射

$$\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$$

为仿射对应 (或仿射映射), 如果它与重心映射交换.

也就是说，对$\mathcal{A}$中一族$(p_\iota)_{\iota\in I}$及K中一个有限类型的满足$\sum_\iota \alpha_\iota = 1$的族$(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$，成立

$$\varphi(\sum_\iota \alpha_\iota p_\iota) = \sum_\iota \alpha_\iota \varphi(p_\iota).$$

仿射对应$\varphi : \mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{A}(V')$与线性映射有着紧密的关系.

定理7.2.2 1. 设$\varphi : \mathcal{A} = \mathcal{A}(V) \longrightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A}(V')$是仿射的. 选取$o \in \mathcal{A}$. 于是

$$f_\varphi : V \longrightarrow V'; \quad x \longmapsto \varphi(x+o) - \varphi(o)$$

是线性的. 如果我们令$\varphi(o) = o'$, 则我们也能写$f_\varphi = \Phi_{o'} \circ \varphi \circ \Phi_o^{-1}$. f_φ与$o \in \mathcal{A}$的选取无关. 我们称f_φ为从属于φ的线性映射.

2. 反过来，设给定一个线性映射$f : V \longrightarrow V'$及$\mathcal{A} = \mathcal{A}(V), \mathcal{A}' = \mathcal{A}(V')$. 选$o \in \mathcal{A}, o' \in \mathcal{A}'$. 于是

$$\varphi_f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'; \quad p \longmapsto f(p-o) + o'$$

是仿射的. 我们也能写$\varphi_f = \Phi_{o'}^{-1} \circ f \circ \Phi_o$. 从属于$\varphi_f$的线性映射是$f$.

证明: 对1.: 利用7.1.7.2, 我们有

$$\begin{aligned} f_\varphi(\sum_\iota \beta_\iota x_\iota) &= \varphi(\sum_\iota \beta_\iota(x_\iota + o) + (1 - \sum_\iota \beta_\iota) o) - \varphi(o) \\ &= \sum_\iota \beta_\iota \varphi(x_\iota + o) + (1 - \sum_\iota \beta_\iota)\varphi(o) - \varphi(o) \\ &= \sum_\iota \beta_\iota(\varphi(x_\iota + o) - \varphi(o)) = \sum_\iota \beta_\iota f_\varphi(x_\iota). \end{aligned}$$

因为$\varphi(x+o_1) - \varphi(o_1) = \varphi(x+o_2) - \varphi(o_2)$，$f_\varphi$与原点的选取无关.

对 2.:

$$\varphi_f(\sum_\iota \alpha_\iota p_\iota) = f(\sum_\iota \alpha_\iota p_\iota - o) + o' = f(\sum_\iota \alpha_\iota (p_\iota - o)) + o'$$
$$= \sum_\iota \alpha_\iota f(p_\iota - o) + \sum \alpha_\iota o' = \sum_\iota \alpha_\iota \varphi_f(p_\iota).$$

□

推论 7.2.3 设 $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ 是仿射的，$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是仿射子空间．于是 $\mathcal{B}' = \varphi(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{A}'$ 的仿射空间，且有 $U_{\mathcal{B}'} = f_\varphi(U_\mathcal{B})$.

证明: 选取 $o \in \mathcal{B}$. 于是 $\varphi(\mathcal{B}) = f_\varphi(U_\mathcal{B}) + \varphi(o)$, 即

$$\Phi_{\varphi(o)}\varphi(\mathcal{B}) = f_\varphi(U_\mathcal{B}).$$

□

例 7.2.4 1. 对每个 $x \in V, x+ : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是仿射的，且有 $f_{x+} = \mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$. 这是因为 $\Phi_{x+o} \circ (x+) \circ \Phi_o^{-1}$ 是复合

$$y \longmapsto y + o \longmapsto x + (y + o) = y + (x + o) \longmapsto y.$$

2. 设 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 是 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$ 的子空间, 且有 $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \{o\}, \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \mathcal{A}$. 令 $\Phi_o(\mathcal{B}) = U, \Phi_o(\mathcal{B}') = U'$. 于是 U' 是 U 在 V 中的补．利用 $pr_U : V \longrightarrow U, x = x_U + x_{U'} \in U + U' \longmapsto x_U$, 可用 $\Phi_o^{-1} \circ pr_U \circ \Phi_o$ 去定义 $pr_\mathcal{B} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. 称 $pr_\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 沿平行于 $\mathcal{B}'$ 的方向到 $\mathcal{B}$ 上的射影．$pr_\mathcal{B} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是仿射映射.

3. 设子空间 $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ 是平行的，见 7.1.15. 如果 $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ 是一个仿射映射，则象空间 $\mathcal{B}_0' = \varphi(\mathcal{B}_0), \mathcal{B}_1' = \varphi(\mathcal{B}_1)$ 是平行的. 这是因为按照 7.2.3, 有 $U_{\mathcal{B}_0'} = U_{\mathcal{B}_1'} = f_\varphi(U_{\mathcal{B}_0})$.

下列结果表明，仿射映射是作为仿射空间的范畴中的态射.

定理 7.2.5 1. $\mathrm{id}_\mathcal{A} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是仿射映射.

2. 设$\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$和$\varphi':\mathcal{A}'\longrightarrow\mathcal{A}''$是仿射映射. 于是复合$\varphi'\circ\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}''$也是一个仿射映射.

证明: 这立即得自 7.2.1.

定理 7.2.6 1. 设$\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$是一个仿射空间. 仿射双射$\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$的集合 $\text{Aff}\,(\mathcal{A})$是$\mathcal{A}$的双射群 $\text{Perm}\,\mathcal{A}$的子群. 称 $\text{Aff}\,(\mathcal{A})$为$\mathcal{A}$的仿射变换群.

2. 7.2.2.1 中的映射

$$f:\varphi\in\ \text{Aff}\,(\mathcal{A})\longmapsto f_\varphi\in L(V;V)$$

的象集是V的线性自同构群$GL(V)$. f是群态射, $\ker f$是$\mathcal{A}$的平移群$V+\cong V$.

证明: 对 1.: 按照 7.2.5, 如 $\varphi,\varphi'\in\ \text{Aff}\,(\mathcal{A})$, 则也有$\varphi'\circ\varphi\in\ \text{Aff}\,(\mathcal{A})$. 且由于$\varphi\circ\varphi^{-1}=\text{id}_{\mathcal{A}},\varphi\in\ \text{Aff}\,(\mathcal{A})$, 有

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\sum_\iota\alpha_\iota p_\iota)&=\varphi^{-1}(\sum_\iota\alpha_\iota\varphi\circ\varphi^{-1}(p_\iota))\\&=\varphi^{-1}\circ\varphi(\sum_\iota\alpha_\iota\varphi^{-1}(p_\iota))=\sum_\iota\alpha_\iota\varphi^{-1}(p_\iota).\end{aligned}$$

于是也满足子群判据.

对2.: 由$f_{\varphi'\circ\varphi}(p-o)=\varphi'\circ\varphi(p)-\varphi'\circ\varphi(o)=f_{\varphi'}(\varphi(p)-\varphi(o))=f_{\varphi'}\circ f_\varphi(p-o)$, 且由此有$f_\varphi\circ f_{\varphi^{-1}}=\text{id}_V$, 所以$f$是群 $\text{Aff}\,(\mathcal{A})$到$GL(V)$中的一个态射. 按照 7.2.2, f是满射. $\varphi\in\ker f$意味着对所有$p\in\mathcal{A}$, 有$\varphi(p)=(\varphi(o)-o)+p$, 于是$\varphi=(\varphi(o)-o)+$. □

定义 7.2.7 设$\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$是$V$上一个仿射空间. 所谓$\mathcal{A}$的一个仿射参照系 (也称为仿射基) 是指偶$(o,B)$, 这里$o$是$\mathcal{A}$中的一点, B是V的一组基.

注解 7.2.8 设 $\dim\mathcal{A}=n$. 于是我们也把具有下列性质的$n+1$个点的集合$P=\{p_0,p_1,\cdots,p_n\}$称为$\mathcal{A}$的仿射参照系:

$B=\{p_1-p_0,\cdots,p_n-p_0\}$是$V$的一组基. 于是这样的$P$确定了在7.2.7的意义下的一个参照系$(p_0=0,B)$. 反过来, 偶$(o,B)$, 这里$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$, 提供了形如$P=\{o=p_0,b_1+o,\cdots,b_n+o\}$的一个参照系.

定理7.2.9 对仿射空间$\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$, $\dim\mathcal{A}=n$, 存在一个仿射参照系$(o,B)=(o,\{b_1,\cdots,b_n\})$.

$$\Phi_{(o,B)}=\Phi_B\circ\Phi_o:\mathcal{A}\longrightarrow K^n$$

给出了到仿射空间K^n上的一个仿射同构 (见7.1.3).

注: 利用7.2.8中一个参照系P, 可定义相应的Φ_P.

证明: V具有一组基$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$, 由此得到$\mathcal{A}$的一个仿射参照系$(o,\{b_1,\cdots,b_n\})$. $\Phi_B\circ\Phi_o:\mathcal{A}\longrightarrow K^n$是用$p\longmapsto\Phi_B(p-o)=\sum_i\alpha_ie_i$来给出的, 这里$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是典范基. 因为$\Phi_B\circ\Phi_o(\sum_i\alpha_ip_i)=\Phi_B(\sum_i\alpha_i(p_i-o))=\sum_i\alpha_i\Phi_B\circ\Phi_o(p_i)$, 所以$\Phi_B\circ\Phi_o$是仿射的. □

定理7.2.10 设$(o,B)=(o,\{b_1,\cdots,b_n\})$是$\mathcal{A}$的仿射参照系.

1. 如果$\varphi\in\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$, 则$(\varphi(o),\{f_\varphi(b_1),\cdots,f_\varphi(b_n)\})$是仿射参照系.

2. 反过来, 如果$(o',\{b'_1,\cdots,b'_n\})$是仿射参照系, 则存在恰好一个$\varphi\in\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$, 使得$\varphi(o)=o',f_\varphi(b_i)=b'_i,1\le i\le n$.

于是$\mathcal{A}$的仿射参照系与$\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$的元素之间有着双方一一的对应.

证明: 对1.: 由7.2.6.2, 对$\varphi\in\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$, 有$f_\varphi\in GL(V)$, 于是$(\varphi(o),\{f_\varphi(b_1),\cdots,f_\varphi(b_n)\})$是一个仿射参照系.

对2.: 用$f(b_i)=b'_i,1\le i\le n$, 可定义$f\in GL(V)$, 于是可用$\Phi_{o'}^{-1}\circ f\circ\Phi_o$定义$\varphi\in\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$, 见7.2.2.2. □

定义7.2.11 称一个双射$\bar{\varphi}:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$为直射变换, 如果

$\mathcal{A}$中每条直线的象$\bar{\varphi}(\mathcal{G})$仍为一条直线. 此外, 我们假定基域$K$的特征$\neq 2$, 即$1+1\neq 0$.

注解7.2.12 1. 仿射变换$\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$显然是一个直射变换. 这是因为由7.2.3, 有$U_{\varphi(\mathcal{B})}=f_{\varphi}(U)$. 于是如果 $\dim\mathcal{B}=\dim U=1$, 则也有 $\dim\varphi(\mathcal{B})=1$.

2. 我们假设基域有$2\neq 0$是为了在下列引理中证明结论: 直射变换把任意维数的子空间变至相同维数的子空间. 如果在直射变换的定义中要求如此, 则假设$2\neq 0$是多余的.

3. 现在我们仅限于讨论 $\dim\mathcal{A}<\infty$的情形 —— 对一般情形可以类似地进行处理.

引理7.2.13 设$\bar{\varphi}:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$是一个直射变换. 则仿射子空间$\mathcal{B}$的象$\bar{\mathcal{B}}=\bar{\varphi}(\mathcal{B})$仍为仿射子空间, 且 $\dim\bar{\mathcal{B}}=\dim\mathcal{B}$.

证明: 我们对$l=\dim\mathcal{B}$用归纳法, 对$l=1$, 结论是显然的. 设对维数$<l$的子空间, 结论已被证明, 现设 $\dim\mathcal{B}=l$. 在$\mathcal{B}$中选取点$\{p_0,p_1,\cdots,p_l\}$, 使得每点$p\in\mathcal{B}$被唯一地表为$\sum_i\alpha_ip_i$, 其中$\sum_i\alpha_i=1$. 于是$\{p_i\}$构成了$\mathcal{B}$的一个仿射参照系.

我们首先指出: 对每个$p\in\mathcal{B}$, 存在子空间$\mathcal{U}$和$\mathcal{V}$, 它们分别是由一点p_j以及其补集$\{p_i,i\neq j\}$或者由一对点$\{p_j,p_k\}$及其补集$\{p_i,i\neq j,k\}$所张成, 使得$p=\beta q+\gamma r,q\in\mathcal{U},r\in\mathcal{V},\beta+\gamma=1$. 即$p$属于由$\{q,r\}$所生成的直线$\mathcal{G}$.

按假设, $\bar{\varphi}(\mathcal{U})=\bar{\mathcal{U}},\bar{\varphi}(\mathcal{V})=\bar{\mathcal{V}},\bar{\varphi}(\mathcal{G})=\bar{\mathcal{G}}$是子空间. 于是$\bar{\varphi}(p)=\bar{p}$可写成$\sum_i\bar{\alpha}_i\bar{p}_i$, 其中$\sum_i\bar{\alpha}_i=1$, 这里$\bar{p}_i=\bar{\varphi}(p_i)$. 因为每一个满足$\sum_i\bar{\alpha}_i=1$的点$\sum_i\bar{\alpha}_i\bar{p}_i$能被理解成通过上述适当选取的子空间$\bar{\mathcal{U}},\bar{\mathcal{V}}$中的点$\bar{q},\bar{r}$的直线上的点, 于是可得出: $\bar{\mathcal{B}}=\bar{\varphi}(\mathcal{B})$是$\mathcal{A}$的一个$l$维子空间.

现在来对一个给定的$p=\sum_i\alpha_ip_i$, 给出$\mathcal{U}$和$\mathcal{V}$的构造. 我们可假设, 对所有i, 有$\alpha_i\neq 0$. 设这些α_i中的一个, 譬如说α_j,

它$\neq 1$. 于是令$\mathcal{U}=\{p_j\}$, $\mathcal{V}$为p_i的生成集， $i\neq j$. 令$\alpha_j=\beta$, 并写

$$p=\beta p_j+\gamma\sum_{i\neq j}(\frac{\alpha_i}{\gamma})p_i,\ 且\gamma=\sum_{i\neq j}\alpha_i=1-\alpha_j\neq 0.$$

如果对所有的i, 有$\alpha_i=1$, 则$\sum_i\alpha_i=l+1=1$. 我们写

$$p=2(\frac{1}{2}p_0+\frac{1}{2}p_1)+(l-1)(\sum_{i=2}^{l}\frac{1}{l-1}p_i).$$

□

为了确定所有直射变换，我们先证明:

引理7.2.14 设$(o=p_0,\{p_1,\cdots,p_n\})$是$\mathcal{A}$的一个仿射参照系， $n\geq 2$. 保持这个参照系不变的直射变换

$$(\bar{\ }):\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A};\quad p\longmapsto\bar{p}$$

与$\mathcal{A}$的模型V的基域K的自同构$(\bar{\ }):K\longrightarrow K;\alpha\longmapsto\bar{\alpha}$之间可建立明了的可倒转的关系. 而且如果$p=\sum_i\alpha_ip_i,\sum_i\alpha_i=1$, 则$p$的象$\bar{p}$是用$\sum_i\bar{\alpha}_ip_i$来给出的.

注解7.2.15 域自同构$(\bar{\ }):K\longrightarrow K$是一个双射，且满足

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta};\ \overline{-\alpha}=-\bar{\alpha};\ \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta};\ \overline{(\alpha^{-1})}=\bar{\alpha}^{-1}.$$

于是特别地， $\bar{0}=0,\bar{1}=1$.

证明: 设$(\bar{\ }):K\longrightarrow K$是一个域自同构. 我们现在断言: $\sum_i\alpha_ip_i\longmapsto\sum_i\bar{\alpha}_ip_i$是一个直射变换. 事实上，如果$p=\sum_i\alpha_ip_i,q=\sum_i\beta_ip_i$是不同的点，则直线

$$\mathcal{G}=\left\{\alpha p+\beta q=\sum_i(\alpha\alpha_i+\beta\beta_i)p_i,\quad\alpha+\beta=1\right\}$$

将被变至直线 $\bar{\mathcal{G}} = \{\bar{\alpha}\bar{p} + \bar{\beta}\bar{q}, \bar{\alpha} + \bar{\beta} = 1\}$.

现在反过来，设$(^{-}) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}; p \longmapsto \bar{p}$是一个直射变换，且有$\bar{p}_i = p_i, 0 \le i \le n$. 如果$p = \sum_i \alpha_i p_i$, 则写$\bar{p} = \sum_i \bar{\alpha}_i p_i$. 如对$i > 0$, 有$\alpha_i = 0$, 则可得出：　$\bar{1} = 1$及$\bar{0} = 0$. 如果对$i > 1$, 有$\alpha_i = 0$, 则由$\alpha_0 + \alpha_1 = 1$及$\bar{\alpha}_o + \bar{\alpha}_1 = 1$可得出$\bar{\alpha}_0 + \overline{(1 - \alpha_0)} = 1$, 即对所有$\alpha \in K$, 有$\overline{1 - \alpha} = 1 - \bar{\alpha}$.

如果对$i > 2$, 有$\alpha_i = 0$, 则有$\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 + \overline{(1 - (\alpha_0 + \alpha_1))} = 1$, 因为 $\alpha = \alpha_0, \beta = \alpha_1$是任意的，所以有$\bar{\alpha} + \bar{\beta} - \overline{(\alpha + \beta)} = 0$. 于是$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$. 特别地，对$\beta = -\alpha : \overline{-\alpha} = -\bar{\alpha}$. 对$\alpha \ne 0$, 设$\alpha_0 = 1 - \dfrac{1}{\alpha}, \alpha_1 = \beta, \alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha} - \beta$, 且考察

$$\begin{aligned}p &= (1 - \frac{1}{\alpha})p_0 + \beta p_1 + (\frac{1}{\alpha} - \beta)p_2 \\ &= (1 - \frac{1}{\alpha})p_0 + \frac{1}{\alpha}(\alpha\beta p_1 + (1 - \alpha\beta)p_2).\end{aligned}$$

因为$\overline{\alpha\beta p_1 + (1 - \alpha\beta)p_2} = \overline{\alpha\beta}p_1 + (1 - \overline{\alpha\beta})p_2$, 所以得出$\bar{\beta} = \overline{(\dfrac{1}{\alpha})}\overline{\alpha\beta}$. 对$\beta = 1$, 得出$\overline{(\dfrac{1}{\alpha})} = \dfrac{1}{\bar{\alpha}}$, 并由此知$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$. □

现在我们来证明所谓的仿射几何基本定理.

定理7.2.16　设$\bar{\varphi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$是一个直射变换，$\dim \mathcal{A} \ge 2, 1 + 1 \ne 0$. 选定$\mathcal{A}$的一个仿射参照系$(o = p_0, \{p_1, \cdots, p_n\})$. 于是$\bar{\varphi}$形如$\varphi \circ (^{-})$, 这里$\varphi$是一个仿射变换，$(^{-})$是一个由7.2.14中用域自同构$(^{-}) : K \longrightarrow K$所确定的直射变换.

证明: 由 7.2.13, 我们知道，$\{\bar{p}_i = \bar{\varphi}(p_i), 0 \le i \le n\}$构成了$\mathcal{A}$的一个仿射参照系. 按照7.2.10.2, 存在一个合理地定义的仿射变换φ, 满足$\varphi(p_i) = \bar{p}_i$, 再对直射变换$\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}$应用7.2.14. □

例7.2.17　对$K = \mathbf{C}$, 复共轭$z \in \mathbf{C} \longmapsto \bar{z} \in \mathbf{C}$是一个非恒同的自同构.

然而，成立着

引理7.2.18 对有理数域$\mathbf{Q}$和实数域$\mathbf{R}$，恒同是唯一的域自同构.

证明：由$\bar{1}=1$得到，对所有$n\in\mathbf{Z}$，有$\bar{n}=n$. 于是对所有的$r=\dfrac{m}{n}\in\mathbf{Q}$，得到$\bar{r}=r$. 因为可将$\gamma>0$写成$\sqrt{\gamma}\sqrt{\gamma}$，所以$\bar{\gamma}>0$. 于是$\alpha<\beta\Longrightarrow\bar{\alpha}<\bar{\beta}$. 每一个$\rho\in\mathbf{R}$可用有理数$r$和$s$来逼近，使得$r<\rho<s$. 于是$\bar{\rho}=\rho$. □

补充7.2.19 对$\mathbf{Q}$或$\mathbf{R}$上维数≥ 2的仿射空间，每一个直射变换是一个仿射变换.

7.3 线性函数

现在我们对仿射空间$\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$，考察类似于$V$上线性形式的概念. 我们导入单比的概念，并证明一些基本定理.

定义7.3.1 设$\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$是一个仿射空间. 所谓线性函数是指一个非常值的仿射映射$\lambda:\mathcal{A}\longrightarrow K$. 即：存在一个非零的线性形式$l_\lambda:V\longrightarrow K$，及一点$o\in\mathcal{A}$，使得

$$\lambda(p)=l_\lambda(p-o)+\lambda(o).$$

$\lambda:\mathcal{A}\longrightarrow K$是一个满射.

命题7.3.2 1. 如果$\lambda(p)=l_\lambda(p-o)+\lambda(o)$是线性函数，则对任何其它的点$o'\in\mathcal{A}$，也成立：

$$\lambda(p)=l_\lambda(p-o')+\lambda(o').$$

2. 设$\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$是仿射的，$\lambda:\mathcal{A}'\longrightarrow K$是线性函数. 如果$\lambda|_{\mathrm{im}\ \varphi}\neq$常数，则$\lambda\circ\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow K$是线性的.

证明：对1.：由$(p-o)=(p-o')+(o'-o)$得知

$$\lambda(p)=l_\lambda(p-o)+\lambda(o)$$

$$= l_\lambda(p-o') + l_\lambda(o'-o) + \lambda(o)$$
$$= l_\lambda(p-o') + \lambda(o').$$

对2.: 按照7.2.5, 仿射映射的复合也是仿射的. □

例7.3.3 设 $\mathcal{A} = \mathcal{G}$ 是一条直线, $\lambda: \mathcal{G} \longrightarrow K$ 是线性的, $\text{im}\ \lambda = K$. 令 $\lambda^{-1}(0) = o, \lambda^{-1}(1) = p_1$. 因为 $p_1 \neq o$, 所以 (o, p_1) 或 (o, d_1) 是 $\mathcal{G}$ 的仿射参照系, 其中 $d_1 = p_1 - o$. 于是 $\lambda = \Phi_{(o,p_1)}$. 这是因为

$$\lambda(p) = \lambda(p) - \lambda(o) = l_\lambda(p-o) = l_\lambda(\alpha(p_1 - o))$$
$$= \alpha l_\lambda(p_1 - o) = \alpha = \Phi_{(o,p_1)}(p).$$

如我们在7.3.5中所见, 对任意维数的空间, 类似结果也成立.

命题7.3.4 设 $\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow K$ 是线性的. 对每个 $\alpha \in K$, 集合

$$\mathcal{H}_\alpha = \lambda^{-1}(\alpha) = \{p \in \mathcal{A}; \lambda(p) = \alpha\}$$

是一个超平面. 每两个如此定义的超平面 $\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\beta$ 是平行的, 且具有方向为 $U = \ker\ l_\lambda$.

证明: 选取 $o \in \mathcal{H}_\alpha$. 于是 $p \in \mathcal{H}_\alpha \Longleftrightarrow (p-o) \in \ker\ l_\lambda$. $\Phi_o(\mathcal{H}_\alpha) = \ker\ l_\lambda$ 与 $\alpha \in K$ 无关. 由3.2.3, 有 $\text{codim}\ \ker l_\lambda = 1$. □

现在我们来给出线性函数的一个几何描述.

引理7.3.5 1. 设 $\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow K$ 是线性的. 考虑 $\mathcal{H}_i = \lambda^{-1}(i), i = 0, 1$. 设 $\mathcal{G}$ 是一条直线, 它与 $\mathcal{H}_0$ 相交于唯一的一点: $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{G} = \{o\}$. 于是 $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{G}$ 形如 $\{p_1\}$. (o, p_1) 是 $\mathcal{G}$ 的一个参照系. 由此, $\lambda = \Phi_{(o,p_1)} \circ pr_{\mathcal{G}}$. 这里 $pr_{\mathcal{G}}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}$ 是从 $\mathcal{A}$ 沿着平行于 $\mathcal{H}_0$ 的方向到 $\mathcal{G}$ 上的投影, 见7.2.4.2, $\Phi_{(o,p)}: \mathcal{G} \longrightarrow K$ 是一个坐标映射.

2. 反之，设 $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ 是两个不相同的平行超平面. 选 $o \in \mathcal{H}_o, p_1 \in \mathcal{H}_1$, 用 $\mathcal{G}$ 来标记由 (o, p_1) 所生成的直线. 于是 $\Phi_{(o,p_1)} \circ pr_{\mathcal{G}}$ 给出了一个线性函数 λ. λ 与 $o \in \mathcal{H}_0$ 及 $p_1 \in \mathcal{H}_1$ 的选取无关.

证明: 对 1.: $\Phi_o : \mathcal{A} \longrightarrow V$ 将 $\mathcal{H}_0$ 映至余维数为 1 的子空间 $U = \ker l_\lambda$ 上. $\Phi_o(\mathcal{G})$ 是与 U 相补的维数为 1 的子空间 U'. 考虑平行射影 $pr_{\mathcal{G}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}$. 因为 $(p-o) = (p - pr_{\mathcal{G}}(p)) + (pr_{\mathcal{G}}(p) - o)$ 和 $(p - pr_{\mathcal{G}}(p)) \in U = \ker l_\lambda$, 所以有 $\lambda(p) = \lambda(pr_{\mathcal{G}}(p))$. 因而 $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{G}$ 是一个合理定义的点 $p_1 \in \mathcal{G}$, 且有 $\lambda(p_1) = 1$. 按照 7.3.3, 有 $\lambda|_{\mathcal{G}} = \Phi_{(o,p_1)}$.

对 2.: 由 7.3.3, 我们知道 $\Phi_{(o,p_1)} : \mathcal{G} \longrightarrow K$ 是一个线性函数. $pr_{\mathcal{G}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}$ 是仿射的. 于是由 7.3.2.2, 复合 $\Phi_{(o,p_1)} \circ pr_{\mathcal{G}}$ 也是仿射的. 如果 $o' \in \mathcal{H}_0, p_1' \in \mathcal{H}_1$, 则 $\lambda(o') = o, \lambda(p_1') = 1$. □

注解 7.3.6 也称线性函数 $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow K$ 为坐标. 这是用下面的规则来定义的: 设 $\dim \mathcal{A} = n$, 且设 $\{\lambda_i, 1 \le i \le n\}$ 是线性函数, 它们所属的线性形式 $\{l_i \equiv l_{\lambda_i}, 1 \le i \le n\}$ 是线性无关的, 于是构成了 $\mathcal{A}$ 的模型空间 V 的对偶空间 V^* 的一组基. 令 $\lambda_i^{-1}(0) = \mathcal{H}_{i,0}$. 由维数公式 7.1.13 得出, 交集 $\cap_i \mathcal{H}_{i,0}$ 有维数为 0, 于是仅由一个点 o 所构成.

用 $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$ 来记 V 的与 $\{l_1, \cdots, l_n\}$ 相对偶的基. $(o, \{d_1, \cdots, d_n\})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个仿射参照系. 于是同构 $\Phi_{(o,D)} = \Phi_D \circ \Phi_o : \mathcal{A} \longrightarrow K^n$ 正好是用 $p \longmapsto (\lambda_1(p), \cdots, \lambda_n(p))$ 来给出的. 这是因为, 如果 $p = \sum_i \alpha_i d_i + o$, 则 $\lambda_j(p) = \alpha_j$.

定义 7.3.7 设 (p, p_1, p_0) 是直线 $\mathcal{G}$ 上的点, 且有 $p_0 \ne p_1$. 所谓 (p, p_1, p_0) 的单比是指 p 关于 $\mathcal{G}$ 上的仿射参照系 (p_0, p_1) 的坐标. 记为

$$\mathrm{TV}\ (p, p_1, p_0) \text{ 或者 } \frac{p - p_0}{p_1 - p_0}.$$

注解7.3.8 于是成立

$$p = \frac{p-p_0}{p_1-p_0}(p_1-p_0)+p_0$$

和

$$p = \frac{p-p_0}{p_1-p_0}p_1 + (1-\frac{p-p_0}{p_1-p_0})p_0.$$

当我们谈及点(p,p_1,p_0)的单比，或者写$\frac{p-p_0}{p_1-p_0}$时，我们总是予先假设$p_1 \neq p_0$.

命题7.3.9 单比是一个仿射不变量. 精确地说，设$\varphi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$是一个仿射变换，$\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$是一条直线, 使得$\mathcal{G}' = \varphi(\mathcal{G})$是一条直线. 特别地，这对$\varphi \in \mathrm{Aff}\,(\mathcal{A})$是成立的. 则有

$$\frac{\varphi(p)-\varphi(p_0)}{\varphi(p_1)-\varphi(p_0)} = \frac{p-p_0}{p_1-p_0}.$$

证明: 因为$\varphi(\mathcal{G})$是直线，所以有$\varphi(p_1) \neq \varphi(p_0)$. 现在结论得自：仿射变换$\varphi$的定义是它与重心映射交换，见7.3.8. □

推论7.3.10 设$\mathcal{G}$是$\mathcal{A}$中的一条直线，且$\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow K$是一个线性函数，满足$\lambda|_{\mathcal{G}} \neq$常值. 于是对$\mathcal{G}$上的$(p,p_1,p_0)$，成立

$$\frac{p-p_0}{p_1-p_0} = \begin{cases} \frac{\lambda(p)-\lambda(p_0)}{\lambda(p_1)-\lambda(p_0)} = \frac{\lambda(p)}{\lambda(p_1)} & (\text{当}\lambda(p_0)=0) \\ \lambda(p) & (\text{当}\lambda(p_0)=0, \lambda(p_1)=1). \end{cases}$$

□

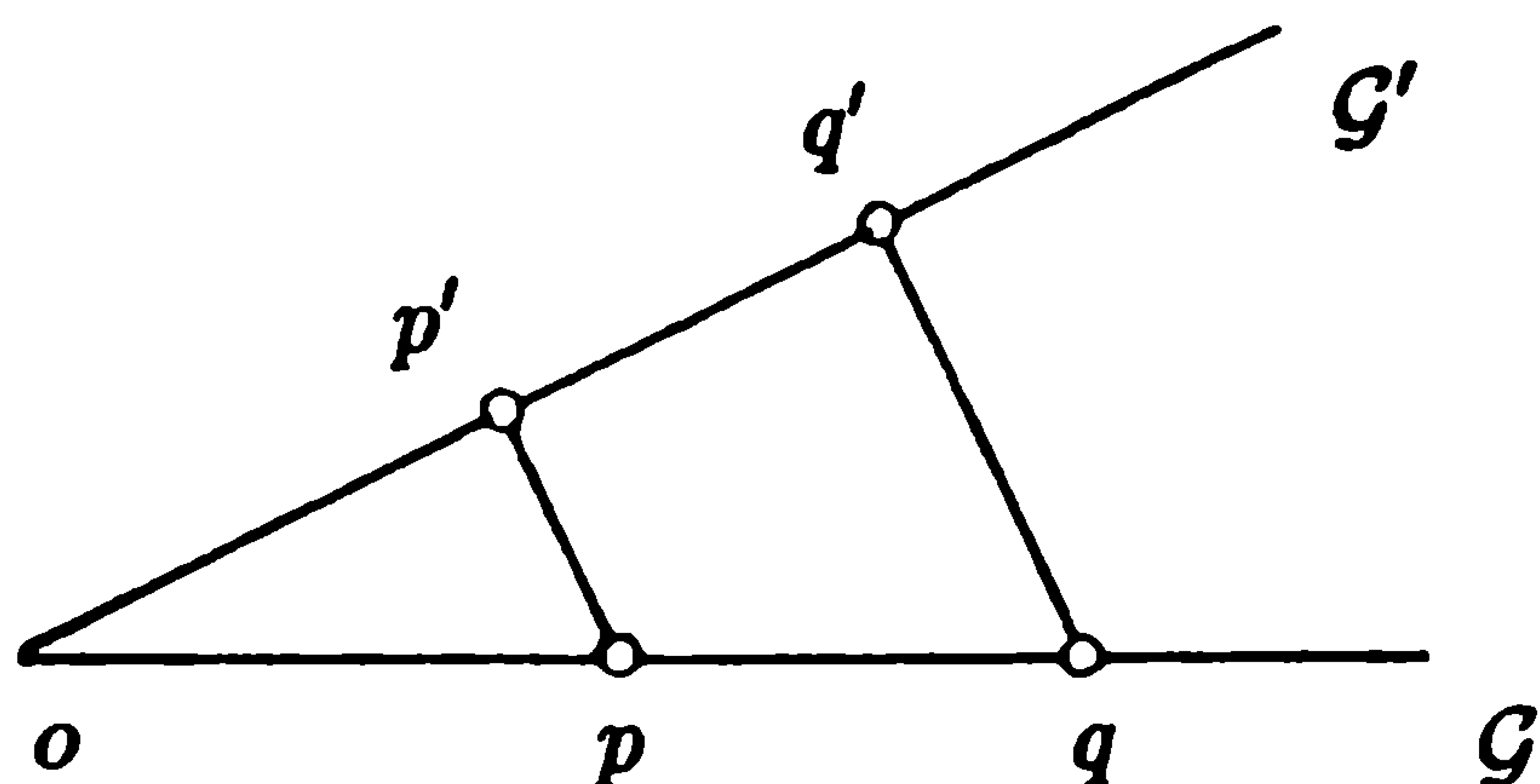
命题7.3.11 设p_0,p_1,p_1'是同一条直线上的点，且$p_1 \neq p_0, p_1' \neq p_0$. 则

$$\frac{p-p_0}{p_1-p_0} = \frac{p-p_0}{p_1'-p_0}\cdot\frac{p_1'-p_0}{p_1-p_0}.$$

证明: 选取在 $\mathcal{G}$ 上的线性函数 λ, 且 $\lambda(p_0)=0, \lambda(p_1)=1$. 于是按照 7.3.10, 等式得自 $\lambda(p)=\dfrac{\lambda(p)}{\lambda(p_1')}\lambda(p_1')$. □

现在我们来证明仿射几何的第一个分类定理, Thales 定理或射线定理.

定理 7.3.12 1. 设 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ 是 $\mathcal{A}$ 中的直线, 且 $\mathcal{G}\cap\mathcal{G}'=\{o\}$. 设 p 和 q 是 $\mathcal{G}$ 上不同于 o 的点, p' 和 q' 是 $\mathcal{G}'$ 上的不同于 o 的点, 则成立



$$\mathcal{G}_{pp'} \parallel \mathcal{G}_{qq'} \Longleftrightarrow \frac{q-o}{p-o}=\frac{q'-o}{p'-o}.$$

2. 设 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ 是彼此平行、但不相同的直线. 设

$$p, q \in \mathcal{G}, \qquad p', q' \in \mathcal{G}'.$$

于是成立

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{pp'} \parallel \mathcal{G}_{qq'} &\Longleftrightarrow (q'-q)=(p'-p)\\ &\Longleftrightarrow (q-p)=(q'-p').\end{aligned}$$

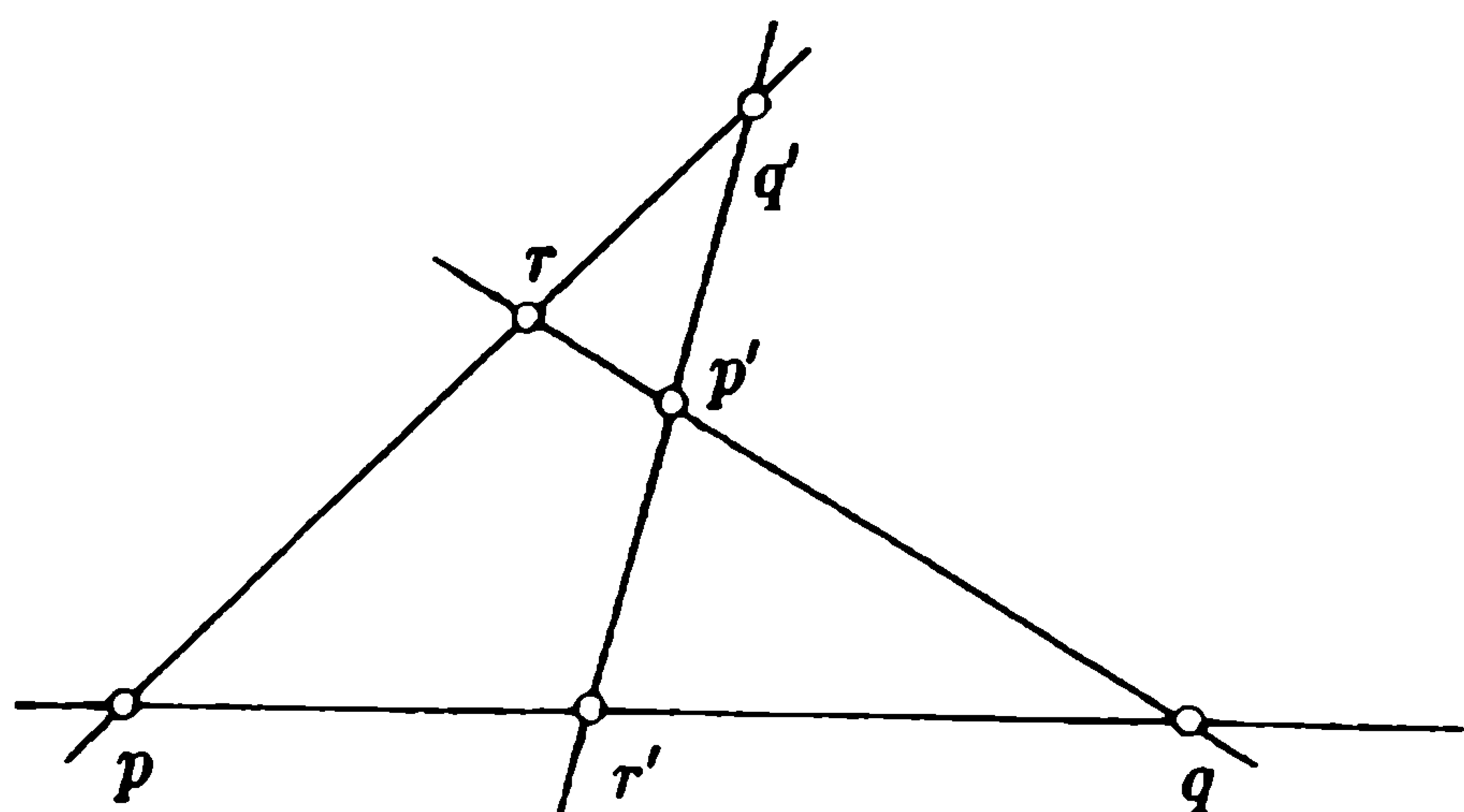
证明: 对 1.: 考察平面 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_{opp'}=\mathcal{E}_{oqq'}$. 按照 7.3.5.2, 存在一个线性泛函 $\lambda:\mathcal{E}\longrightarrow K$, 使得 $\lambda|_{\mathcal{G}_{pp'}}=0$. 于是

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{pp'} \parallel \mathcal{G}_{qq'} &\Longleftrightarrow \lambda(q)=\lambda(q')\\ &\Longleftrightarrow \frac{\lambda(q)-\lambda(o)}{0-\lambda(o)}=\frac{\lambda(q')-\lambda(o)}{0-\lambda(o)}\\ &\Longleftrightarrow \frac{q-o}{p-o}=\frac{q'-o}{p'-o}.\end{aligned}$$

对 2.: 按照 7.1.5.4, $(q-p)=(q'-p')$ 是等价于 $(q'-q)=(p'-p)$, 而这意味着 $\mathcal{G}_{pp'} \parallel \mathcal{G}_{qq'}$. □

作为经典结果的另一个例子，我们有 Menelaos 定理.

定理 7.3.13 设 p, q, r 是仿射空间 $\mathcal{A}$ 中的不共线的点. 设 $p' \in \mathcal{G}_{qr} \backslash \{q, r\}, q' \in \mathcal{G}_{pr} \backslash \{p, r\}, r' \in \mathcal{G}_{pq} \backslash \{p, q\}$. 于是成立:



$$p', q', r' \text{共线} \Longleftrightarrow \frac{q-p'}{r-p'} \cdot \frac{r-q'}{p-q'} \cdot \frac{p-r'}{q-r'} = 1.$$

证明: $\mathcal{G}_{r'p'}$ 和 $\mathcal{G}_{pq}$ 是不平行的. 于是存在一个线性泛函 $\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow K$ 使得 $\lambda|_{\mathcal{G}_{r'p'}}=0, \lambda|_{\mathcal{G}_{pq}} \neq$ 常值. 于是 $\lambda(p) \neq \lambda(q)$ 和 $\lambda(p)\lambda(q)\lambda(r) \neq 0$. 由此成立:

$$\begin{aligned}
p', q', r' \text{共线} &\Longleftrightarrow \lambda(q')=0 \\
&\Longleftrightarrow (\lambda(r)-\lambda(q'))\lambda(p) = \lambda(r)(\lambda(p)-\lambda(q')) \\
&\Longleftrightarrow \frac{\lambda(q)}{\lambda(r)} \cdot \frac{\lambda(r)-\lambda(q')}{\lambda(p)-\lambda(q')} \cdot \frac{\lambda(p)}{\lambda(q)} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{q-p'}{r-p'} \cdot \frac{r-q'}{p-q'} \cdot \frac{p-r'}{q-r'} = 1.
\end{aligned}$$

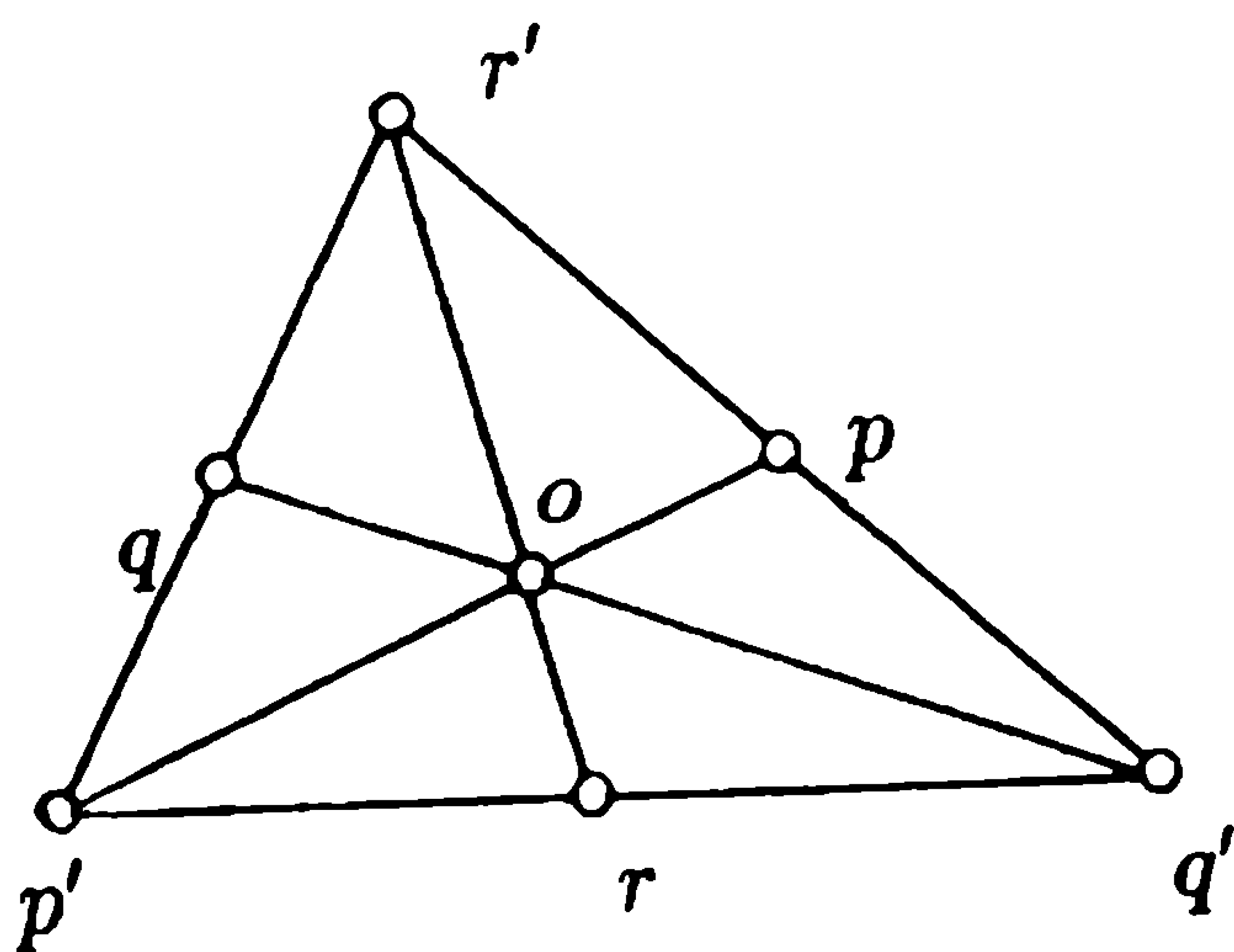
□

Menelaos 定理的对偶化给出了 Ceva 定理:

定理 7.3.14 设 p', q', r' 是 $\mathcal{A}$ 中不共线的点，又设

$$p \in \mathcal{G}_{q'r'} \backslash \{q', r'\}, q \in \mathcal{G}_{p'r'} \backslash \{p', r'\}, r \in \mathcal{G}_{p'r'} \backslash \{p', q'\}.$$

于是成立:



直线 $\mathcal{G}_{pp'}$, $\mathcal{G}_{qq'}$, $\mathcal{G}_{rr'}$ 共点（即这三条线有一个公共点 o

$$\iff \frac{q'-p}{r'-p}\cdot\frac{r'-q}{p'-q}\cdot\frac{p'-r}{q'-r}=-1.$$

注解7.3.15 由上述的对偶原则，在陈述中将点换成直线，直线换成点. 此外，还特别地将两点间的连线换成相应于这些点的直线的交点，两条线的交点换成相应于这些直线的点的连线.

于是Menelaos定理的对偶命题可按下列规则得出：

直线 $\mathcal{G}_{qr}$, $\mathcal{G}_{rp}$, $\mathcal{G}_{pq}$ 被相应地换成点 p',q',r'. $\mathcal{G}_{pq}\cap\mathcal{G}_{pr}=\{p\}$ 被换成点 q',r' 的连线 $\mathcal{G}_{q'r'}$, 同样，把 $\mathcal{G}_{qr}\cap\mathcal{G}_{pq}=\{q\}$ 换成 $\mathcal{G}_{p'r'}$, 把 $\mathcal{G}_{pr}\cap\mathcal{G}_{qr}=\{r\}$ 换成 $\mathcal{G}_{p'q'}$. $p'\in\mathcal{G}_{qr}$ 换成 $\mathcal{G}_{pp'}\ni p'$, $q'\in\mathcal{G}_{pr}$ 换成 $\mathcal{G}_{qq'}\ni q'$, $r'\in\mathcal{G}_{pq}$ 换成 $\mathcal{G}_{rr'}\ni r'$.

7.3.13中单比的乘积被换成7.3.14中单比的乘积，以及一个正负符号的选择并非很明了. 于是我们在下面给出Ceva定理的一个恰切的证明.

在每种情形剩下要去留意的是：在仿射平面中不相同的平行直线没有交点. 于是只有将仿射平面扩张到射影平面后，在完整的范围中对偶方法才有可能，对此，可参见第9章.

7.3.14的证明：考虑三个线性函数 $\lambda,\mu,\nu:\mathcal{A}\longrightarrow K$, 且满足 $\lambda|_{\mathcal{G}_{pp'}}=0$, $\mu|_{\mathcal{G}_{qq'}}=0$, $\nu|_{\mathcal{G}_{rr'}}=0$. 我们能假定 $\mathcal{A}=\mathcal{E}=\mathcal{E}_{p'q'r'}$ 是一个平面. 于是 $\mathcal{E}$ 的模型 V 是2维的，因而从属于 λ,μ,ν 的三个线性形式 l_λ,l_μ,l_ν 是线性相关的：存在 $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$, 使得

$$\alpha l_\lambda+\beta l_\mu+\gamma l_\nu=0.$$

于是线性函数$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=$常数. 于是, $\mathcal{G}_{pp'}$, $\mathcal{G}_{qq'}$, $\mathcal{G}_{rr'}$ 共点等价于该常数$=0$. 即线性方程组

$$\alpha\lambda(p')+\beta\mu(p')+\gamma\nu(p')=0,$$
$$\alpha\lambda(q')+\beta\mu(q')+\gamma\nu(q')=0,$$
$$\alpha\lambda(r')+\beta\mu(r')+\gamma\nu(r')=0$$

具有一个非平凡解 (α,β,γ). 因为 $\lambda(p')=\mu(q')=\nu(r')=0$, 其系数行列式为零意味着:

$$\mu(p')\nu(q')\lambda(r')+\nu(p')\lambda(q')\mu(r')=0.$$

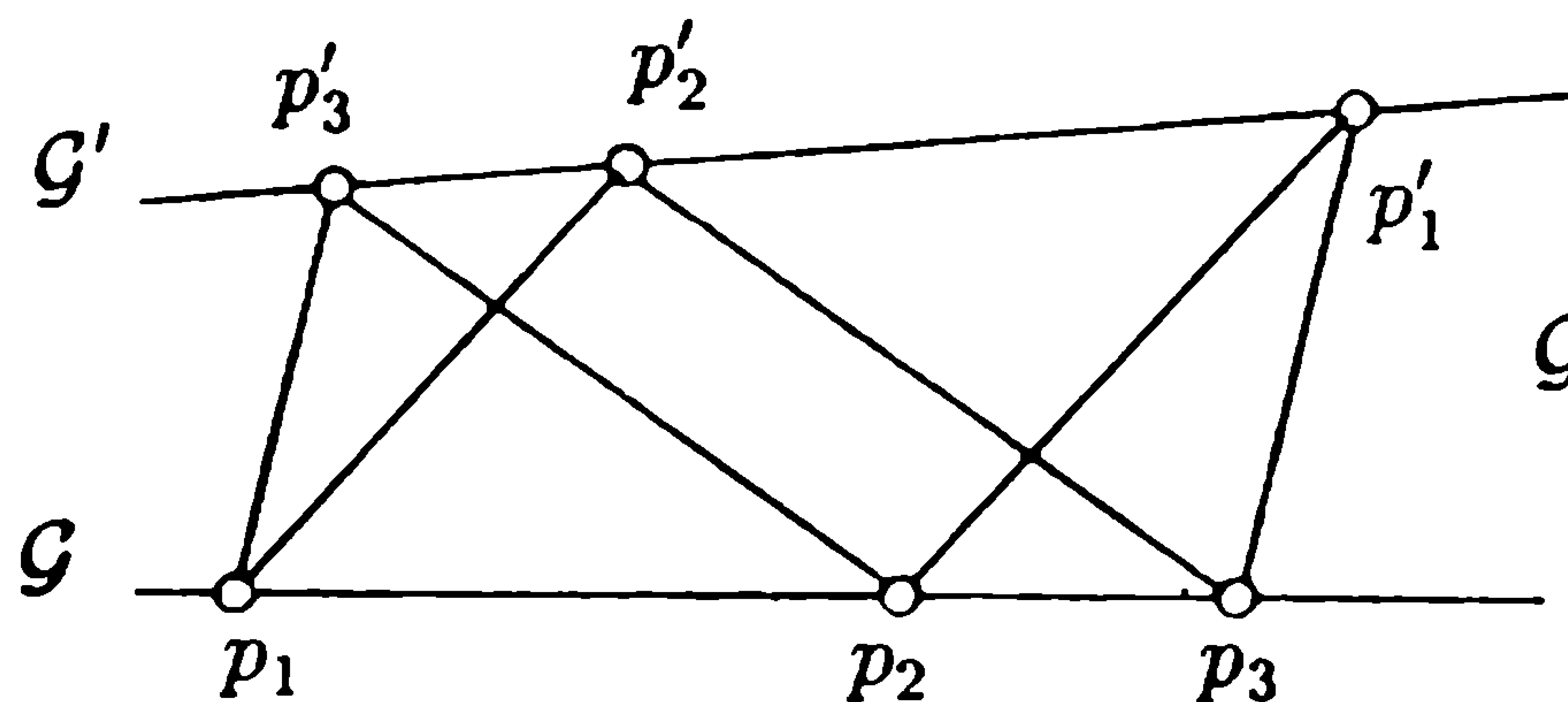
但这正好是7.3.14的右端, 它可写成:

$$\frac{\lambda(q')}{\lambda(r')}\cdot\frac{\mu(r')}{\mu(p')}\cdot\frac{\nu(p')}{\nu(q')}=-1.$$

□

现在我们来讨论Pappos-Pascal定理.

定理7.3.16 设$\mathcal{A}$是一个仿射平面, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$是$\mathcal{A}$中不同的直线. 设p_1,p_2,p_3是 $\mathcal{G}$上的点, p_1',p_2',p_3'是 $\mathcal{G}'$上的点, 在$\mathcal{G}\cap\mathcal{G}'=\{o\}$情形, 设它们与$o$均不相同. 于是成立:



$\mathcal{G}_{p_1p_3'}\parallel\mathcal{G}_{p_3p_1'}$及 $\mathcal{G}_{p_1p_2'}\parallel\mathcal{G}_{p_2p_1'}$

蕴含 $\mathcal{G}_{p_2p_3'}\parallel\mathcal{G}_{p_3p_2'}$.

注: 我们按照下述规则来叙述结论: 考察过p_3, 且平行于$\mathcal{G}_{p_2p_3'}$ 的直线 $\mathcal{G}^*$. 于是它与 $\mathcal{G}'$正好相交于已经确定的点p_2'. 上

面作出的 $\mathcal{G}^*$ 的图形亦在点p_2处"终止". 于是Pappos-Pascal定理是作为基本定理的一个例子.

证明: 首先讨论情形 $\mathcal{G}\cap\mathcal{G}'=\{o\}$. 因为7.3.12.1, 定理的假设可表为形如

$$\frac{p_3-o}{p_1-o}=\frac{p_1'-o}{p_3'-o} \text{ 及 } \frac{p_1-o}{p_2-o}=\frac{p_2'-o}{p_1'-o}.$$

于是7.3.11得出

$$\frac{p_3-o}{p_2-o}=\frac{p_2'-o}{p_3'-o},$$

按照7.3.12.1, 这意味着

$$\mathcal{G}_{p_2p_3'}\parallel\mathcal{G}_{p_3p_2'}.$$

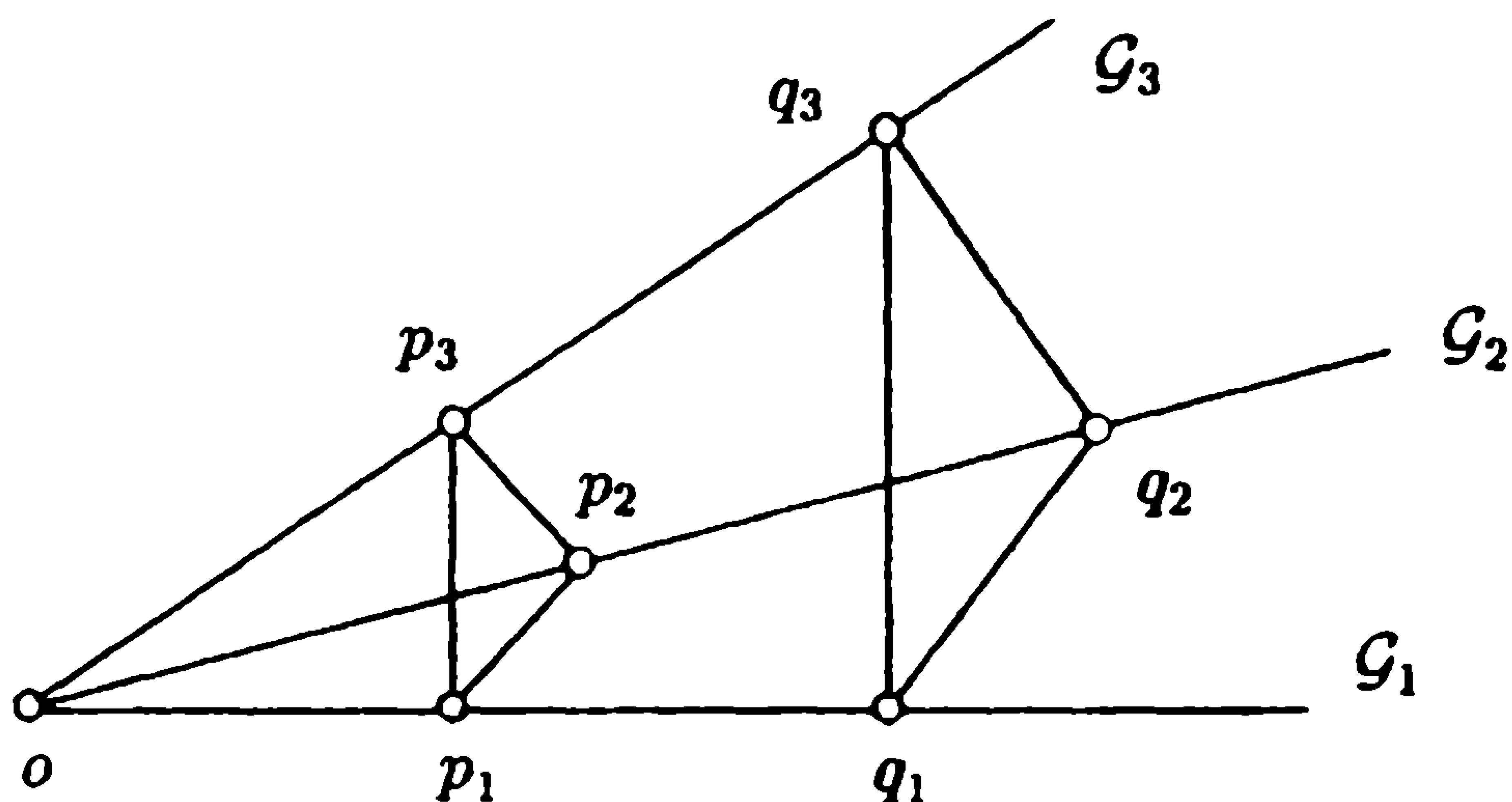
在 $\mathcal{G}\parallel\mathcal{G}'$ 的情形, 结论可以与7.3.12.2的类似方式得出:

$$p_3'-p_1=p_1'-p_3 \text{ 及 } p_2'-p_1=p_1'-p_2\Longrightarrow p_3'-p_2=p_2'-p_3.$$

□

一个重要的结果是Desargues定理:

定理7.3.17 设 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$是一个仿射平面$\mathcal{A}$中的三条互不相同的直线. 将它们延伸后应交于一点$o\in\mathcal{A}$, 或者互相平行. 在 $\mathcal{G}_i, i=1,2,3$上选取p_i,q_i. 在 $\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2\cap\mathcal{G}_3=\{o\}$的情形下, 这些点$p_i,q_i$均与$o$相异. 于是成立:



$\mathcal{G}_{p_1p_2}\parallel\mathcal{G}_{q_1q_2}$ 及
$\mathcal{G}_{p_1p_3}\parallel\mathcal{G}_{q_1q_3}$ 蕴含

$$\mathcal{G}_{p_2p_3}\parallel\mathcal{G}_{q_2q_3}.$$

证明: 首先考虑情形 $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 = \{o\}$. 如在7.3.16中的证明那样, 我们能将假设写成形如

$$\frac{q_1 - o}{p_1 - o} = \frac{q_2 - o}{p_2 - o} \text{ 和 } \frac{q_1 - o}{p_1 - o} = \frac{q_3 - o}{p_3 - o}.$$

由此得到

$$\frac{q_2 - o}{p_2 - o} = \frac{q_3 - o}{p_3 - o}, \text{ 于是 } \mathcal{G}_{p_2p_3} \| \mathcal{G}_{q_2q_3}.$$

对于三条直线平行的情形, 我们可以借助于7.3.12.2而证得. □

7.4 仿射二次型

我们考虑在有限维仿射空间 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$ 上的一个二次函数 $\kappa : \mathcal{A} \longrightarrow K$. 这种函数的"主部"是 V 上的一个非平凡的对称双线性形式. 称集合 $\{\kappa = \text{常数}\}$ 为仿射二次型.

应用二次形式的分类, 我们欲对这些二次型予以进一步的分类. 对向量空间 V 的基域 K, 我们假设 $1 + 1 = 2 \neq 0$. 对于研究对称双线性形式来说, 这是一个有用的假定, 因为在 $1 + 1 = 2 = 0$ 的情形, 理论将是完全另一种面貌.

我们从关于对称双线性形式的一些基本结果开始进行讨论. 这可认为是对6.5中关于 $K = \mathbf{R}$ 的讨论的推广.

定义7.4.1 1. 所谓 V 上的一个对称双线性形式是指一个映射 $\psi : V \times V \longrightarrow K$, 使得

(a) $\psi(\alpha x + \alpha' x', y) = \alpha' \psi(x, y) + \alpha' \psi(x', y)$,

(b) $\psi(y, x) = \psi(x, y)$.

于是 ψ 关于两个变量均为线性的.

2. 设 $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ 是 V 的一组基. 所谓 ψ 关于 B 的基本矩阵是指矩阵

$$G_B(\psi) = (\psi(b_i, b_j)).$$

3. 对于一个对称双线性形式ψ, 定义线性映射

$$\sigma_\psi : V \longrightarrow V^*; \quad y \longmapsto \psi(\ ,y).$$

于是利用自然配对$<\ ,\ >: V \times V^* \longrightarrow K$, 有$< x,\sigma_\psi(y) >= \psi(x,y)$. ψ的零空间V_ψ^0是σ_ψ的核. ψ的秩 $\mathrm{rg}\ \psi$是 $\dim V - \dim V_\psi^0$. 如果 $\mathrm{rg}\ \psi = \dim V$, 则称$\psi$是非退化的.

关于对称双线性形式的基本定理是:

定理7.4.2 设ψ是V上的对称双线性形式. 于是存在V的一组基$D = \{d_1, \cdots, d_n\}$使得$G_D(\psi) = (\delta_{ij}\alpha_i)$. 这里$\alpha_i \neq 0$, 对$1 \leq i \leq r = \mathrm{rg}\ \psi$.

在$K = \mathbf{R}$的情形, 我们总能使得对$1 \leq i \leq p$, 有$\alpha_i = 1$, 对$p+1 \leq i \leq p+q = r$ 有$\alpha_i = -1$. 这里允许$p = 0$及$q = 0$. 数p和q是唯一确定的 (Sylvester惯性定理).

在$K = \mathbf{C}$的情形, 我们能使$\alpha_i = 1$, 对$1 \leq i \leq r$.

证明: 如果$r = \mathrm{rg}\ \psi = 0$, 则对$V$的任意一组基$D$, 有$G_D(\psi) = (0)$. 现令$r > 0$. 我们对$n = \dim V$运用归纳法. 对$n = 1$, 命题是正确的. 存在$d_1 \in V$, 使得$\psi(d_1, d_1) = \alpha_1 \neq 0$. 这是因为存在$V$中的$x$和$y$, 使得$\psi(x,y) \neq 0$. 因此在

$$2\psi(x,y) = \psi(x+y, x+y) - \psi(x,x) - \psi(y,y)$$

的右边, 不是所有的项均为0.

设U是由d_1所生成的子空间. 令$\{x \in V; \psi(x, d_1) = 0\} = U^\perp$. 于是 $U^\perp$是线性形式$\sigma_\psi(d_1)$的核. 因为$< \sigma_\psi(d_1), d_1 >= \psi(d_1, d_1) \neq 0$, 所以有 $\dim U^\perp = n - 1$, 这里$n = \dim V$. 因为$d_1 \notin U^\perp$, 于是$U^\perp$是U的一个补.

特别地, $U^\perp$包含了ψ的零空间$V^0 = V_\psi^0$. 按归纳假设, $U^\perp$具有一组基$D = \{d_2, \cdots, d_n\}$, 使得$\psi(d_i, d_j) = \alpha_i\delta_{ij}$, 这里对$i > r$, $\alpha_i = 0$. 连同d_1一起, 我们得到了所希望的基D.

在 $K=\mathbf{R}$ 和 $\alpha_i>0$ 的情形下，用 $\frac{d_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ 来替代 d_i. 如果 $\alpha_i<0$, 则用 $\frac{d_i}{\sqrt{-\alpha_i}}$ 来替代 d_i. 对于新的基元素，我们还是记为 d_i, 于是 $\psi(d_i,d_j)=\pm\delta_{ij}, i,j\leq r$. 通过重新编号，我们得到了一组具有所需性质的基. 由6.5.11的内容知，p 和 q 是唯一确定的.

在 $K=\mathbf{C}$ 和 $\alpha_i\neq 0$ 的情形下，用 $\frac{d_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ 替代 d_i. □

我们再来提及与6.5.9相对应的内容:

命题7.4.3 对 V 的任意一组基 B, 有 $\operatorname{rg}\psi=\operatorname{rg}G_B(\psi)$. 特别地，$\psi$ 是非退化的充要条件是 $\det G_B(\psi)\neq 0$.

证明: 如在6.5.5.2的证明中那样，我们首先指出：基本矩阵 $G_B=G_B(\psi)$ 和 $G_D=G_D(\psi)$ 之间有关系 $G_B={}^tTG_DT$, 这里 D 如在7.4.2中所设，而 $T=\Psi_D\circ\Phi_B^{-1}$ 是可逆的. 于是 $\operatorname{rg}G_B=\operatorname{rg}G_D=\operatorname{rg}\psi$. □

现在我们来讨论本节的本质的内容:

定义7.4.4 所谓 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 上一个二次函数是指一个映射

$$\kappa:\mathcal{A}\longrightarrow K,$$

它具有下述性质：存在 $o\in\mathcal{A}$, 使得 $\kappa(p)$ 可写成

$$\kappa(p)=\psi(p-o,p-o)+2l_o(p-o)+\kappa(o), \text{对所有} p\in\mathcal{A}.$$

这里 $\psi=\psi_\kappa$ 是一个对称双线性形式，且 $l_o=l_{\kappa,o}$ 是一个线性形式. ψ 应该不是零形式，即 $\operatorname{rg}\psi>0$.

注解7.4.5 1. 如即将要指出的那样，关于每一个任意的 $o'\in\mathcal{A}$, 成立着 κ 的一个表示，它们具有相同的双线性形式 ψ, 但线性形式 l_o 及常数项 $\kappa(o)$ 一般是要改变的.

2. 如果 $\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ 是一个仿射变换，则 κ 和 $\kappa\circ\varphi$ 都是二次函数.

3. 除了$\mathcal{A}$上的线性和二次函数，我们也可考虑高阶的函数，例如三阶函数，也称为三次函数. 在这种函数中，其“主部”是用V上的一个对称3-线性形式来给出的.

引理7.4.6 如果o, o'是$\mathcal{A}$中的任意点，κ是$\mathcal{A}$上的一个二次函数，则成立

$$\kappa(p) = \psi(p-o, p-o) + 2l_o(p-o) + \kappa(o),$$
$$\kappa(p) = \psi(p-o', p-o') + 2l_{o'}(p-o') + \kappa(o'),$$

其中

$$l_o = \sigma_\psi(o-o') + l_{o'},$$
$$\kappa(o) = \psi(o-o', o-o') + 2l_{o'}(o-o') + \kappa(o').$$

情形A: $l_{o'} \in \mathrm{im}\ \sigma_\psi$ (于是也有$l_o \in \mathrm{im}\ \sigma_\psi$). 当$\psi$是非退化时，就是这种情形. 这时可选$o \in \mathcal{A}$, 使得$l_o = 0$, 即

$$\kappa(p) = \psi(p-o, p-o) + \kappa(o).$$

情形B: 即非A的情形. 于是我们可选$o \in \mathcal{A}$, 使得

$$\kappa(p) = \psi(p-o, p-o) + 2l_o(p-o), \quad 且 l_o \notin \mathrm{im}\ \sigma_\psi.$$

证明: 利用$p - o' = (p-o) + (o-o')$, 我们得到

$$\psi(p-o', p-o') = \psi(p-o, p-o) + 2\psi(p-o, o-o') + \psi(o-o', o-o');$$
$$2l_{o'}(p-o') = 2l_{o'}(p-o) + 2l_{o'}(o-o').$$

于是

$$\kappa(p) = \psi(p-o', p-o') + 2l_{o'}(p-o') + \kappa(o')$$

$$= \psi(p-o,p-o) + 2(\sigma_\psi(o-o') + l_{o'})(p-o)$$
$$+ \psi(o-o',o-o') + 2l_{o'}(o-o') + \kappa(o').$$

如果 V'^* 是 $\mathrm{im}\ \sigma_\psi$ 的一个任意预先给定的补，则可写成 $l_{o'} = l_{o',1} + l_{o',2} \in \mathrm{im}\ \sigma_\psi + V'^*$. 存在 $o \in \mathcal{A}$, 使得 $\sigma_\psi(o-o') + l_{o',1} = 0$. 在情形 A 时，有 $l_{o'} = l_{o',1}$. 在情形 B, 即不是情形 A 时，可用 $l_{o'}$ 来替代 $l_{o',2}$, 使得 $l_{o'} \notin \mathrm{im}\ \sigma_\psi$. 于是存在 o_1, 使得 $o_1 - o' \in \ker\ \sigma_\psi, l_{o'}(o_1 - o') \neq 0$, 如果我们用 $o = \beta(o_1 - o') + o'$ 来代替 o_1, 且有 $\beta = -\dfrac{\kappa(o')}{2l_{o'}(o_1 - o')}$, 则 $\kappa(o) = 0$. □

关于二次函数的基本定理是:

定理7.4.7 设 $\kappa : \mathcal{A} \longrightarrow K$ 是一个二次函数. 于是存在 $\mathcal{A}$ 的一个仿射参照系 $(o, D) = (o, \{d_1, \cdots, d_n\})$, 使得坐标表示 $\kappa \circ \Phi_{o,D}^{-1} =$(简记为) $\kappa : K^n \longrightarrow K$ 具有下述形式:

情形 A: $\kappa(x) = \kappa(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi_i^2 + \gamma,\ \alpha_i \neq 0$.

情形 B: $\kappa(x) = \kappa(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi_i^2 - 2\xi_n, \alpha_i \neq 0, r < n$.

这里 r 是对称形式 ψ 的秩.

对情形 $K = \mathbf{R}$, 有 $\alpha_i = 1, 1 \leq i \leq p, \alpha_i = -1, p+1 \leq i \leq p+q = r$.

对情形 $K = \mathbf{C}$, 有 $\alpha_i = 1, 1 \leq i \leq r$.

证明: 对情形 A, 如在7.4.6中那样，选 $o \in \mathcal{A}$, 如在7.4.2中那样，选 $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$, 则有 $\psi(x,x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi_i^2$.

对情形 B, 如在7.4.6中那样, 选 $o \in \mathcal{A}$. 因为 $l_o \notin \mathrm{im}\ \sigma_\psi$, 则在 ψ 的零空间 $V_\psi^0 = \ker\ \sigma_\psi$ 中存在一个 d_n, 使得 $l_o(d_n) = -1$. 在 V_ψ^0 中选一组基 $\{d_{r+1}, \cdots, d_n\}$, 使得对 $r+1 \leq i \leq n$, 有 $l_o(d_i) = 0$. 我们能如在7.4.2中那样用 $\{d_1, \cdots, d_r\}$ 把 $\{d_{r+1}, \cdots, d_n\}$ 扩充成一组基 D. 为了对 $i \leq r$ 也有 $l_o(d_i) = 0$, 所以我们把这些 d_i 变更为 $d_i + l_o(d_i)d_n$. 因为 $d_n \in V_\psi^0$, 上述做法不会改变 ψ 的值.

对 $K=\mathbf{R}$ 或 $K=\mathbf{C}$, 如在7.4.2中那样选取 α_i. □

例7.4.8 1. 考虑在 $\mathbf{R}^2$ 上的二次函数

$$\kappa(x,y)=11x^2+19y^2+6x-38y+15.$$

我们先把二次项整理成对角状，即将这个二次型配方成:

$$\kappa(x,y)=11(x+\frac{3}{11})^2+19(y-1)^2+15-\frac{9}{11}-19.$$

利用 $x'=x+\frac{3}{11}, y'=y-1$, 于是我们有

$$\kappa(x',y')=11{x'}^2+19{y'}^2-\frac{53}{11}.$$

令 $\sqrt{11}x'=x'', \sqrt{19}y'=y''$. 则

$$\kappa(x'',y'')={x''}^2+{y''}^2-\frac{53}{11}.$$

2. 设 $\kappa:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}$ 是用

$$\begin{aligned}\kappa(x,y,z)&=x^2+4xy+5y^2+10z^2+2xz+10yz-2z-2\\&=(x+2y)^2+y^2+10z^2\\&\qquad+2(x+2y)z-4yz+10yz-2z-2\end{aligned}$$

来给出的. 令 $x+2y=x'$. 于是

$$\begin{aligned}\kappa(x',y,z)&={x'}^2+y^2+10z^2+2x'z+6yz-2z-2\\&=(x'+z)^2+y^2+10z^2-z^2+6yz-2z-2.\end{aligned}$$

令 $x'+z=x''$. 于是

$$\kappa(x'',y,z)={x''}^2+y^2+9z^2+6yz-2z-2$$

$$= x''^2 + (y+3z)^2 - 2z - 2.$$

令 $y+3z=y'$. 于是

$$\kappa(x'', y', z) = x''^2 + y'^2 - 2(z+1).$$

利用 $z+1=z'$, 我们得到

$$\kappa(x'', y', z') = x''^2 + y'^2 - 2z'.$$

3. 考虑 $\kappa(x,y,z) = xy + z^2 - 1$.

令 $x = x'+y', y = x'-y'$. 于是

$$\kappa(x', y', z) = x'^2 - y'^2 + z^2 - 1.$$

令 $y' = z', z = y''$. 于是

$$\kappa(x', y'', z') = x'^2 + y''^2 - z'^2 - 1.$$

.

定义7.4.9 所谓 (仿射) 二次型是指 $\mathcal{A}$ 的一个形如 $\{\kappa = 0\}$ 的子集, 这里 $\kappa : \mathcal{A} \longrightarrow K$ 是一个二次函数.

注: $\{\kappa = 0\}$ 代表 $\kappa^{-1}(0)$ 或者 $\{p \in \mathcal{A}; \kappa(p) = 0\}$. 如果 $\alpha \in K$ 是任意的, 则和 κ 一样, $\kappa - \alpha$ 也是一个二次函数 κ^*. 于是 $\{\kappa = \alpha\} = \{\kappa^* = 0\}$.

定理7.4.10 设 $\{\kappa = 0\}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个二次型. 于是存在 $\mathcal{A}$ 的一个仿射参照系 $(o, D) = (o, \{d_1, \cdots, d_n\})$, 使得 K^n 中的 $\{\kappa \circ \Phi^{-1}_{(o,D)} =$ (简记为) $\kappa = 0\}$ 可写成下列形状:

设 $r = \operatorname{rg} \psi, r > 0$.

$$\text{情形}A0: \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i^2 = 0; \qquad \prod_i \alpha_i \neq 0.$$

情形$A1$: $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i^2 = 1$;　　　　$\prod_i \alpha_i \neq 0$.

情形B: $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i^2 - 2\xi_n = 0$;　　　$\prod_i \alpha_i \neq 0, r < n$.

如果$K = \mathbf{R}$, 则我们甚至可以达到:

情形 $A0$: $\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \xi_i^2 = 0$;

　　$1 \leq p,\ q \leq p,\ p + q = r$.

情形 $A1$: $\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \xi_i^2 = 1$;

　　$0 \leq p, q;\ p + q = r > 0$.

情形 B: $\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \xi_i^2 - 2\xi_n = 0$;

　　$0 < p + q < n,\ q \leq p$.

对$K = \mathbf{C}$, 于是我们能达到:

情形 $A0$: $\sum_{i=1}^{r} \xi_i^2 = 0$;　　　$0 < r \leq n$.

情形 $A1$: $\sum_{i=1}^{r} \xi_i^2 = 1$;　　　$0 < r \leq n$.

情形 B: $\sum_{i=1}^{r} \xi_i^2 - 2\xi_n = 0$;　　　$0 < r < n$.

证明: 如在7.4.7中那样, 对κ选取一个参照系(o, D). 在情形A中, 首先考虑情形$A0$, 这时$\gamma = 0$. 如果$\gamma \neq 0$, 则用$-\gamma$去除等式$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i^2 + \gamma = 0$, 且将$-\dfrac{\alpha_i}{\gamma}$重新记为$\alpha_i$, 这给出了情形$A1$. 情形$B$是显然的.

对$K = \mathbf{R}$, 在情形$A0$中如果$q > p$, 我们用-1去乘等式$\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \xi_i^2 = 0$. 于是我们总能有: $p \geq q$. 在情形$A1$中, 我们能假定: 对$1 \leq i \leq p$, 有$\alpha_i > 0$, 对$p + 1 \leq i \leq p + q$, 有$\alpha_i < 0$. 分别用$\sqrt{\alpha_i}\xi_i$或$\sqrt{-\alpha_i}\xi_i$来替代ξ_i, 且重新用ξ_i来记它, 则得出结论. 在情形B, 必要时乘以-1, 且用$-\xi_n$去替代ξ_n, 就能得到$p \geq q$.

对情形$K = \mathbf{C}$, 结论是显然的.　□

例 7.4.11　对实仿射平面, 对一个二次型$\psi, r = \operatorname{rg} \psi$, 存在着下列的标准形.

情形 $A0$ $r=2$: $x^2+y^2=0$. 一点.

$x^2-y^2=0$. 两条不同的直线.

$r=1$: $x^2=0$. 重合的两条直线.

情形 $A1$ $r=2$: $x^2+y^2=1$. 一个圆.

$x^2-y^2=1$. 一条双曲线.

$-x^2-y^2=1$. 空集.

$r=1$: $x^2=1$. 两条平行直线.

$-x^2=1$. 空集.

情形 B $x^2-2y=0$. 一条抛物线.

例7.4.12 由7.4.8中的函数所给出的二次型的标准形为:

1. $x^2+y^2=1$.
2. $x^2+y^2-2z=0$.
3. $x^2+y^2-z^2=1$.

我们来研究问题的最后部分, 实仿射二次型的标准形能把一个这样的二次型确定到什么程度 (直至一个仿射变换). 因为一个空的二次型能被描述成$p=0$, 及任意的$q\geq 1$的情形$A1$, 所以我们必须对此作出一些限制.

定义7.4.13 我们称 n维实仿射空间 $\mathcal{A}$中一个二次型$\{\kappa=0\}$为$(n-1)$维的, 如果存在一个超平面$\mathcal{H}\subset\mathcal{A}$, 使得沿着与$\mathcal{H}$相补的一条直线把$\{\kappa=0\}$投影到$\mathcal{H}$中去, 投影包含$\mathcal{H}$的一个非空开子集.

例7.4.14 二次型$\{\sum_{i=1}^n\xi_i^2=1\}$向超平面$\{\xi_n=0\}$的投影包含开集$\{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2<1\}$.

$q=0, p>1$的类型$A0$以及$p=0$的类型$A1$的二次型不是$(n-1)$维的.

引理7.4.15 设$\{\kappa=0\}$和$\{\kappa'=0\}$是实仿射空间$\mathcal{A}$中的一个$(n-1)$维二次型的表示. 则$\kappa'=\alpha\kappa$, 且$\alpha\neq 0$.

证明: 我们选$\mathcal{A}$中一个仿射参照系，使得κ是标准形. 于是κ'被表为

$$\kappa'(x) = \psi'(x,x) + 2l(x') + \kappa'(o), \text{或者}$$
$$\kappa'(x) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j + 2\sum_i \beta_i\xi_i + \gamma. \tag{7.2}$$

现在我们讨论κ的不同的标准形.

情形$A0$:

$$\kappa(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \xi_i^2, \quad p \geq 1, p \geq q. \tag{7.3}$$

因为$x=0$是$\kappa(x)=0$的解，所以$\gamma=0$. 因为$x=(1,0,\cdots,0)$不是$\kappa(x)=0$的解，所以$\alpha_{11}+2\beta_1 \neq 0$.

首先考虑情形$q=0$. 于是有$p=1$. 因而$\kappa(x)=0$的解具有形状

$$x \in \mathbf{R}^{n-1} = \{0\} \times \mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n.$$

因此

$$\sum_{i,j>1} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j + 2\sum_{i>1} \beta_i\xi_i = 0.$$

通过微分，可得出$\alpha_{ij}=\beta_i=0$ $(i,j>1)$. 由此， $\kappa'=0$化为

$$\xi_1(\alpha_{11}\xi_1 + 2\sum_{i>1} \alpha_{1i}\xi^i + 2\beta_1) = 0.$$

如果$\alpha_{11}=0$, 则由于解属于$\{0\}\times\mathbf{R}^{n-1}$, 得到: 对所有$i$, 有$\alpha_{1i}=0$, 于是$\psi'=0$, 这是不可能的. 因此$\alpha_{11}\neq 0$. 但对$i>0$, 有$\alpha_{1i}=0$, 且$\beta_1=0$, 于是$\kappa=\alpha_{11}\kappa'$.

现设 (7.3)中$q>0$. 于是集合$C=\{\kappa(x)<0;\xi_1\neq 0\}$是$\mathbf{R}^n$中的一个非空开子集. 对$x\in\mathbf{C}$, 存在$\mu\neq 0$, 使得

$$\kappa(\pm\mu\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = 0.$$

于是 (7.2) 可表为

$$\alpha_{11}\mu^2\xi^2 \pm 2\mu\xi_1(\sum_{i>1}\alpha_{1i}\xi_i + \beta_1) + \sum_{i,j>1}\alpha_{ij}\xi_i\xi_j + 2\sum_{i>1}\beta_i\xi_i = 0.$$

因此，对所有的 $x \in C$, 有 $\sum_{i>1}\alpha_{1i}\xi_i + \beta_1 = 0$. 因此 $\beta_1 = 0$, 于是 $\alpha_{11} \neq 0$. 在这里，我们已用 $\dfrac{\kappa'}{\alpha_{11}}$ 来替代 κ', 且仍写成 κ', 因而我们对 $x \in C$, 有

$$(\kappa' - \kappa)(x) = \sum_{i,j>1}\alpha_{ij}\xi_i\xi_j + 2\sum_{i>1}\beta_i\xi_i - \sum_{i=2}^{p}\xi_i^2 + \sum_{i=p+1}^{p+q}\xi_i^2 = 0.$$

通过微分，可得出 $\alpha_{ij} = \alpha_i\delta_{ij}$, 这里对 $2 \leq i \leq p$, 有 $\alpha_i = 1$, 对 $p+1 \leq i \leq p+q$, 有 $\alpha_i = -1$, 对 $i > p+q$, 有 $\alpha_i = 0$. 于是 $\kappa' = \kappa$.

现在考察 $\{\kappa = 0\}$ 是类型 $A1$ 的情形:

$$\kappa(x) = \psi(x,x) - 1 = 0 \text{ 及 } \psi(x,x) = \sum_{i=1}^{p}\xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q}\xi_i^2, p > 0. \quad (7.4)$$

因为 $x = 0$ 不是解，所以在 (7.2) 中 $\gamma \neq 0$. 我们能假设 $\gamma = -1$. 集合 $C = \{\psi(x,x) > 0\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是开的、非空的. 如果 $x \in C$, 则对 $x^* = \dfrac{x}{\sqrt{\psi(x,x)}}$, 成立 $\kappa(\pm x^*) = 0$. 于是也有 $\kappa'(\pm x^*) = 0$. 因此在 (7.2) 中有 $\beta_i = 0$.

于是我们能把 $\kappa'(x)$ 写成形为 $\psi'(x,x) - 1$, 这里 ψ' 是一个对称双线性形式. 对 $x \in C$ 及 $x^* = \dfrac{x}{\sqrt{\psi(x,x)}}$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi(x,x)}(\kappa'(x) - \kappa(x)) &= \frac{1}{\psi(x,x)}(\psi'(x,x) - \psi(x,x)) \\ &= \psi'(x^*,x^*) - \psi(x^*,x^*) = 0.\end{aligned}$$

于是对 $x \in C$, 有 $\kappa'(x) - \kappa(x) = 0$. 通过微分，可得出 $\kappa' = \kappa$.

最后，设$\{\kappa=0\}$是属于类型B：

$$\kappa(x)=\psi(x,x)-2\xi_n=0$$

且

$$\psi(x,x)=\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}\xi_i^2, p+q<n. \tag{7.5}$$

因为$x=0$是$\kappa(x)=0$的解，所以$\gamma=0$. $\kappa(x)$的解可写成形如

$$\xi_n=\frac{1}{2}\psi(x',x'),\quad x'\in\mathbf{R}^{n-1}\times\{0\}\subset\mathbf{R}^n.$$

由此，我们发现，对$x'\in\mathbf{R}^{n-1}$，有

$$\begin{aligned}\kappa'(x')=&\alpha_{nn}\frac{\psi(x',x')^2}{4}+\psi(x',x')\sum_{i<n}\alpha_{ni}\xi_i\\&+\sum_{i,j<n}\alpha_{ij}\xi_i\xi_j+\beta_n\psi(x',x')+2\sum_{i<n}\beta_i\xi_i=0.\end{aligned}$$

通过微分，可得到$\alpha_{nn}=0$，于是$\alpha_{ni}=0$ $(i<n)$. 因此$\sum_{i,j<n}\alpha_{ij}\xi_i\xi_j=\beta_n\psi(x',x')$，最终得到$\beta_i=0$ $(i<n)$. □

由此我们得到了仿射二次型的分类定理：

定理7.4.16 设$\{\kappa=0\},\{\kappa'=0\}$是$n$维实仿射空间$\mathcal{A}$中的两个$(n-1)$维二次型. 于是存在一个仿射变换$\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$，它将其中一个二次型变至另一个二次型的充要条件是这两个二次型具有7.4.10中的相同的实标准形. 我们也称n维仿射空间中的一个$(n-1)$维二次型为仿射刚性模型.

证明：如果$\{\kappa=0\}$及$\{\kappa'=0\}$关于相应的仿射参照系(o,D)及(o,D')具有相同的标准形，则将(o,D)变至(o',D')的仿射变换φ就把$\{\kappa=0\}$变至$\{\kappa'=0\}$. 反过来，如果存在一个$\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$，使得$\varphi(\{\kappa=0\})=\{\kappa\circ\varphi^{-1}=0\}=\{\kappa'=0\}$，则由7.4.15，$\varphi(\{\kappa=0\})$和$\{\kappa'=0\}$具有相同的标准形. □

注解7.4.17 实仿射空间中的$(n-1)$维二次型的不同的标准形可用三个≥ 0的整数来特征.

情形$A0$:$(p,q,0); p \geq 1; p \geq q; p=1,$当 $q=0$, 及$p+q \leq n$.

情形$A1$:$(p,q,1); p \geq 1; p+q \leq n$.

情形B :$(p,q,2); p \geq q; p \geq 1; p+q < n$.

例7.4.18 $\mathbf{R}^3$中的2维二次型具有下列的标准形:

$A0$: $x^2+y^2-z^2=0$ (圆锥面)

$x^2-y^2=0$ (两个不同的平面)

$x^2=0$ (重合的两个平面)

$A1$: $x^2+y^2+z^2=1$ (球面)

$x^2+y^2-z^2=1$ (单叶双曲面)

$x^2-y^2-z^2=1$ (双叶双曲面)

$x^2+y^2=1$ (圆柱面)

$x^2-y^2=1$ (双曲柱面)

$x^2=1$ (两个平行平面)

B: $x^2+y^2-2z=0$ (椭圆抛物面)

$x^2-y^2-2z=0$ (双曲抛物面)

$x^2-2z=0$ (抛物柱面)

习题

1. 设$\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$是向量空间$V$上的仿射空间, V的基域有特征$\neq 2$, 即$1+1\neq 0$. 设p,q,r,s是$\mathcal{A}$中的点, 证明: 中点$p'=\dfrac{p+q}{2}, q'=\dfrac{q+r}{2}, r'=\dfrac{r+s}{2}, s'=\dfrac{s+p}{2}$构成了一个平行四边形, 即$p'-q'=s'-r'$. 完成其梗概!

2. 设$\mathcal{A}$是V上的仿射空间, V的基域有特征$\neq 2$. 设p,q,r,s是一个平行四边形, 即$q-p=r-s$, 且设$q-p\neq 0, s-p\neq 0$. 证明$\frac{p+r}{2}=\frac{s+q}{2}$. 写出梗概!.

3. 设$\mathcal{B}$和$\mathcal{C}$是仿射空间$\mathcal{A}$的非空仿射子空间.

(a) 证明: 记由$\mathcal{B}$和$\mathcal{C}$的和集所生成的$\mathcal{A}$的仿射子空间为$\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$, 则$\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$包含了所有的直线 $\mathcal{G}_{pq}=\{\alpha p+\beta q;\alpha+\beta=1\}$, 这里$p\in\mathcal{B}$及$q\in\mathcal{C}$.

(b) 反过来, 如果$o\in\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$及$K$的特征$K\neq 2$, 则$\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$的每点位于一条上述的直线 $\mathcal{G}_{pq}$上.

(提示: 设$r\in\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$, 则存在$p\in\mathcal{B},q\in\mathcal{C}$, 使得$r-o=(p-o)+(q-o)$. 只需考虑$p-o\neq 0, q-o\neq 0$的情形. 令$2(p-o)+o=p'$ 及$2(q-o)+o=q'$, 则有$r\in\mathcal{G}_{p'q'}$.)

(c) 指出一个例子 (梗概 !), 使得对$\mathcal{B}\cap\mathcal{C}=\emptyset$, (b)不成立.

4. 按照点$p_1,p_2,p_3\in\mathbf{R}^3$的下列位置:

情形 i): $p_1=p_2=p_3$;

情形 ii): 存在$\alpha,\beta,\alpha+\beta=1$, 使得$p_3=\alpha p_1+\beta p_2$;

情形 iii): p_1,p_2,p_3是仿射无关的,

给出$\mathbf{R}^3$中的集合$\{\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3|_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1}\}$的描述.

5. 设$f:V\longrightarrow V$是一个线性自同构, 它具有性质: 每一个1维子空间被映至自身, 即对每一个$x\in V$, 存在一个$\alpha_x\in K$, 使得$f(x)=\alpha_x x$.

证明: α_x与x无关, 即f有形状$f(x)=\alpha x, \alpha\neq 0$(于是称此线性映射为相似).

(提示: 讨论等式$\alpha_{x+y}(x+y)=\alpha_x x+\alpha_y y$.)

6. 设$\mathcal{A}$是一个仿射平面, 即 $\dim\mathcal{A}=2$, 且设 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$是$\mathcal{A}$中两条 (不一定是不同的)直线. 问 $\mathcal{G}\cap\mathcal{G}'$有多少种可能性? 完成其梗概!

7. 设$\mathcal{A}$是一个仿射空间，且 $\dim \mathcal{A} = 3$.

(a) 设 $\mathcal{G}$是一条直线，$\mathcal{E}$是$\mathcal{A}$中的一个平面. 对 $\mathcal{G} \cap \mathcal{E}$, 有多少种可能性？梗概！

(b) 设$\mathcal{E}, \mathcal{E}'$是$\mathcal{A}$中的两个 (不必须相互不同的) 平面，对 $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}'$, 有多少种可能性？梗概！

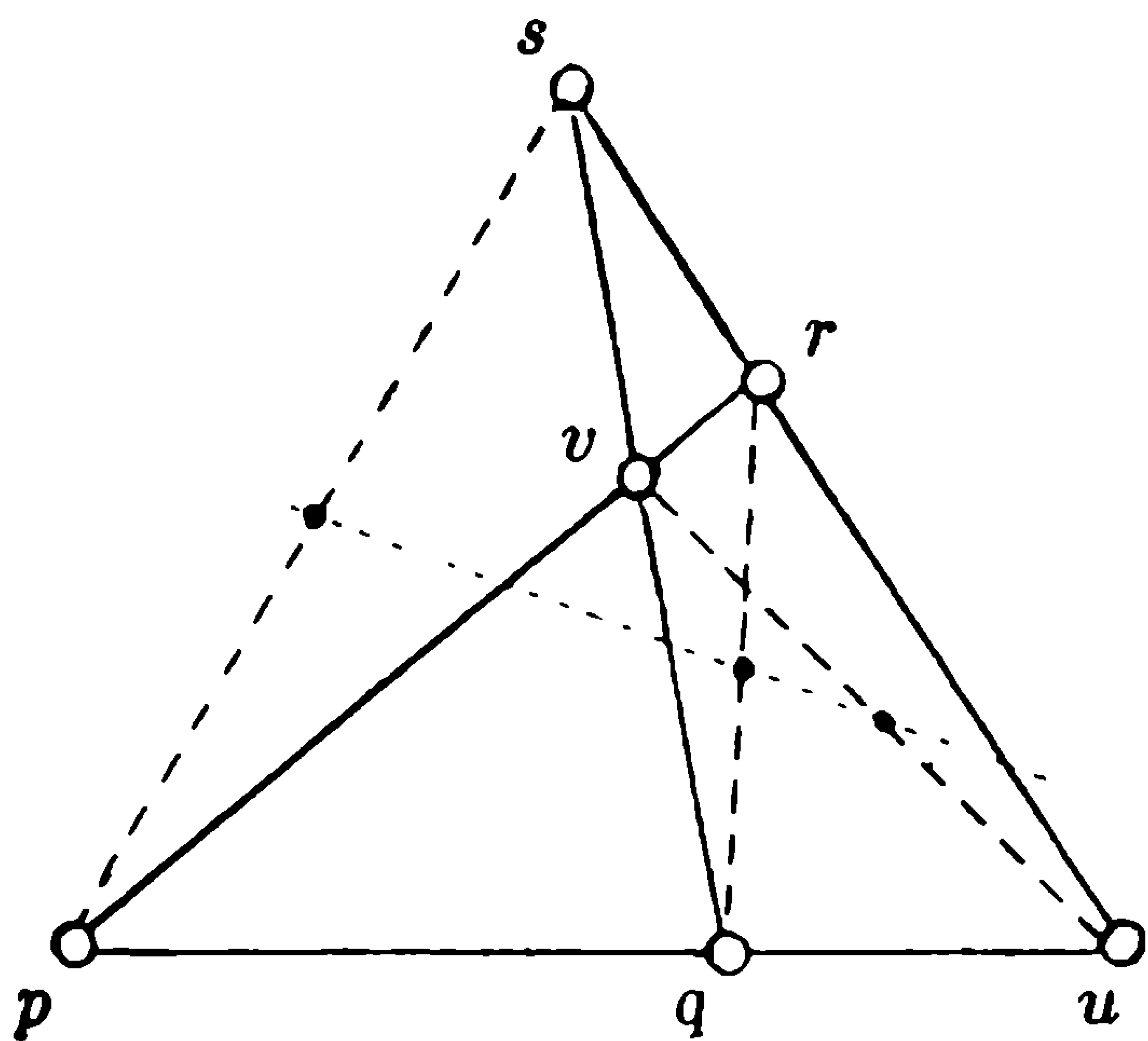
8. 设$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$是一个双射的仿射变换，它将每条直线变至与之平行的直线： $\varphi(\mathcal{G}) \parallel \mathcal{G}$.

证明： φ所从属的线性映射$f_\varphi : V \longrightarrow V$是一个相似，即 $\varphi(p) = \alpha(p - o) + \varphi(o)$, 这里$\alpha \in K$是固定的，且$\alpha \neq 0$.

9. 设$K = \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$.

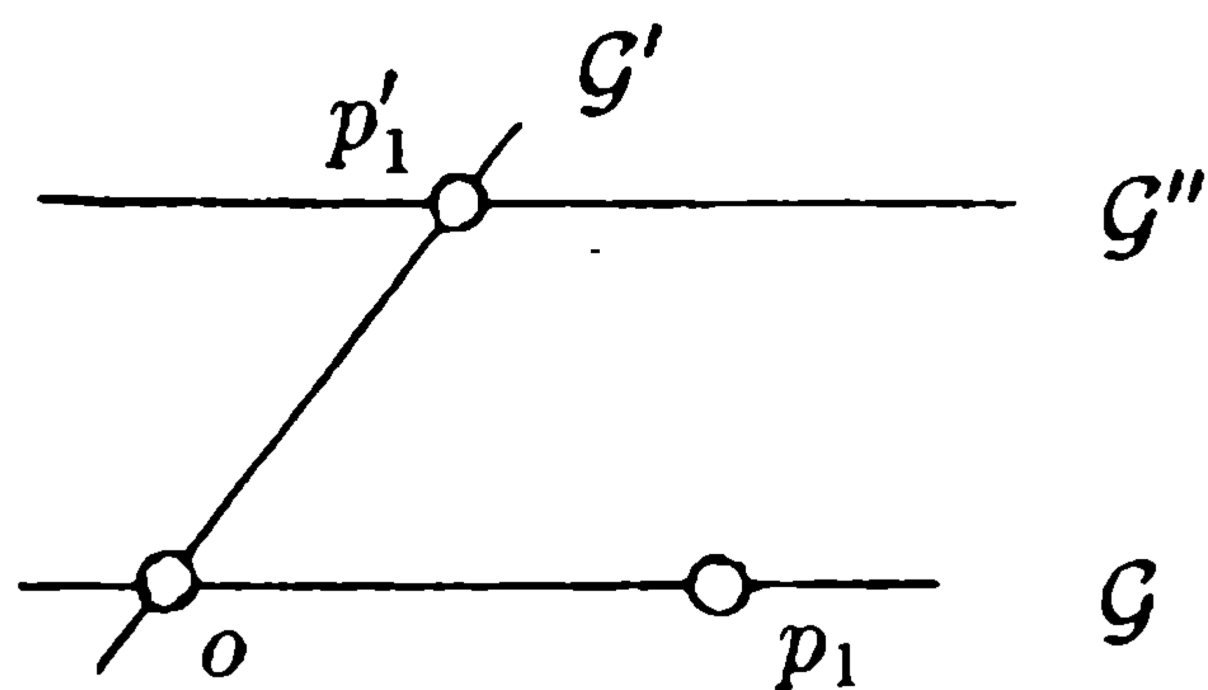
(a) $\mathbf{Z}_2$上的仿射平面包含多少个点？ $\mathbf{Z}_2$上的3维仿射空间包含多少个点？

(b) 对$\mathbf{Z}_2$上的仿射平面$\mathcal{A}$, 确定群 Aff $(\mathcal{A})$的阶.



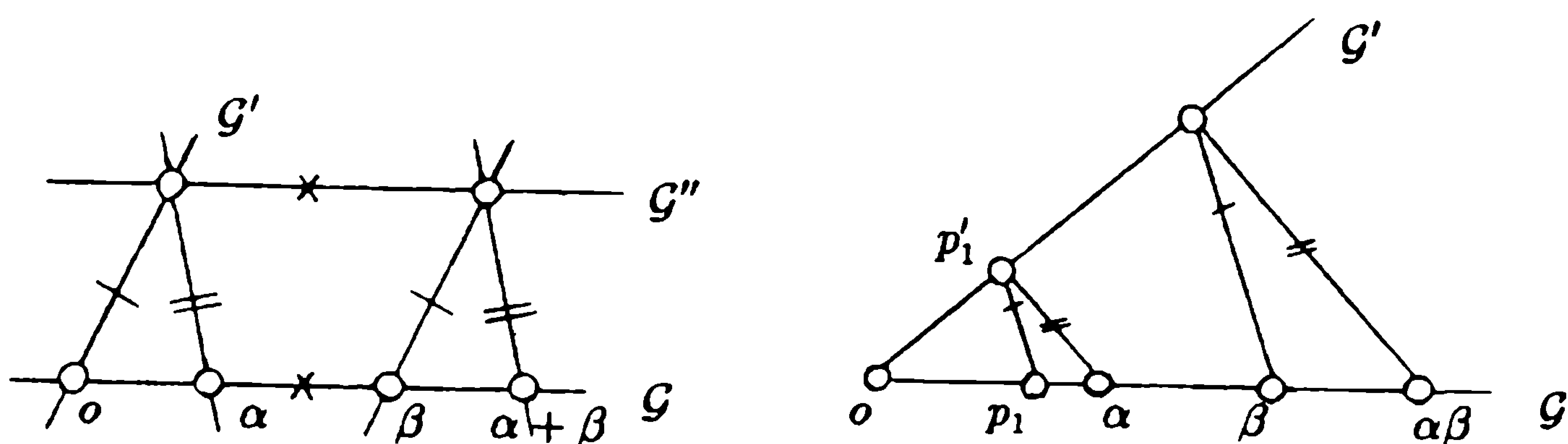
10. 设$\mathcal{A}$是仿射平面，$1 + 1 \neq 0$, 且p, q, r, s是$\mathcal{A}$中的四点，且无三点在一条直线上. 用 $\mathcal{G}_{xy}$来记通过x和y的直线. $\mathcal{G}_{pq}$和 $\mathcal{G}_{rs}$可交于u, $\mathcal{G}_{pr}$和 $\mathcal{G}_{qs}$可交于v. 证明：偶$\{p, s\}, \{r, q\}$和$\{u, v\}$的中点位于一条直线之上.

附加题：如果 $\mathcal{G}_{pq} \parallel \mathcal{G}_{rs}$ 或 $\mathcal{G}_{pr} \parallel \mathcal{G}_{qs}$, 则结论如何陈述？



11. 设 $\mathcal{A}$ 是一个仿射平面，$(o,\{p_1,p_1'\})$ 是一个仿射参照系，$\mathcal{G}$ 是过 $(o,\{p_1\})$ 的直线，$\mathcal{G}'$ 是过 $(o,\{p_1'\})$ 的直线. 设 $\mathcal{G}''$ 是过 p_1' 的，且平行于 $\mathcal{G}$ 的直线. $(o,\{p_1\})$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个仿射参照系，对每点 $p\in\mathcal{G}$，有坐标 $\alpha=\Phi_{(o,p_1)}(p)\in K$，这里 $p=\alpha(p_1-o)+o$.

证明：$\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 可用下列图来确定的，图中直线的平行性是用相同的记号来标记的：



12. 确定 $\mathbf{R}$ 上下列二次型的标准形.

(a)

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;x^2+5y^2+9z^2+4xy+2xz+10yz-2z-2=0\};$$

(b) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;4xy+z^2-1=0\}$;

(c) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;4xy-z^2-1=0\}$.

概述这些二次型的形状！

13. 证明：在单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上，过每一点有两条直线. 对双曲线抛物面 $x^2-y^2+2z=0$, 同样结论也成立.

14. 确定一个二次型与一条直线或一个平面的交集：

(a)

$$\mathcal{Q}u=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;x^2+y^2-1=0\},$$

$$\mathcal{G} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x = 1\};$$

(b)

$$\mathcal{Q}u = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$
$$\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \alpha x + \beta z = 1\} \ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

15. 证明：仿射空间$\mathcal{A}$中的一个二次型$\mathcal{Q}u$与一条直线 $\mathcal{G}$ 的交集$\mathcal{Q}u \cap \mathcal{G}$是由 0, 1, 2个点或由 $\mathcal{G}$所组成. 对每种情形给出例子.

16. 设$\{\kappa = 0\}$是仿射空间$\mathcal{A}$中的一个二次型. 如果存在一个$o \in \mathcal{A}$, 使得对$x \in V$, $\kappa(x+o) = 0$蕴含$\kappa(-x+o) = 0$, 则称这个二次型为有心二次型, 并称o为二次型的中心.

(a) 一个有心二次型关于其中心o有一个表示

$$\kappa(p) = \psi(p-o, p-o) + \kappa(o).$$

(b) 给出R^2中具有中心的二次型的例子, 也给出不具有中心的二次型的例子.

17. 设$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$是一个仿射变换， $\kappa : \mathcal{A} \longrightarrow K$是一个二次函数.

(a) 证明$\kappa \circ \varphi$同样也是二次函数.

(b) 如果$\{\kappa = 0\}$是有心二次型, 则$\{\kappa \circ \varphi = 0\}$也是有心二次型.

第 8 章

欧几里得几何

8.1 仿射 - 酉空间

现在我们来讨论在酉向量空间 V 上的仿射空间，我们也称它为仿射 - 酉空间. V 上的数量积可用来定义诸如距离和正交性之类的概念.

我们将保持此空间结构的自同构称为运动；它是以保持距离的双射为其特征的. 其中，镜射起了一个特别的作用.

定义 8.1.1 所谓仿射 - 酉空间 $\mathcal{E}u$ 或 $\mathcal{E}u(V)$ 是指在酉空间 V 上按照 7.1.1 的意义下所得出的一个有限维的仿射空间. 当 V 是欧氏空间时，我们也称其为仿射 - 欧氏空间，或简称为欧氏空间. $\mathcal{E}u$ 的维数 $\dim \mathcal{E}u$ 定义为 $\dim V$.

例 8.1.2 如果 V 是一个酉向量空间，则在 7.1.3 的意义下，它是 V 上的一个仿射 - 酉空间 $\mathcal{E}u(V)$ 的模型.

定义 8.1.3 所谓仿射 - 酉空间 $\mathcal{E}u = \mathcal{E}u(V)$ 的一个运动或合同是指在 7.2.1 的意义下的一个仿射变换 $\varphi : \mathcal{E}u \to \mathcal{E}u$，且具有性质：由它所确定的线性映射 $f_\varphi : V \to V$ 是酉的，即 $f_\varphi \in \boldsymbol{U}(V)$.

当 $f_\varphi \in \boldsymbol{SU}(V)$ 时，则也称 φ 为本性的运动.

例 8.1.4 每个平移 $x+ : \mathcal{E}u \to \mathcal{E}u$ 是一个本性的运动，这是因为 $f_{x+} = \mathrm{id}_V$.

定理 8.1.5 仿射 - 酉空间 $\mathcal{E}u$ 的运动的集合 $Bew(\mathcal{E}u)$ 是 $\mathcal{E}u$ 的仿射变换群 $\mathrm{Aff}\ (\mathcal{E}u)$ 的一个子群.

证明: 在群态射

$$\varphi \in \mathrm{Aff}\ (\mathcal{E}u) \mapsto f_\varphi \in GL(V)$$

下， $Bew(\mathcal{E}u)$ 正好由 $GL(V)$ 的子群 $\boldsymbol{U}(V)$ 的原象所构成．于是我们能应用 1.3.4. □

引理 8.1.6 对仿射 - 酉空间 $\mathcal{E}u=\mathcal{E}u(V)$, 其距离是用

$$d(p,q)=|q-p|=\sqrt{\langle q-p,q-p\rangle}$$

来定义的.

证明: 6.2.6 中的性质 1, 2, 3 显然是满足的. □

作为下一个定理的预备，我们来证明：

命题 8.1.7 设 V 是酉空间，且 $f:V\to V$ 是一个满足下列性质的映射：对 V 中所有的 x 和 y, 成立性质 $\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$. 于是 f 是线性的，从而 $f\in\boldsymbol{U}(V)$.

证明: 运用相应的范数后，我们有

$$\begin{aligned}|f(x+y)|^2=|x+y|^2&=|x|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+|y|^2\\&=|f(x)|^2+\langle f(x),f(y)\rangle+\langle f(y),f(x)\rangle+|f(y)|^2\\&=|f(x)+f(y)|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f(x+y),f(x)+f(y)\rangle&=\langle f(x+y),f(x)\rangle+\langle f(x+y),f(y)\rangle\\&=\langle x+y,x\rangle+\langle x+y,y\rangle\\&=|x+y|^2=|f(x+y)|^2.\end{aligned}$$

由这两个等式可以得到

$$\begin{aligned}&|f(x+y)-(f(x)+f(y))|^2\\&\quad=|f(x+y)|^2-\langle f(x+y),f(x)+f(y)\rangle\\&\qquad-\langle f(x)+f(y),f(x+y)\rangle+|f(x)+f(y)|^2\\&\quad=|f(x+y)|^2-|f(x+y)|^2\end{aligned}$$

$$-|f(x+y)|^2+|f(x+y)|^2=0.$$

于是 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 进而,

$$|f(\alpha x)|^2=|\alpha x|^2=|\alpha|^2|x|^2=|\alpha|^2|f(x)|^2,$$
$$\langle f(\alpha x),\alpha f(x)\rangle=\overline{\alpha}\langle f(\alpha x),f(x)\rangle=\overline{\alpha}\langle\alpha x,x\rangle=|\alpha|^2|f(x)|^2.$$

由此得

$$|f(\alpha x)-\alpha f(x)|^2=|f(\alpha x)|^2-\langle f(\alpha x),\alpha f(x)\rangle$$
$$-\langle\alpha f(x),f(\alpha x)\rangle+|\alpha f(x)|^2=0,$$

于是 $f(\alpha x)=\alpha f(x)$. □

现在我们来说明欧氏运动是以保持距离的双射为其特征的.

定理8.1.8

1. 如果 $\varphi\in Bew(\mathcal{E}u)$, 则 $d(\varphi(p),\varphi(q))=d(p,q)$.

2. 设 $\mathcal{E}u$ 为欧氏空间. 对 $\varphi:\mathcal{E}u\to\mathcal{E}u$, 如果对 $\mathcal{E}u$ 中所有的 p 和 q, 成立 $d(\varphi(p),\varphi(q))=d(p,q)$, 则有 $\varphi\in Bew(\mathcal{E}u)$.

证明: 性质1是显然的, 这是因为我们从7.2.2.1中知道, 对 $f_\varphi\in\boldsymbol{U}(V)$, 有

$$d(\varphi(p),\varphi(q))=|\varphi(q)-\varphi(p)|=|f_\varphi(q-p)|=|q-p|=d(p,q).$$

为证2., 选 $o\in\mathcal{E}u$, 并用 $x\mapsto\varphi(x+o)-\varphi(o)$ 来定义 $f:V\to V$. 令 $x+o=p$, $y+o=q$, 这里 x 和 y 属于 V, 于是

$$\begin{aligned}\langle f(x),f(y)\rangle&=-\langle\varphi(p)-\varphi(o),\varphi(o)-\varphi(q)\rangle\\&=-\frac{1}{2}(|\varphi(p)-\varphi(q)|^2-|\varphi(p)-\varphi(o)|^2-|\varphi(o)-\varphi(q)|^2)\\&=-\frac{1}{2}(|p-q|^2-|p-o|^2-|o-q|^2)\end{aligned}$$

$$= -\langle p-o, o-q\rangle = \langle x, y\rangle.$$

□

现在来应用8.1.7.

定义8.1.9 设 $\dim \mathcal{E}u = \dim V = n$. 所谓仿射-酉空间 $\mathcal{E}u(V)$ 的一个酉参照系是指在7.2.7意义下的一个仿射参照系，其中 $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$ 是 V 的一组ON-基.

定理8.1.10 1. $\mathcal{E}u$ 总具有一个酉参照系.

2. 设 (o, D) 是酉参照系.

于是如果 $\varphi : \mathcal{E}u \to \mathcal{E}u$ 是运动，则 $(o', D') = (\varphi(o), f_\varphi(D))$ 也是酉参照系.

反过来，如果 (o', D') 是一个酉参照系，则存在恰好一个 $\varphi \in Bew(\mathcal{E}u)$，使得 $\varphi(o) = o'$，$f_\varphi(D) = D'$. 于是在预先给定的 (o, D) 下，能以此方式给出 $Bew(\mathcal{E}u)$ 和 $\mathcal{E}u$ 的酉参照系之间的一个双射.

证明: 1. 得自仿射参照系 (o, D) 的存在性，见7.2.9. 我们在此仅需要将 D 选成ON-基. 2. 可与7.2.10相仿地证得.

□

酉向量空间的合同定理为:

引理8.1.11 设 $(b_\iota)_{\iota\in I}$ 和 $(b'_\iota)_{\iota\in I}$ 是酉空间 V 中的两个非空的族，且对所有 $(\iota, \kappa) \in I \times I$，有 $\langle b_\iota, b_\kappa\rangle = \langle b'_\iota, b'_\kappa\rangle$. 于是存在一个等距 $f : V \to V$ 满足 $f(b_\iota) = b'_\iota$. 这样的 f 是唯一确定的充要条件为这样的一族（于是另一族也）生成整个 V.

证明: 用 U 和 U' 分别标记 $(b_\iota)_{\iota\in I}$ 及 $(b'_\iota)_{\iota\in I}$ 的线性生成集. 设 $B = \{b_1, \cdots, b_m\}$ 是 U 的基，它们是从元素 b_ι 中选取的，于是 $m = \dim U$. B 是自由的，这等价于 $\det(\langle b_i, b_j\rangle) \neq 0$，见6.5.12. 用 $B' = \{b'_1, \cdots, b'_m\}$ 来记族 $(b'_\iota)_{\iota\in I}$ 中相应于 B 的子集. 于是 B' 也是自由的，即 $\dim U \le \dim U'$. 这两族的互换表明 $\dim U = \dim U'$，即 B' 是 U' 的一组基.

于是从U到U'上的一个等距f可用$b_i \mapsto b'_i$, $1 \le i \le m$, 来确定. 因此只剩下去证明：对所有的$\iota \in I$, 有$f(b_\iota) = b'_\iota$. 而这只需注意到：因为$< b_\iota, b_j >= \sum_i \alpha_{i\iota} < b_i, b_j >$, $b_\iota = \sum_i \alpha_{i\iota} b_i$中的元素$\alpha_{i\iota}$可用数量积$< b_\iota, b_\kappa >$及$< b_i, b_\kappa >$来确定，它与$b'_\iota = \sum_i \alpha'_{i\iota} b'_i$中的$\alpha'_{i\iota}$是一致的.

当$U = U' = V$时，则f是唯一确定的. 对其他情形，人们能通过任意一个从$U^\perp$到$U'^\perp$上的等距而把$f : U \to U'$补充成V的一个等距. □

由此，我们可得出仿射 - 欧氏空间的合同定理：

定理8.1.12 考虑一个仿射 - 欧氏空间$\mathcal{E}u = \mathcal{E}u(V)$. 如果$(p_\iota)_{\iota \in I}$, $(p'_\iota)_{\iota \in I}$是$\mathcal{E}u$中的两个族，对所有$(\iota, \kappa) \in I \times I$, 满足$d(p_\iota, p_\kappa) = d(p'_\iota, p'_\kappa)$的充要条件是存在一个合同$\varphi : \mathcal{E}u \to \mathcal{E}u$, 它满足$\varphi(p_\iota) = p'_\iota$. 这样的$\varphi$是唯一确定的充要条件为这族（于是另一族也）生成了整个$\mathcal{E}u$.

证明： 从$(p_\iota)_{\iota \in I}$中选取一个元素，并记为o, 且在$(p'_\iota)_{\iota \in I}$中选取对应的元素，并记为o'. 令$p_\iota - o = b_\iota$, $p'_\iota - o' = b'_\iota$. 于是对所有$(\iota, \kappa) \in I \times I$, 成立$< b_\iota, b_\kappa >=< b'_\iota, b'_\kappa >$. 这得自

$$\begin{aligned} < b_\iota, b_\kappa > &= \frac{1}{2}(-|b_\iota - b_\kappa|^2 + |b_\iota|^2 + |b_\kappa|^2) \\ &= \frac{1}{2}(-d(p_\iota, p_\kappa)^2 + d(p_\iota, o)^2 + d(p_\kappa, o)^2) \end{aligned}$$

及对$< b'_\iota, b'_\kappa >$的相应的等式.

于是按照 8.1.11, 存在一个$f \in O(V)$满足$f(b_\iota) = b'_\iota$. 用$\varphi(o) = o'$及$f_\varphi = f$来定义$\varphi \in Bew(\mathcal{E}u)$. 当族$(d_\iota)_{\iota \in I}$不生成整个$V$时， f以及由此所得的φ不是唯一确定的，见8.1.11. 反之，可参见8.1.8. □

定义8.1.13 1. 设$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$是$\mathcal{E}u = \mathcal{E}u(V)$的子空间，且$o \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$. 称$\mathcal{B}$和$\mathcal{B}'$是正交的， $\mathcal{B} \perp \mathcal{B}'$, 如果$\Phi_o : \mathcal{E}u \to V$把$\mathcal{B}$

和$\mathcal{B}'$变到V的正交子空间U和U'.

2. 设$\mathcal{B}$是$\mathcal{E}u$的子空间，且$o \in \mathcal{B}$. 于是在o处正交于$\mathcal{B}$的空间$\mathcal{B}_o^{\perp}$被定义为$\Phi_o^{-1}(U^{\perp})$, 这里$U^{\perp}$是$U = \Phi_o(\mathcal{B})$的正交补.

注解8.1.14 如果o, o'是$\mathcal{E}u$的子空间$\mathcal{B}$的两个点，于是正交子空间$\mathcal{B}_o^{\perp}$, $\mathcal{B}_{o'}^{\perp}$是平行的.

命题8.1.15 设$\mathcal{B}$是$\mathcal{E}u$的一个子空间，$p \in \mathcal{E}u$. 于是存在恰好一点$q \in \mathcal{B}$, 使得p到它的距离达到最小，即

$$d(p, q) = \inf\{d(p, q'); q' \in \mathcal{B}\}.$$

定义8.1.16 设$\mathcal{B}$是$\mathcal{E}u$的子空间，$p \in \mathcal{E}u$. 所谓从p到$\mathcal{B}$的距离$d(p, \mathcal{B})$是指距离$d(p, q)$, 其中q如在8.1.15中所述.

当$p \notin \mathcal{B}$时，则$p \neq q$, 于是称通过p和q的直线$\mathcal{G}_{pq}$为从p到$\mathcal{B}$上的垂线. 称q为垂足点，也记为l_p.

8.1.15 的证明: 我们能假设: $p \notin \mathcal{B}$. 选取$o \in \mathcal{B}$, 并考察$\Phi_o : \mathcal{E}u \longrightarrow V$. 令$\Phi_o(\mathcal{B}) = U, \Phi_o(p) = x$. 按照6.3.3, x在U中具有一个最佳近似x_U. $q = \Phi_o^{-1}(x_U)$是$\mathcal{B}$中具有到p的距离为最小的点. □

我们用导入一类特殊的运动 —— 镜射 —— 来结束本节. 这相应于酉群的一种特殊的元素. 我们从下面的定义开始.

定义8.1.17 设$(V, < , >)$是一个 (有限维的) 酉空间. 所谓镜射是指元素$s \in \boldsymbol{U}(V)$, 使得$s \neq \mathrm{id}_V$, 但$s \cdot s = \mathrm{id}_V$.

引理8.1.18 对V的每一个$\neq V$的子空间U, 可唯一地定义出关于U的镜射s_U. 每个镜射s形如s_U, 这里U是s的不动点集合，即U是$\{x \in V; s(x) = x\}$. 当 $\operatorname{codim} U = 1$时，则称$s_U$为超平面镜射.

证明: 因为$V = U \oplus U^{\perp}$, 所以s_U可用8.1.17中的条件唯一地确定出来，而且它显然是正交的. 如果s是镜射，则s的仅

有的特征值是 $+1$ 和 -1, 而且相应于特征值 $+1$ 的特征空间 V_{+1} 是不等于 V 的不动点集. $\square$

镜射生成了 $\boldsymbol{O}(V)$. 甚至下列定理也是成立的.

定理8.1.19 正交群 $\boldsymbol{O}(V)$ 中的每个元素 f 可写成个数 $\leq n = \dim V$ 个超平面镜射的乘积.

仅当 $\dim V = 1$ 及 $f = \mathrm{id}$ 时, 需要两个这样的镜射.

证明: 我们能假设 $f \neq \mathrm{id}$. 对 $n = \dim V$ 使用归纳法. 对 $n = 1$, 结论是显然的, 这是因为此时 $\boldsymbol{O}(n) = \pm\mathrm{id}$. 于是设 $n \geq 2$.

于是存在 x, 使得 $f(x) - x \neq 0. f(x) - x \perp f(x) + x$. 对关于 $[f(x) - x]^{\perp}$ 的镜射 s, 成立 $s(f(x) - x) = -f(x) + x, s(f(x) + x) = f(x) + x$, 于是 $s \cdot f(x) = x$. 但由归纳假设, $s \cdot f|_{[x]^{\perp}}$ 能写成个数 $\leq n - 1$ 的超平面镜射的乘积. 再用恒等变换将 $s \cdot f$ 扩张到 $[x]$ 上去. $\square$

定义8.1.20 称 $\sigma \in Bew(\mathcal{E}u)$ 是 $\mathcal{E}u$ 的关于 k 维子空间 $\mathcal{B}$ 的镜射, 如果 $\sigma(p) = -(p - p_{\mathcal{B}}) + p_{\mathcal{B}}$. 这里 $p_{\mathcal{B}}$ 是从 p 到 $\mathcal{B}$ 的垂足点, 当 $p \in \mathcal{B}$ 时, 令 $p_{\mathcal{B}} = p$.

特别地当 σ 是一个超平面镜像映射时, 则 $\operatorname{codim} \mathcal{B} = 1$, 于是亦可将 σ 写成

$$\sigma(p) = -2 < p - o, e > e + p,$$

其中 $o \in \mathcal{B}$, e 是与 $\mathcal{B}$ 的与方向 U 正交的单位向量. 因此有 $p - p_{\mathcal{B}} = < p - o, e > e$.

注: 人们能证明, 镜射正好是满足 $\sigma \cdot \sigma = \mathrm{id}$ 的运动 $\sigma \neq \mathrm{id}$. 镜射定义中所用的子空间可由 $\{\frac{p + \sigma(p)}{2}\}$ 给出.

定理8.1.21 欧氏空间 $\mathcal{E}u$ 的每个运动可写成个数 $\leq n+1$ 的超平面镜射的乘积, 这里 $n = \dim \mathcal{E}u$.

证明: 我们能假设 $\varphi \neq \mathrm{id}$. 于是存在 $o \in \mathcal{E}u$ 使得 $\varphi(o) \neq o$. 设 σ 是关于一个过 $\dfrac{\varphi(o)+o}{2}$, 且具有方向为 $[\varphi(o)-o]^{\perp}$ 的超平面的镜射. 则

$$\sigma(\varphi(o)) = -(\varphi(o) - \frac{\varphi(o)+o}{2}) + \frac{\varphi(o)+o}{2} = 0.$$

$(\sigma \cdot \varphi)(p) = f_{\sigma\cdot\varphi}(p-o)+o$. 按照8.1.19, $f_{\sigma\cdot\varphi}$ 可表为个数 $\leq n$ 的超平面镜射 s' 的乘积. 每个这样的 s' 确定了超平面镜射 σ', 使得 $\sigma'(p) = s'(p-o)+o$. □

我们还注意到一个关于2维欧氏向量空间的正交群的结果:

引理8.1.22 设 V 是一个2维欧氏向量空间.

1. 每个满足 $\det f = -1$ 的 $f \in O(V)$ 是一个直线镜射.

2. 每个 $f \in SO(V)$ 是两个直线镜射的乘积, $f = s \cdot s'$. 这里 s 可以事先任意给定.

3. 三个直线镜射的乘积 $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$ 仍是一个直线镜射. $SO(V)$ 是交换的.

证明: 对1.: 因为 $\det f = -1$, 于是由6.4.21知道, 存在一个ON-基 $\{d_1, d_2\}$, 使得 $f(d_1) = d_1, f(d_2) = -d_2$. 即 f 是关于直线 (即1维子空间 $[d_1]$) 的一个镜射.

对2.: 因为 $f \in SO(V)$, s 是一个镜射, 于是 $\det(s \cdot f) = -1$, 因此 $s \cdot f = s'$, 即 $f = s \cdot s'$.

对3.: 第一部分得自1和2. 设 f, g 属于 $SO(V)$. 有 $f = s \cdot s_1, g = s \cdot s_2, f = s_2 \cdot s_3$, 于是 $s_3 \cdot s_2 = s_1 \cdot s$. 由此知 $g \cdot f \cdot g^{-1} = s \cdot s_2 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_2 \cdot s = s \cdot s_1 \cdot s \cdot s = f$. □

8.2 线性函数和二次函数

现在我们来讨论在 7.3和 7.4中所导入的仿射 - 酉空间 $\mathcal{E}u = \mathcal{E}u(V)$ 上的线性和二次函数. 因为 $Bew(\mathcal{E}u)$ 是 Aff $(\mathcal{E}u)$ 的

本性的子群，所以可用一个仿射变换相互变换的两个二次型并不一定能用一个运动相互变换．换言之，二次型的仿射 - 酉等价类要比二次型的仿射等价类来得多．

我们从线性函数开始．

引理8.2.1 设$\lambda : \mathcal{E}u \longrightarrow K$是一个线性函数．于是可将$\lambda$写成如下形式：

$$\lambda(p) = < p - o, d > + \lambda(o),$$

这里$d \neq 0$是一个与超平面$\{\lambda = 常数\}$的方向相正交的向量．

证明：按照 6.4.7，由λ所确定的线性形式$l_\lambda : V \longrightarrow K$可表为

$$l_\lambda(p - o) = < p - o, l_\lambda > = < p - o, d > .$$

超平面$\{\lambda = 常数\}$的方向是用 $\ker\ l_\lambda$来给出的． □

作为其第一个应用，我们对超平面方程来导入Hesse标准形：

定理8.2.2 设$\mathcal{H}$是$\mathcal{E}u$中的一个超平面，$o \in \mathcal{E}u$是一个原点．于是存在一个与$\mathcal{H}$的方向正交的单位向量d，使得

$$\mathcal{H} = \{< p - o, d > = \delta\}, \qquad 其中\ \delta \geq 0.$$

这里δ是从o到$\mathcal{H}$的距离，即如果$o \in \mathcal{H}$，则$\delta = 0$，如果$o \notin \mathcal{H}$，则δ是从o到$\mathcal{H}$上的垂足点的距离．对$\delta > 0$，d是唯一确定的．对$\delta = 0$，d能被确定到只差一个模为1的因子$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$．

证明：由 7.3.5.2，存在一个线性函数$\lambda : \mathcal{E}u \longrightarrow K$，使得$\lambda^{-1}(0) = \mathcal{H}$．利用 8.2.1，我们可写

$$\mathcal{H} = \{< p - o, d' > = -\lambda(o)\},$$

其中d'与$\mathcal{H}$的方向U是正交的．当$\lambda(o) \neq 0$时，则可写成$-\lambda(o) = \delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|d'|$，其中$\delta > 0$．由此$\mathcal{H}$可写成

$$\mathcal{H} = \{< p - o, d > = \delta\},$$

其中$d=\dfrac{d'}{|d'|}$. 特别地，有$\delta d+o=p_o\in\mathcal{H}$. 因为对所有的$p\in\mathcal{H}$，有

$$|p-o|=|p-o||d|\geq|<p-o,d>|=\delta=|p_o-o|,$$

所以对$\delta>0$, p_o是o到$\mathcal{H}$上的垂线的垂足点. □

补充8.2.3 关于酉参照系(o,D)，超平面方程可写成形如

$$\sum_i\xi_i\bar{\alpha}_i=\delta,\quad 其中\sum_i\alpha_i\bar{\alpha}_i=1,\quad \delta\geq 0.$$

□

现在我们来讨论二次函数. 类似于7.4.7, 下面是关于仿射 - 酉空间上的二次函数的基本定理:

定理8.2.4 设κ是仿射 - 酉空间$\mathcal{E}u$上的一个二次函数.

1. 设$\mathcal{E}u$不是欧氏的，即假设所属的向量空间的基域是$\mathbf{C}$. 于是存在一个酉参照系，使得关于这个参照系，κ具有下述表示:

情形A: $\kappa(x)=\kappa(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sum_{j=1}^r\lambda_j\xi_j^2+\gamma$;

$1\leq r\leq n$.

情形B: $\kappa(x)=\kappa(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sum_{j=1}^r\lambda_j\xi_j^2-2\mu\xi_n$;

$1\leq r<n$.

对这两种情形，都成立着$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_r>0$, 而且对情形$B$, $\mu>0$.

2. 当$\mathcal{E}u$是仿射欧氏空间时，则存在一个欧氏参照系，使得关于这个参照系，κ具有下述表示:

情形A: $\kappa(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sum_{j=1}^p\lambda_j\xi_j^2-\sum_{j=p+1}^{p+q}\lambda_j\xi_j^2+\gamma$;

$1\leq p+q\leq n$.

情形B: $\kappa(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sum_{j=1}^p\lambda_j\xi_j^2-\sum_{j=p+1}^{p+q}\lambda_j\xi_j^2-2\mu\xi_n$;

$1\leq p+q=r<n$.

对这两种情形，均成立 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0; \lambda_{p+1} \geq \cdots \geq \lambda_{p+q} > 0$, 且对情形 B, 根据 $p \geq q$ 或 $p < q$, 有 $\mu > 0$ 或者 $\mu < 0$..

证明：按照7.4.6, 关于一个适当选取的原点 o, κ 具有下列两种表示之一：

情形 A: $\kappa(p) = \psi(p-o, p-o) + \kappa(o)$.

情形 B: $\kappa(p) = \psi(p-o, p-o) - 2l_o(p-o)$.

由 6.5.6, $\mathcal{E}u$ 的模型 V 具有一个 ON-基 $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$. 于是 $G_D(\psi)$ 具有对角表示 $(\lambda_j \delta_{jk})$, 这里 λ_j 为实数. 我们可假设：对 $j > r = \operatorname{rg} \psi$, 有 $\lambda_j = 0$.

在 $K = \mathbf{C}$ 时，如果 $\lambda_j < 0$, 则我们能用 $\dfrac{d_j}{\sqrt{-1}}$ 代替 d_j. 在两种情形下，重新编号提供了 λ_j 的固定次序.

在情形 B 时，我们能像 7.4.6 那样证明：线性形式 l_o (见 6.4.7) 的表示 $\tau(l_o)$ 属于零空间 V_ψ^0, 于是 $\tau(l_o) \perp \{d_1, \cdots, d_r\}$. 我们能将 $\tau(l_o)$ 写成形如 $< \ , -\mu d >$, 使得 $|d| = 1$ 并按照要求，有 $\mu > 0$ 或者 $\mu < 0$. 显然基元素 $\{d_{r+1}, \cdots, d_n\}$ 能选成使得 $d = d_n$.

□

于是，我们得到了下列的仿射 - 酉空间中的二次型的标准表示：

定理8.2.5 $\mathcal{E}u = \mathcal{E}u(V)$ 中的一个二次型 $\{\kappa = 0\}$ 关于一个适当选取的酉参照系，具有下列的坐标表示：

1. 对 $K = \mathbf{C}$, 我们有：

在情形 $A0$ 时： $\sum_{j=1}^r \alpha_j \xi_j^2 = 0; \quad 0 < r \leq n.$

在情形 $A1$ 时： $\sum_{j=1}^r \alpha_j \xi_j^2 = 1; \quad 0 < r \leq n.$

在情形 B 时： $\sum_{j=1}^r \alpha_j \xi_j^2 = 2\xi_n; \quad 0 < r < n.$

这里 $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r > 0$, 对情形 $A0$, 还有 $\alpha_1 = 1$.

2. 对 $K = \mathbf{R}$ 我们有：

在情形 $A0$ 时： $\sum_{j=1}^p \alpha_j \xi_j^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} \alpha_j \xi_j^2 = 0;$

$1 \leq p; \quad q \leq p; \quad 0 < p+q = r \leq n.$

在情形 $A1$ 时： $\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\xi_j^2-\sum_{j=p+1}^{p+q}\alpha_j\xi_j^2=1$;

$0<p+q=r\le n.$

在情形 B 时： $\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\xi_j^2-\sum_{j=p+1}^{p+q}\alpha_j\xi_j^2=2\xi_n$;

$0<p+q<n;\quad q\le p.$

这里 $\alpha_1\ge\cdots\ge\alpha_p>0;\alpha_{p+1}\ge\cdots\ge\alpha_{p+q}>0$. 此外，在情形 $A0$, 有 $\alpha_1=1$.

证明: 类似于7.4.10得自7.4.7, 现在结论得自8.2.4. 情形 $A0$ 在 $\gamma=0$ 时发生. 通过乘法可使 $\alpha_1=1$. 对情形 $\gamma\ne0$, 则可除以 $-\gamma$.

对 $K=\mathbf{C}$, 可将 $-\dfrac{\lambda_j}{\gamma}$ 写成形如 $\alpha_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j}$. 在其中，我们用 $d_j\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi_j}{2}}$ 去替代 d_j, 必要时可重新编号，这样就得到了情形 $A1$.

对 $K=\mathbf{R}$, 可将 $-\dfrac{\lambda_j}{\gamma}$ 写成形如 $\pm\alpha_j$, 其中 $\alpha_j>0$, 再实施一个适当的重新编号.

在情形 B 及 $K=\mathbf{C}$ 时，可将 $\dfrac{\lambda_j}{\mu}$ 写成形如 $\alpha_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j}$，再利用 $d_j\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\phi_j}{2}}$ 去替代 d_j.

对 $K=\mathbf{R}$, 将 $\dfrac{\lambda_j}{\mu}$ 写成 $\pm\alpha_j$, 其中 $\alpha_j>0$, 再实施一个适当的重新编号. □

例8.2.6 1. 考察欧氏平面. 其模型为带有典范数量积的 $\mathbf{R}^2$. 设 (x,y) 是 $\mathbf{R}^2$ 的坐标，于是我们有下列二次型：

情形 $A0: r=2:$ $x^2+\beta y^2=0;\ 1\ge\beta>0.$ 一点.

$x^2-\beta y^2=0;$ 两条不同的直线.

$r=1:$ $x^2=0;$ 重合的两条直线.

情形 $A1: r=2:$ $\alpha x^2+\beta y^2=1;\ \alpha\ge\beta>0.$ 椭圆.

$\alpha x^2-\beta y^2=1;\ \alpha>0;\beta>0.$ 双曲线.

$$-\alpha x^2 - \beta y^2 = 1;\ \alpha \geq \beta > 0.$$ 空集.

$r = 1$: $\alpha x^2 = 1;\ \alpha > 0.$ 两条平行直线.

$$-\alpha x^2 = 1;\ \alpha > 0.$$ 空集.

情形B: $\alpha x^2 = 2y; \alpha > 0.$ 抛物线.

2. 在具有坐标(x, y, z)的3维欧氏空间中，我们有下列的2维二次型，对此概念，可参见7.4.13.

情形$A0$:

$r = 3$: $x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 0; 1 \geq \beta \geq 0; r > 0.$ 椭圆锥面.

$r = 2$: $x^2 - \beta y^2 = 0; \beta \geq 0.$ 两个不同的平面.

$r = 1$: $x^2 = 0$ 重合的两个平面.

情形$A1$:

$r = 3$: $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1; \alpha \geq \beta \geq \gamma > 0.$ 椭圆面.

$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 1; \alpha \geq \beta > 0; \gamma > 0.$ 单叶双曲面.

$\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 = 1; \alpha > 0; \beta \geq \gamma > 0.$ 双叶双曲面.

$r = 2$: $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1; \alpha > \beta > 0.$ 椭圆柱面.

$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1; \alpha > 0; \beta > 0.$ 双曲柱面.

$r = 1$: $\alpha x^2 = 1; \alpha > 0.$ 两个平行平面

情形B:

$r = 2$: $\alpha x^2 + \beta y^2 = 2z; \alpha \geq \beta > 0.$ 椭圆抛物面.

$\alpha x^2 - \beta y^2 = 2z; \alpha > 0; \beta > 0.$ 双曲抛物面.

$r = 1$: $\alpha x^2 = 2z; \alpha > 0.$ 抛物柱面.

欧氏空间中二次型的分类定理为:

定理8.2.7 设$\{\kappa=0\},\{\kappa'=0\}$是$n$维欧氏空间$\mathcal{E}u$中的两个$(n-1)$维的二次型. 则存在一个合同$\varphi:\mathcal{E}u\longrightarrow\mathcal{E}u$, 它将其中一个二次型变至另一个二次型的充要条件是这两个二次型具有8.2.5中相同的实标准形式.

证明: 在合同变换$\varphi:\mathcal{E}u\longrightarrow\mathcal{E}u$下，二次型的标准形是保持不变的，于是对$(n-1)$维二次型的限制是完全不必要的.

反过来，如果$\varphi:\mathcal{E}u\longrightarrow\mathcal{E}u$是一个合同，它把$\{\kappa=0\}$变至$\{\kappa'=0\}$, 则我们可如在7.4.15的证明中那样去做. □

定义8.2.8 称二次型$\{\kappa=0\}$为有心二次型，如果存在一个$o\in\mathcal{E}u$, 使得$x+o\in\{\kappa=0\}$和$-x+o\in\{\kappa=0\}$同时成立. 称o为二次型的中心.

注解8.2.9 1. 有心二次型的概念对(一般的)仿射空间也是有意义的.

2. 并不需要中心是唯一确定的. 例如对$\mathbf{R}^3$中的圆柱面$\{x^2+y^2=1\}$, 每点$\{0,0,z\}$都是中心. 亦见下列命题.

命题8.2.10 1. 中心二次型恰好是A型的二次型.

2. 如果$\kappa(\xi_1,\cdots,\xi_n)=0$是一个有心二次型的坐标表示，则线性方程组

$$\frac{\partial\kappa(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{\partial\xi_j}=0,\quad 1\le j\le n$$

的解是这个二次型的中心的坐标.

证明: 对1, 设o是二次型$\{\kappa=0\}$的中心，我们选取o作为原点，且把κ写成形如

$$\kappa(p)=\psi(p-o,p-o)+2l_o(p-o)+\kappa(o).\tag{8.1}$$

如果$p=x+o\in\{\kappa=0\}$, 则也有$p'=-x+o\in\{\kappa=0\}$, 于是$l_o(x)=l_o(-x)$, 即$l_o(x)=0$. 因此我们能在(8.1)中令$l_o=0$. 对于二次型$\{\psi(p-o,p-o)+\kappa(o)=0\}$, o显然是中心.

对 2, 如果x_0是前述方程的解，则称为$\sigma_\psi(x_0)+l_o=0$. 在其中，我们可将x用$x+x_0$代入，则二次型的方程中的线性项会消失，即二次型是A型的. □

例8.2.11 1. 在$V=\mathbf{R}^3$中考虑

$$\kappa(x,y,z)=x^2+6y+2z-5=0.$$

零空间V_ϕ^0是$\{x=0\}$. 因为$2l$可用 $(0,6,2)$代入，而且它属于V_ϕ^0, 所以我们发现$2\mu=-2|l|=-2\sqrt{40}=-4\sqrt{10}$. 于是有标准形$x^2=4\sqrt{10}z$或者$\dfrac{x^2}{2\sqrt{10}}=2z$: 这是一个抛物柱面.

2. 在$V=\mathbf{R}^2$中，$\kappa(x,y)=7x^2-12xy-2y^2-16x+28y-8=0$.

由矩阵$\begin{pmatrix}7&-6\\-6&-2\end{pmatrix}$所表示的$\psi$的特征值是$\lambda=10$和$\lambda=-5$. 于是二次部分的标准形（至多差一个因子）是$10x^2-5y^2$. 我们按照8.2.10.2中的方法去确定中心:

$$14x-12y-16=0,$$

$$-12x-4y+28=0,$$

于是$(x_0,y_0)=(2,1)$. $\kappa(x_0,y_0)=-10$. 因此标准形为

$$10x^2-5y^2=10 \text{ 或 } x^2-\frac{y^2}{2}=1.$$

这是一条双曲线.

3.

$$\kappa(x,y,z)=4x^2-4xy-4xz+4y^2-4yz+4z^2-5x+7y+7z+1=0.$$

二次部分的特征方程为

$$\det\begin{pmatrix}t-4&2&2\\2&t-4&2\\2&2&t-4\end{pmatrix}=t(t-6)^2.$$

于是二次部分是退化的. 这个二次型属于情形 B, 这是因为中心的方程组 (见 8.2.10.2)

$$8x-4y-4z-5=0,$$
$$-4x+8y-4z+7=0,$$
$$-4x-4y+8z+7=0$$

没有解. ψ 的零空间 $=\ker\sigma_\psi$ 是特征值为 0 的特征空间. 生成这个子空间的单位向量 e 是由 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ 给出的. 线性部分 $2l$ 是用 $-2\mu<\ ,e>$ 来表示的, 这里 $-2\mu=2l_o(e)=-3\sqrt{3}$. 于是有标准形

$$6x^2+6y^2=3\sqrt{3}z \text{ 或 } \frac{4}{\sqrt{3}}x^2+\frac{4}{\sqrt{3}}y^2=2z.$$

这是一个旋转抛物面.

8.3 角度

我们从定向的概念开始讨论. 此概念对于有限维的实仿射空间已经定义了. 这个有限维的假设在整节中都有效.

我们主要感兴趣的是 2 维定向欧氏空间, 简称为欧氏平面. 在这样的平面中的一个定向导致了定向角度的定义, 而这对整个平面几何学来说, 是具有根本意义的. 由此我们可导入 (不定向) 角度的概念; 这对于任意维数的欧氏空间也是有意义的.

对仿射和欧氏空间来说, 先对相应的模型, 即向量空间, 导入新概念几乎总是妥当的. 我们从下面的定义开始.

定义 8.3.1 1. 设 V 是一个实向量空间. 称两组基 $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 和 $B'=\{b'_1,\cdots,b'_n\}$ 是有相同定向的, 如果将 B 变到 B' 的变换 $\Phi_{B'}^{-1}\circ\Phi_{B'}$ 的行列式 >0.

2. 设$\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$是$V$上的实仿射空间. 称两组仿射参照系$(o,B)$, (o',B')是相同定向的, 如果对将(o,B)变至(o',B')的仿射变换$\varphi:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$, 成立$\det f_\varphi>0$.

注:

1. 在相同定向的概念中我们利用了: 对实向量空间V, $\det: GL(V)\longrightarrow\mathbf{R}^*$的象集不是连通的. 但对$\mathbf{C}$上的向量空间$V$, $\det GL(V)=\mathbf{C}^*$是连通的.

2. 特别地, 同向的概念对于欧氏向量空间V的ON-基也可定义. 因为$\det \boldsymbol{O}(V)=S^0=\{\pm1\}$是由两个不同的点所构成, 所以我们得到了两个类, 见8.3.2. 而对$\mathbf{C}$上的酉向量空间V, 相应的酉群$\boldsymbol{U}(V)$的值集合$\det\boldsymbol{U}(V)$仅由一个连通分支S^1所构成.

命题8.3.2 利用了"相同定向"的关系, 我们可将实向量空间中的基和实仿射空间中的仿射参照系分成两类. 对欧氏向量空间中的ON-基及欧氏空间中的欧氏参照系, 结论同样成立.

证明: 我们只限于讨论欧氏空间$\mathcal{E}u$的欧氏参照系的集合$\{(o',D')\}$. 固定一个这样的参照系(o,D). 于是由8.1.10, 在集合$\{(o',D')\}$和群$Bew(\mathcal{E}u)$之间给出了一双射. 与(o,D)具有相同定向的(o',D')对应于本性运动所构成的子群, 见8.1.3. 现在注意, 这个子群是群态射.

$$\varphi\in Bew(\mathcal{E}u)\longmapsto\det f_\varphi\in S^0$$

的核, 且象集S^0恰由两个元素所构成. 于是结论得自1.4.2.3. □

定义8.3.3 我们称一个实向量空间V或者实仿射空间$\mathcal{A}$是定向的, 如果已分别标明了两类相同定向的基或相同定向的仿射参照系中的某一类. 所标明的那一类中的元素就被称为是正的, 而另一类中的元素就称为是负的.

如果V或者$\mathcal{A}$是定向的，则我们用$-V$或者$-\mathcal{A}$来记具有另一个(相反)的定向的空间.

注:

1. 实向量空间是定向的，如果我们固定一组基B，即它是正的基，则从B用具有正行列式的变换$\Phi_{B'}^{-1}\circ\Phi_B$得到的所有其他的基都是正的.

对实仿射空间和欧氏空间，相应的结果也成立.

2. 特别地，我们能把$\mathbf{R}^n$视为定向的，这时可将典范基$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$取为正的.

3. 设$\mathcal{E}u$是一个n维的定向欧氏空间. 如果(o,D)是一个正的欧氏参照系，则

$$\Phi_{(o,D)}:\mathcal{E}u\longrightarrow\mathbf{R}^n,$$

(见7.2.9)是一个与其模型$\mathbf{R}^n$保持定向的等距，即正的欧氏参照系被映至$\mathbf{R}^n$中的正的基.

为了导入角度的概念，我们先来证明:

引理8.3.4 设V是一个2维定向欧氏空间. 则对于V的任意选定的一个正的ON-基$\{e_1,e_2\}$，$\boldsymbol{SO}(V)$中任何元素f具有表示

$$\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix},\tag{8.2}$$

其中$\phi\in\mathbf{R}$能确定至2π的整数倍. 由此所确定的映射

$$\rho:f=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\in\boldsymbol{SO}(V)\longmapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\in\boldsymbol{U}(1)$$

是一个群态射. 特别地，加法定理成立:

$$\sin(\phi+\phi')=\sin\phi\cos\phi'+\cos\phi\sin\phi',$$

$$\cos(\phi+\phi')=\cos\phi\cos\phi'-\sin\phi\sin\phi'.$$

证明: 由5.6.3我们知道, 关于一个适当的ON-基$\{e_1,e_2\}$, $f \in SO(V)$具有形如 (8.2) 的表示. 如果有必要的话, 可以用 $-\phi$代替 ϕ, 再把它写成 ϕ, 所以我们总可以认为这组基是正的. 从5.1.3知道, f关于任意一组正的基的表示可通过矩阵$T \in SO(2)$而与矩阵 (8.2) 相共轭. 但因为$SO(2)$是交换的, 见8.1.22, 所以得知f的表示 (8.2) 没有改变.

按照5.6.2, $\{e_1, e_2\}$确定了在V的复扩张$V_{\mathbb{C}}$上的一组ON-基$\{d_1, \bar{d}_1\}$, 其中$d_1 = \dfrac{\mathrm{i}e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$. 对于$f$的复扩张$f_{\mathbb{C}}$, 利用$f_{\mathbb{C}}(e_i) = e_i$, 我们发现有: $f_{\mathbb{C}}(d_1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} d_1, f_{\mathbb{C}}(\bar{d}_1) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\bar{d}_1$.

$f \in SO(V) \longmapsto f_{\mathbb{C}} \in O(V_{\mathbb{C}})$是一个单的群态射, 其象集是由对角元为$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi})$的对角矩阵所构成, 因而它与$U(1)$同构.

加法定理意味着群的连接关系. □

定义8.3.5 设V是一个2 维欧氏向量空间.

1. 集合$\{\pm \mathrm{id}_V\}$是群$SO(V)$的一个中心化子, 我们把陪集群记为$\overline{SO(V)}$. 于是$\bar{f} \in \overline{SO(V)}$是由$SO(V)$中的元素偶$\{f, -\mathrm{id}_V f = (\text{简记为}) - f\}$所构成.

2. 设$S(V) = \{|\ \ | = 1\}$是V中的单位圆. 在$S(V)$上用$d' = d$或$d' = -d$定义等价关系$d \sim d'$. 于是等价类是由$S(V)$上的对径点的偶$\bar{d} = \{d, -d\}$所构成. 用$\overline{S(V)}$来标记其陪集.

注: 在10.3中我们将会回到任意维数的欧氏向量空间的概念上去, 它们构成了椭圆几何的对象.

引理8.3.6 设V是一个二维的欧氏向量空间

1. 对$S(V)$中的d和d', 正好存在着一个$f \in SO(V)$, 使得$f(d) = d'$.

2. 对$\overline{S(V)}$中的$\bar{d}, \bar{d}'$, 正好存在着一个$\bar{f} \in \overline{SO(V)}$, 使得$\bar{f}(\bar{d}) = \bar{d}'$.

注: 考察V上的仿射空间$\mathcal{A}(V)$的类似概念: 对$\mathcal{A}$中的两

个元素 p 和 q, 正好存在一个 $x\in V$, 使得 $x+p=q$, 而且这时群 V 与 $SO(V)$ 一样, 也是交换的.

证明: 对 1.: 把 $d=d_1$ 和 $d'=d'_1$ 补充成具有相同定向的 ON-基 $\{d_1,d_2\}$ 和 $\{d'_1,d'_2\}$. 由 8.1.11 知, 正好存在一个 $f\in SO(V)$, 使得 $f(d_i)=d'_i, i=1,2$. 因为 8.3.1, 有 $\det f=1$, 于是 $f\in SO(V)$.

对 2, 如果 $d\in\bar{d}, d'\in\bar{d}'$ 及 $f(d)=d'$, 则 $\bar{f}(\bar{d})=\bar{d}'$. 由 $\bar{g}(\bar{d})=\bar{d}'$ 得知 $g(d)=d'$ 或者 $=-d'$, 则 $\bar{g}=\bar{f}$. □

定义8.3.7 设 $\mathcal{E}u=\mathcal{E}u(V)$ 是一个欧氏平面, $o\in\mathcal{E}u$.

1. 设 $d\in S(V)$, 以 o 为原点, 方向为 d 的射线 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(o,d)$ 定义为 $\{\alpha d+o;\alpha\geq 0\}$. 我们也称 $\mathcal{S}$ 为半直线, 并称 $\vec{\mathcal{G}}=\{\alpha d+o;\alpha\in\mathbf{R}\}$ 为以 o 为原点的相应的定向直线.

设 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(o,d)$ 和 $\mathcal{S}'=\mathcal{S}(o,d')$ 是两条射线, 从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}'$ 的定向角度 $\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ 定义为元素 $f\in SO(V)$, 使得 $f(d)=d'$. 从相应的定向直线 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}'$ 的定向角度是同样地定义的. 我们对此不再导入特定的记号.

当 $\mathcal{E}u$ 是定向时, 我们也用 $\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ 来标记唯一确定的元素, $\phi\in[0,2\pi)$, 这里 $\rho(f)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, 而 ρ 如在 8.3.4 中所述.

2. 设 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ 是两条 (不定向的) 直线, $o\in\mathcal{G}\cap\mathcal{G}'$. 设 $(o,\{d\})$ 和 $(o,\{d'\})$ 分别是 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 的欧氏参照系. 定义从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}'$ 的定向角 $\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}')$ 为满足 $\bar{f}(\bar{d})=\bar{d}'$ 的元素 $\bar{f}\in\overline{SO(V)}$.

当 $\mathcal{E}u$ 是定向时, 我们也用 $\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ 来标记唯一确定的元素 $\bar{\phi}\in[0,\pi)$, 这里 $\rho(f)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\phi}}$ 或者 $\rho(-f)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\phi}}, f\in\bar{f}$.

注: 如果我们用 ϕ 或 $\bar{\phi}$ 分别去描述定向角度, 则其复合将用加法来描述.

补充8.3.8 设 V 是一个 2 维欧氏向量空间. 对 $S(V)$ 中的 d,d', 设从 d 到 d' 的定向角度 $\vec{\angle}(d,d')$ 定义为 $f\in SO(V)$, 使得 $f(d)=d'$. 一般地, 如果 x,x' 是非零元素, 则用 $\vec{\angle}(d,d')$ 去定

义从 x 到 x' 的定向角度 $\vec{\angle}(x,x')$, 这里 $d=\dfrac{x}{|x|}, d'=\dfrac{x'}{|x'|}$.

注解8.3.9 设平面 $\mathcal{E}u$ 或向量空间 V 是定向的. $SO(V)$ 中的两个角度 f 和 f' 假设是用 $[0,2\pi)$ 中的 ϕ 和 ϕ' 来表示的. 于是乘积 $f\cdot f'$ 按照 $\phi+\phi'<2\pi$ 或 $\geq 2\pi$ 分别用 $\phi+\phi'$ 或 $\phi+\phi'-2\pi$ 来表示. 如果我们要将两个角度的结合 $f\cdot f'$ 用其在 $[0,2\pi)$ 中的表示的加法来描述, 则我们有时必须用 $\phi+\phi'-2\pi$ 来替代 $\phi+\phi'$. 特别地, 对 $\phi>0$, 其逆是用 $2\pi-\phi$ 来给出的.

相应地, 对 $\overline{SO(V)}$ 中元素 $\bar{f},\bar{f}'$ 的表示 $\bar{\phi},\bar{\phi}'$, 在讨论连接关系 $\bar{f}\cdot\bar{f}'$ 的表示时, 有时也要用 $\bar{\phi}+\bar{\phi}'-\pi$ 去替代 $\bar{\phi}+\bar{\phi}'$.

引理8.3.10 设 $\mathcal{E}u=\mathcal{E}u(V)$ 是一个欧氏平面, $o\in\mathcal{E}u$.

1. 考察具有公共原点 o 的射线.

(a) $\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')=\mathrm{id}\Longleftrightarrow\mathcal{S}=\mathcal{S}'$.

(b) $\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')+\vec{\angle}(\mathcal{S}',\mathcal{S}'')=\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}'')$.

(c) $\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')=\vec{\angle}(\mathcal{S}^*,\mathcal{S}'^*)\Longleftrightarrow\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}^*)=\vec{\angle}(\mathcal{S}',\mathcal{S}'^*)$.

2. 考察包含点 o 的直线. 于是成立着相应的公式.

3. 设 $\mathcal{S},\mathcal{S}'$ 是欧氏平面 $\mathcal{E}u$ 中具有公共起点 o 的射线. 设 $\mathcal{G},\mathcal{G}'$ 是相应的直线. 对于从 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}'$ 的定向角度在 $[0,2\pi)$ 中的表示以及从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}'$ 的定向角度在 $[0,2\pi)$ 中的表示, 成立着

$$2\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')=2\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}').$$

证明: 对 1, (a) 是成立的, 这是因为 $\vec{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')=\mathrm{id}$ 意味着 $f=\mathrm{id}$. (b) 是群连接关系. 对 (c) 的证明, 我们利用 $SO(V)$ 是交换的, 即从 $f(\mathcal{S})=\mathcal{S}'$, $f(\mathcal{S}^*)=\mathcal{S}'^*$ 及 $g(\mathcal{S})=\mathcal{S}^*$ 可得出:

$$g(\mathcal{S}')=g\cdot f(\mathcal{S})=f\cdot g(\mathcal{S})=f(\mathcal{S}^*)=\mathcal{S}'^*.$$

反过来, 同样可以得到.

对 2, 可如 1. 那样去证明.

对 3, 这得自 $\varphi+\varphi=(\varphi-\pi)+(\varphi-\pi) \mod 2\pi$. □

引理8.3.11 设 φ 是欧氏平面 $\mathcal{E}u(V)$ 的一个运动, 于是按照 φ 是本性或者非本性, 成立着 $\overrightarrow{\angle}(\mathcal{S},\mathcal{S}')=\overrightarrow{\angle}(\varphi(\mathcal{S}),\varphi(\mathcal{S}'))$ 或 $=\overrightarrow{\angle}(\varphi(\mathcal{S}'),\varphi(\mathcal{S}))$, 见 8.1.3.

证明: 设 d 和 d' 分别是 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 的方向, $f(d)=d'$. 设 $f_\varphi\in O(V)$ 是用 φ 所确定的正交变换. $f_\varphi(d)$ 和 $f_\varphi(d')$ 分别是 $\varphi(\mathcal{S})$ 或 $\varphi(\mathcal{S}')$ 的方向. 当 $f_\varphi\in SO(V)$ 时, 有 $f\cdot f_\varphi(d)=f_\varphi\cdot f(d)=f_\varphi(d')$. 当 $f_\varphi\notin SO(V)$ 时, 按照 8.1.22, f_φ 和 $f_\varphi\cdot f$ 是镜射, 于是 $f^{-1}\cdot f_\varphi=f_\varphi\cdot f$. 因此 $f^{-1}\cdot f_\varphi(d)=f_\varphi\cdot f(d)=f_\varphi(d')$. □

关于平行线所成角的经典的定理为:

命题8.3.12 设 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_1$ 是一个欧氏平面中的直线, $o_i\in\mathcal{G}\cap\mathcal{G}_i, i=0,1$. 于是成立:

$$\overrightarrow{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}_0)=\overrightarrow{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}_1)\iff\mathcal{G}_0\parallel\mathcal{G}_1.$$

证明: 设 $\overrightarrow{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}_i)=\bar{f}_i$. 对于 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_i$ 的方向, 我们能如此选取 $f_i\in\bar{f}_i$ 及在 $\mathcal{S}(V)$ 中的基元 d,d_i, 使得 $f_i(d)=d_i$. 于是结论得自: $\bar{f}_0=\bar{f}_1\iff\bar{d}_0=\bar{d}_1$. □

我们用 (不定向的) 角度来补充定向角度的概念. 对此, 我们并不限于在欧氏平面上讨论. 此概念的缺点是群元素不再是结合的, 于是形如 8.3.10 的结果不再成立.

定义8.3.13 1. 设 V 是一个欧氏向量空间, $\dim V\geq 2$. 设 x,x' 是 V 中的非零元, 令 $\dfrac{x}{|x|}=d,\dfrac{x'}{|x'|}=d'$. 设 U 是包含了 d 和 d' 的 2 维子空间, 选取 U 的一个定向.

用 $\min(\overrightarrow{\angle}(d,d'),\overrightarrow{\angle}(d',d))\in[0,\pi]$ 来定义 x 和 x' 之间的角度 $\angle(x,x')=\angle(x',x)$. 这里已设 $\overrightarrow{\angle}(d,d')$ 和 $\overrightarrow{\angle}(d',d)$ 是用 $[0,2\pi)$ 中的元素来表出的.

2. 设 $\mathcal{E}u = \mathcal{E}u(V)$ 是一个欧氏空间， $\dim \mathcal{E}u \geq 2$. 设 $o \in \mathcal{E}u, d, d' \in S(V) = \{|\quad| = 1\}$. 考察射线 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(o,d) = \{\alpha d + o; \alpha \geq 0\}$ 及 $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(o,d') = \{\alpha d' + o; \alpha \geq 0\}$. 由此可用 $\angle(d,d')$ 来定义在 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 之间的角度 $\angle(\mathcal{S},\mathcal{S}') = \angle(\mathcal{S}',\mathcal{S}) \in [0,\pi]$.

由此也可对从属的定向直线 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 定义角度 $\angle(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$.

3. 对于具有公共点 o 的两条不定向的直线 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$, 可定义角度 $\angle(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \angle(\mathcal{G}', \mathcal{G}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 为对这两条直线选用各种可能的定向后计算出的两个角度的最小值.

角度与 V 的数量积有着密切的联系.

命题8.3.14 设 d, d' 是一个欧氏向量空间 V 中的单位向量. 于是成立

$$\angle(d,d') = \cos^{-1} < d, d' > .$$

这里 $\cos^{-1}$ 是 $\cos|_{[0,\pi]}$ 的反函数.

证明: 当 $d = d'$ 或者 $d' = -d$, 则结论是显然的. 现设 d, d' 是线性无关的，且 $U = [d,d']$ 是所生成的 2 维空间. 用 d_2 来补充 $d = d_1$, 以得到 U 的一个 ON- 基 $\{d_1, d_2\}$, 它与基 $\{d, d'\}$ 有相同的定向. 因此有 $d' = \cos\phi\ d_1 + \sin\phi\ d_2$, 且 $\phi = \vec{\angle}(d,d')$. 于是 $< d, d' >= \cos\phi$. □

定义8.3.15 设 $\mathcal{E}u$ 是一个欧氏平面，$\mathcal{S} = \mathcal{S}(o,d)$ 和 $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(o,d')$ 是具有公共起点 o 的两条射线. 设 $d' \neq \pm d$. 用 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 来标记以 o 为起点的相应定向直线. 令 $\dfrac{d+d'}{|d+d'|} = e$.

1. $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ (相应地， $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$) 的角平分线 $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{S},\mathcal{S}') = \mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ 定义为定向直线 $\{\alpha e + o; \alpha \in \mathbf{R}\}$, 且以 $(o, \{e\})$ 作为其正的基.

2. 正扇形 $\mathrm{Sec}\ (\mathcal{S},\mathcal{S}') = \mathrm{Sec}\ (\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ 是集合 $\{\alpha d + \alpha' d' + o; \alpha \geq 0, \alpha' \geq 0\}$.

命题8.3.16 设$\mathcal{W}=\mathcal{W}(\mathcal{S},\mathcal{S}')=\mathcal{W}(\mathcal{G},\mathcal{G}')$是两条射线或两条如在8.3.15中那样相应的定向直线的角平分线.

1. 关于$\mathcal{W}$的镜射$\sigma=\sigma_{\mathcal{W}}$将$\mathcal{S}$和$\mathcal{S}'$的定向互换，也将$\mathcal{G}$和$\mathcal{G}'$的定向互换. 此乃角平分线的特征 (至多差一个定向).

2. 对于由定向直线所形成的定向角度 (见8.3.7.1), 成立着:

$$\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{W})=\vec{\angle}(\mathcal{W},\mathcal{G}') \text{ 且 } \vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}')=2\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{W})=2\vec{\angle}(\mathcal{W},\mathcal{G}').$$

证明: 对 1, 利用8.3.15中的记号, $e=\dfrac{d+d'}{|d+d'|}$ 和$e'=\dfrac{d-d'}{|d-d'|}$是V的一组ON-基. 在$\Phi_o:\mathcal{E}u\longrightarrow V$下$\sigma_{\mathcal{W}}$可用$s(x)=x-2<x,e'>e'$来表示，见8.1.20. $s(e)=e$ 和$s(e')=-e'$蕴含$s(d)=d',s(d')=d$.

如果对一个镜射$s^*(x)=s-2<x,\mathrm{e}^*>\mathrm{e}^*$成立$s^*(d)=d',s^*(d')=d$, 则$\mathrm{e}^*=\pm e'$, 即$s^*$是关于$\Phi_o(\mathcal{W})$的镜射.

对 2. : 当$\angle(\mathcal{G},\mathcal{G}')=\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}')$时，于是有$\angle(\mathcal{G},\mathcal{W})=\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{W})$ 和$\angle(\mathcal{W},\mathcal{G}')=\vec{\angle}(\mathcal{W},\mathcal{G}')$. 因为$\sigma$不是定向互换的，所以由 8.3.11及$\sigma(\mathcal{G})=\mathcal{G}'$, $\sigma(\mathcal{W})=\mathcal{W}$ 可得知$\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{W})=\vec{\angle}(\mathcal{W},\mathcal{G}')$. 因此

$$\begin{aligned}\angle(\mathcal{G},\mathcal{G}')&=\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}')=\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{W})+\vec{\angle}(\mathcal{W},\mathcal{G}')\\&=2\angle(\mathcal{G},\mathcal{W})=2\angle(\mathcal{W},\mathcal{G}').\end{aligned}$$

当$\angle(\mathcal{G},\mathcal{G}')=\vec{\angle}(\mathcal{G}^*,\mathcal{G})$时，可类似地得出结论. □

作为8.3.16的应用，我们来证明:

命题8.3.17 设$\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$是欧氏平面$\mathcal{E}u(V)$中的直线，$o\in\mathcal{G}\cap\mathcal{G}^*$. 于是关于$\mathcal{G}^*$的镜射$\sigma^*$与关于$\mathcal{G}$的镜射$\sigma$的乘积$\sigma^*\cdot\sigma$是绕$o$转角度为$2\vec{\angle}(\mathcal{G},\mathcal{G}^*)\in SO(V)$的旋转.

证明: 我们能假设 $\mathcal{G} \neq \mathcal{G}^*$. 令 $\sigma^* \cdot \sigma(\mathcal{G}) = \sigma^*(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$ 和 $f_{\sigma^* \cdot \sigma} = f \in SO(V)$. 对于 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$, 用满足 $f(d) = d'$ 的正参照系 $(o, \{d\}), (o, \{d'\})$ 来选取它们的定向. 按照 8.3.16.1, $\mathcal{G}^*$ 的定向由 $d^* = \dfrac{d + d'}{|d + d'|}$ 给出, 且等分了角度 $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$. 按照 8.3.16.2, 有 $f = 2\overrightarrow{\angle}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^*)$. 从 8.3.10.3 可以得出: 等式右边的值与 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 的定向选取无关. □

注解 8.3.18 设 V 是一个定向欧氏向量空间. 于是在 6.5.12 中所定义的映射 Λ_D 显然与 ON- 基的选取无关, 只要这组基是正的. 对这样的 D, 我们也简单地把 Λ_D 记为 Λ.

定理 8.3.19 设 V 是一个三维定向欧氏向量空间. 向量积

$$(x, y) \in V \times V \longmapsto x \times y \in V$$

是利用条件: 对所有 $z \in V$ 有 $< x \times y, z > = \Lambda(x, y, z)$ 而定义的. $x \times y$ 关于其每一个变元是线性的. $x \times y = -y \times x$, 而 $x \times y \neq 0$ 成立的充要条件为 x 和 y 是线性无关的. 在这种情况下, $x \times y$ 是用

$$x \times y \perp [x, y],$$

$$\{x, y, x \times y\} \text{是正向基, 且}$$

$$|x \times y|^2 = |x|^2 |y|^2 - 2 < x, y >$$

来特征的.

证明: 在选定了 x, y 后, $\{z \in V \longrightarrow \Lambda(x, y, z) \in \mathbf{R}\}$ 是 V^* 中的一个元素. $x \times y$ 是此元素在同构 $\tau : V^* \longrightarrow V$ 下的象, 见 6.5.12. 于是我们的结论得自 $\Lambda(x, y, z)$ 的定义. 注意: $\Lambda(x, y, x \times y) = |x \times y|^2$. □

注解 8.3.20 我们从 Laplace 展开定理 4.5.5 中发现:

如果$D=\{d_1,d_2,d_3\}$是一组正的ON-基，且

$$x=\sum_i \xi_i d_i, y=\sum_j \eta_j d_j,$$

则$x\times y=(\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2)d_1+(\xi_3\eta_1-\xi_1\eta_3)d_2+(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)d_3.$

8.4 附录：四元数和$SO(3), SO(4)$

在8.3.4中我们已经看到，模为1的复数所构成乘法群$S^1=\{e^{i\phi}\}$能与$SO(2)$恒同. 在这个附录中，我们将导入四元数，它是复数的一种推广. 我们讨论一个非交换域**H**，类似于复数域**C**，并定义其范数. 模为1的四元数集合$\mathbf{H}_1$构成一个群，它同构于$SO(3)$关于一个2阶不变子群的商群. $SO(4)$与$\mathbf{H}_1$也有着紧密的联系.

命题8.4.1 我们考察实向量空间$\mathbf{R}^4$，且将其典范基记为$\{1,i,j,k\}$. 对基中的元素，我们用

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

来定义乘法. 再借助于双线性性质，就可把此乘法扩张成整个$\mathbf{R}^4$上的乘积.

于是$\mathbf{R}^4$就成为了一个非交换域，我们把它记为**H**，且称其为四元数域. 称**H**中的元素为四元数.

证明: 显然此乘积是合理定义的. 对所有$q\in\mathbf{H}$，有$1q=q1$. 只需对基元去验证结合律的有效性，而我们发现，譬如说，$(ij)k=kk=-1=ii=i(jk)$. 现考虑到在元素$\{i,j,k\}$循环轮换时，规则$ij=k=-ji$是保持的. 由此我们得知结合律是普遍有效的.

如 $q = \alpha 1 + \beta \mathrm{i} + \gamma \mathrm{j} + \delta \mathrm{k} \neq 0$, 则我们可以验证:

$$\frac{\alpha 1 - \beta \mathrm{i} - \gamma \mathrm{j} - \delta \mathrm{k}}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$$

是 q 的逆 q^{-1}.

分配律可从我们的定义及双线性性质立即得证. □

定义8.4.2 共轭

$$(\bar{\ }) : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}; \quad q \longmapsto \bar{q}$$

可用 $\bar{1} = 1, \bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}, \bar{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}, \bar{\mathrm{k}} = -\mathrm{k}$ 的线性扩张来定义. $(\bar{\ })$ 的不动点, 即具有 $\bar{q} = q$ 的点 q 的集合中点的 $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ 的系数为 0. 我们称这种数为实数, 且写成形如 $\alpha 1 + 0\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 0\mathrm{k}$, 或简记为 α. 于是 $\mathbf{R}$ 成为 $\mathbf{H}$ 的一个子域.

记满足 $\bar{q} = -q$ 的点 q 的集合为 $\boldsymbol{L}$. 称 $q \in \boldsymbol{L}$ 是纯四元数. 利用 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\{\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$, $\boldsymbol{L}$ 与 $\mathbf{R}^3$ 恒同.

命题8.4.3 1. 共轭是一个对合, 即有 $(\bar{\ }) \circ (\bar{\ }) = \mathrm{id}$. 它关于加法是一个同构, 而对乘法来说, 它是一个反同构, 即

$$\overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q}'; \quad \overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q}.$$

2. $\mathbf{R}^4$ 上的典范内积 $<\ ,>$ 能描述成形如 $< q, q' > = \dfrac{q\bar{q}' + q'\bar{q}}{2}$. 特别地, 可将范数 $|q| = \sqrt{< q, q >}$ 写成如下形式: $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$.

3. 模映射

$$|\ | : q \in \mathbf{H} \longmapsto |q| \in \mathbf{R}$$

与乘法交换, 即 $|qq'| = |q||q'|$. 特别地,

$$|\ | : \mathbf{H}^* = \mathbf{H} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^*$$

是乘法的群态射. 这个映射的核 $\mathbf{H}_1$ 在乘法下也是一个群. 因为 $\mathbf{H}_1$ 能与球面 $S^3 = \{q \in R^4; |q| = 1\}$ 恒同, 于是在 S^3 上就定义了一个群结构.

注解8.4.4 这与我们已知的著名事实类似, 即 $\mathbf{R}^2$ 中的半径为1的球面构成一个群, 即 S^1 与 $\mathbf{C}^*$ 的子群 $\{e^{i\phi}\}$ 恒同. 后者是交换的, 但 S^3 不是交换的, 这是因为, 譬如说有 $ij \neq ji$. 可以证明: 没有其他的 $n > 0$, 使得 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的球面 S^n 具有群结构. 只有 S^7 还存在一个较弱的群结构, 即连接关系 $(r, r') \in S^7 \times S^7 \longmapsto rr' \in S^7$ 具有单位元和逆元; 但是结合律 $(rr')r'' = r(r'r'')$ 仅在三个元素 r, r', r'' 中的两个相符的条件下才成立. S^7 上的这个结构源于四元数的一种推广, 它是 $\mathbf{R}^8$ 上的一个所谓Cayley八重态的结构.

关于8.4.3的证明: 对1.: $(^-)\circ(^-) = \mathrm{id}$ 显然成立, 且 $(^-)$ 显然是 $\mathbf{H}$ 的一个 $\mathbf{R}$-线性同构. 仅需对基元去验证规则 $\overline{qq'} = \bar{q}'\bar{q}$, 而这是容易实现的.

对 2.: 因为 $\dfrac{q\bar{q}' + q'\bar{q}}{2}$ 在共轭下是不变的, 所以它属于 $\mathbf{R}$. 此外, 这个值关于两个变量 (q, q') 是 $\mathbf{R}$-线性的, 且为对称. 为看出这个对称双线性形式与数量积 $<,>$ 是一致的, 我们只需证明: $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ 关于这个形式是一组ON-基, 而这是容易做到的.

对 3.: 这得自 $(qq')(\overline{qq'}) = qq'\bar{q}'\bar{q} = q\bar{q}q'\bar{q}'$. □

在 1.3.11.3 中, 对群 G 的每个元 $q \in G$, 可定义一个内自同构 $i_q : G \longrightarrow G; q' \longmapsto qq'q^{-1}$. 映射 $i : G \longrightarrow \mathcal{A}utG\,;\ q \longmapsto i_q$ 是一个群同态.

特别地, 我们现在考虑群 $\mathbf{H}_1$, 这里 $q^{-1} = \bar{q}$. 对 $q \in \mathbf{H}_1$ 所定义的内自同构 $q' \in \mathbf{H}_1 \longmapsto qq'\bar{q} \in \mathbf{H}_1$ 可扩大成一个线性映射 $q' \in \mathbf{H} \longmapsto qq'\bar{q} \in \mathbf{H}$. 这是下列结果的出发点.

引理8.4.5 1. 对 $q \in \mathbf{H}_1$, 定义映射

$$\rho(q) : q' \in \mathbf{H} \longmapsto qq'\bar{q} \in \mathbf{H}.$$

于是 $\rho(q)$ 是具有典范数量积的空间 $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$ 的一个正交变换. 此外，有 $\det \rho(q) = 1$, 即 $\rho(q) \in \boldsymbol{SO}(4)$.

2. $\rho(q)|\mathbf{R} = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$. 则 $\rho(q)|_{\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{L} \longrightarrow \boldsymbol{L}$. 我们简单地用 $\rho(q)$ 来替代 $\rho(q)|_{\boldsymbol{L}}$, 于是 $\rho(q) \in \boldsymbol{SO}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{SO}(3)$.

3. $\rho : q \in \mathbf{H}_1 \longmapsto \rho(q) \in \boldsymbol{SO}(4)$ 是群态射.

4. 特别地，当 q 是纯四元素时，则 $q \in \mathbf{H}_1 \cap \boldsymbol{L}$, 于是 $\rho(q) : \boldsymbol{L} \longrightarrow \boldsymbol{L}$ 是关于直线（即1维子空间）$[q]$ 的镜射.

证明: 对 1.: 为了证明 $\rho(q) \in \boldsymbol{O}(4)$, 只需证明：对所有 $q' \in \mathbf{H}$, 有 $< \rho(q)q', \rho(q)q' >=< q', q' >$, 见6.2.16.1. 事实上，我们有 $\rho(q)q'\overline{\rho(q)q'} = (qq'\bar{q})\overline{(qq'\bar{q})} = qq'\bar{q}q\bar{q}'\bar{q} = q'\bar{q}'$.

显然 $\rho(1) = \mathrm{id}$. $q \in \mathbf{H}_1 \longmapsto \det \rho(q) \in \{1, -1\}$ 是连续的. 因为 $\mathbf{H}_1 = S^3$ 是连通的, 所以得到: 对所有 $q \in \mathbf{H}_1$, 有 $\det \rho(q) = 1$. 这个结论也可不用连续性而被验证.

对 2.: 显然有 $\rho(q)(1) = 1$. 于是其他的得自 1.

对 3.: 注意, ρ 是一个内自同构的线性扩张.

对 4.: 如果 $q \in \mathbf{H}_1 \cap \boldsymbol{L}$, 则 $\rho(q)q = q; q^2 = -q\bar{q} = -1$. 因为 $\rho(-1) = \mathrm{id}$, 于是 $\rho(q)\rho(q) = \mathrm{id}, \rho(q) \neq \mathrm{id}$. 因此对所有 $x \in \boldsymbol{L}$, $\rho(q)(x) = x$ 或者 $qx = xq$ 不能成立：即 $q\mathrm{i} = \mathrm{i}q, q\mathrm{j} = \mathrm{j}q, q\mathrm{k} = \mathrm{k}q$ 蕴含 $q = 0$. 因此 $\rho(q)$ 是以 q 为不动点的镜射. 因为 $\det \rho(q) = 1$, $\rho(q)$ 必须是关于直线 $[q]$ 的镜射. □

由此，我们已具备了通向下述定理的证明的实质性的一步.

定理8.4.6 映射

$$\rho : \mathbf{H}_1 = S^3 \longrightarrow \boldsymbol{SO}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{SO}(3)$$

是一个群态射，其象集为 $SO(\boldsymbol{L})$，核为 $\{\pm 1\}$.

于是由 1.4.12，有 $SO(3) \cong S^3/\mathbf{Z}_2$，这里 $\mathbf{Z}_2$ 是用映射 $x \in S^3 \longmapsto -x \in S^3$ 来生成的.

证明：由 8.4.5，我们只需确定 ρ 的象及核. 设 $f \in SO(3)$. 由 6.4.22，存在一个子空间 $U \subset \boldsymbol{L}$，使得 $f|_U = \mathrm{id}_U$，而 $f|_{U^\perp}$ (这里 $U^\perp$ 是 $\boldsymbol{L}$ 中正交于 U 的平面) 属于 $SO(U^\perp)$. 按照 8.1.22，$f|_{U^\perp}$ 可写成两个关于直线的镜射 s, s' 的乘积 $s \cdot s'$.

设 q 和 q' 是这些直线中的单位向量. 于是由 8.4.5.4 得知，

$$\rho(q)\rho(q') = \rho(qq')$$

在 U 上是恒同的，而在 $U^\perp$ 上是元素 $s \cdot s'$. 因此 $f = \rho(qq')$. $q \in \ker \rho$ 意味着对所有 $x \in \mathbf{H}$，有 $\rho(q)(x) = x$ 或 $qx = xq$. 但这仅仅对 $q \in \mathbf{R} \cap \mathbf{H}_1$ 是可能的，于是 $q = 1$ 或者 $q = -1$. □

作为本附录的末段，我们用四元素描述 $SO(\mathbf{H}) = SO(4)$. 从与 8.4.5 相对照来开始我们的讨论.

引理 8.4.7 1. 对 $(q, r) \in \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1$，定义映射

$$\tau(q, r) : q' \in \mathbf{H} \longmapsto qq'\bar{r} \in \mathbf{H}.$$

于是有 $\tau(q, r) \in SO(\mathbf{H})$.

2. 在 $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1$ 上考察乘积 $(q_0, r_0)(q_1, r_1) = (q_0q_1, r_0r_1)$ 的群结构. 于是

$$\tau : \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1 \longrightarrow SO(\mathbf{H})$$

是一子群态射.

证明：对 1.:

$$(\tau(q, r)q')\overline{(\tau(q, r)q')} = (qq'\bar{r})\overline{qq'\bar{r}} = qq'\bar{r}r\bar{q}'\bar{q} = qq'\bar{q}'\bar{q} = q'\bar{q}'.$$

于是 $\tau(q, r) \in O(\mathbf{H})$. $\det \tau(q, r) = 1$ 可如同 8.4.5.1 的证明那样通过连续性的考虑而证得.

对 2.:

$$\tau(q_0,r_0)\tau(q_1,r_1)q' = q_0(q_1q'\bar{r}_1)\bar{r}_0 = (q_0q_1)q'\overline{(r_0r_1)}$$
$$= \tau(q_0q_1,r_0r_1)q'.$$

□

定理8.4.8 映射

$$\tau : \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1 = S^3 \times S^3 \longrightarrow SO(\mathbf{H}) = SO(4)$$

是一个群态射，且其象为 $SO(4)$，核为 $\{(1,1),(-1,-1)\}$. 于是按照 1.4.12, $SO(4) = (S^3 \times S^3)/\mathbf{Z}_2$，这里 $\mathbf{Z}_2$ 是由映射 $(x,y) \in S^3 \times S^3 \longmapsto (-x,-y) \in S^3 \times S^3$ 所生成的.

证明: 设 $f \in SO(4)$. 令 $f(1) = q_0 \in \mathbf{H}_1$. 于是有

$$\tau(q_0^{-1},1)(q_0) = 1.$$

因此 $\tau(q_0^{-1},1)f \in SO(3)$. 且因为 8.4.6, 有 $\tau(q_0^{-1},1)f = \rho(q) = \tau(q,q)$. 即 $f = \tau(q_0q,q)$.

$\tau(q,r)(x) = x$，即对所有 $x \in \mathbf{H}$，有 $qx = xr$，这蕴含 $q = r$，于是由 8.4.6, 我们知道 $q = +1$ 或者 $q = -1$. □

8.5 三角学

现在我们来考察在定向欧氏平面中的三角形. 我们从富于经典的、古色古香的结果中选出几个基本的结果. 最后我们讨论 Morley 定理.

定义8.5.1 设 $\mathcal{E}u$ 是一个 V 上的定向欧氏平面，简称为欧氏平面.

1. 所谓 $\mathcal{E}u$ 中的一个三角形 abc，是指 $\mathcal{E}u$ 中的三点 (顶点)，使得 $\{(b-a),(c-a)\}$ (或者等价地: $\{(c-b),(a-b)\}$，也可以

$\{(a-c),(b-c)\}$）是V的线性无关元素．也称a,b,c是三角形abc的角．

2．根据$\{(b-a),(c-a)\}$（或者等价地：$\{(c-b),(a-b)\}$，也可以$\{(a-c),(b-c)\}$）是否是V的一组正的或负的基，我们称abc具有正的或负的定向．

3．我们用A,B,C来记三角形abc的三点a,b,c的对边．即

$$A=\{\beta b+\gamma c;\beta+\gamma=1;\beta\geq 0,\gamma\geq 0\},$$
$$B=\{\gamma c+\alpha a;\gamma+\alpha=1;\gamma\geq 0,\alpha\geq 0\},$$
$$C=\{\alpha a+\beta b;\alpha+\beta=1;\alpha\geq 0,\beta\geq 0\}.$$

记这些边的长度分别为$|A|,|B|,|C|$．于是$|A|=d(c,b),|B|=d(a,c),|C|=d(a,b)$．

三角形直线$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$分别是通过$\{b,c\},\{c,a\},\{a,b\}$，且包含$A,B,C$的直线，$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$被定向，使得$(c-b),(a-c),(b-a)$分别是这些直线的方向$U_{\mathcal{A}},U_{\mathcal{B}},U_{\mathcal{C}}$的正的基．

4．三角形abc在角点a,b,c处的外角是用

$$\bar{\alpha}=\angle(a-c,b-a);\bar{\beta}=\angle(b-a,c-b);\bar{\gamma}=\angle(c-b,a-c)$$

来定义的．当abc是正的定向时，则成立

$$\bar{\alpha}=\overrightarrow{\angle}(\mathcal{B},\mathcal{C});\bar{\beta}=\overrightarrow{\angle}(\mathcal{C},\mathcal{A});\bar{\gamma}=\overrightarrow{\angle}(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

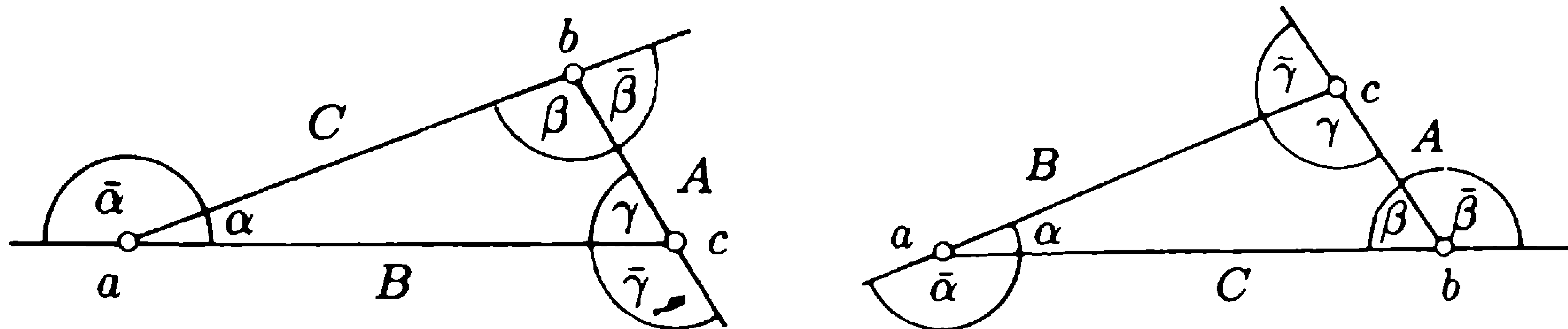
当abc是负的定向时，则成立

$$\bar{\alpha}=\overrightarrow{\angle}(\mathcal{C},\mathcal{B});\bar{\beta}=\overrightarrow{\angle}(\mathcal{A},\mathcal{C});\bar{\gamma}=\overrightarrow{\angle}(\mathcal{B},\mathcal{A}).$$

在角点a,b,c处的内角（或简称为角）α,β,γ用

$$\alpha=\pi-\bar{\alpha};\beta=\pi-\bar{\beta};\gamma=\pi-\bar{\gamma}$$

来定义.



欧氏三角形的基本定理为:

定理8.5.2 三角形的内角和$\alpha+\beta+\gamma$等于π.

证明: 只需证明$\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}=0 \mod 2\pi$. 我们限于讨论$abc$是正向的情形. 于是我们由8.3.10.1得到

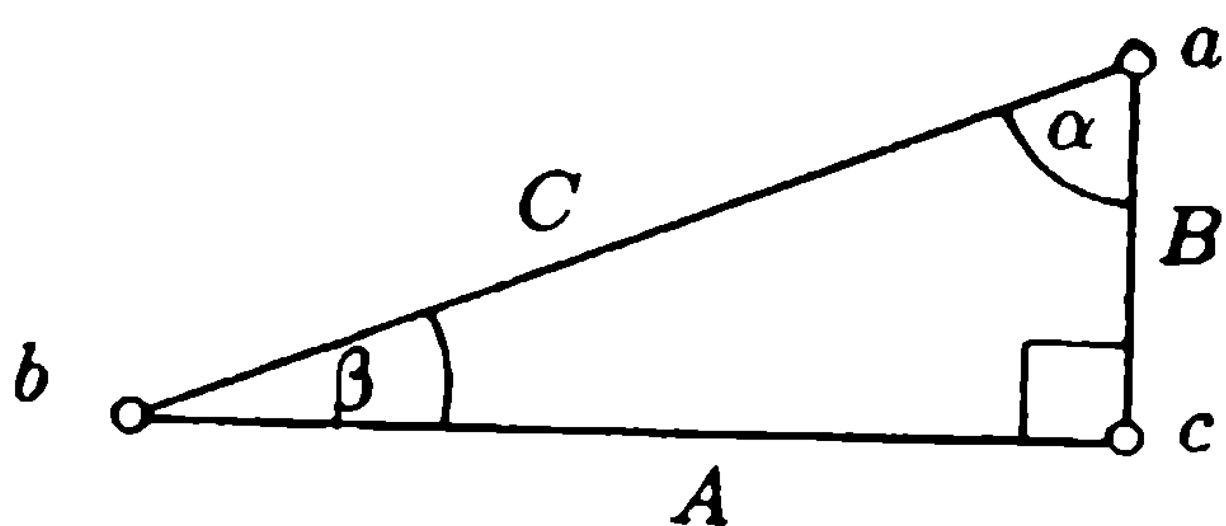
$$\begin{aligned}\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma} &= \overrightarrow{\angle}(\mathcal{B},\mathcal{C})+\overrightarrow{\angle}(\mathcal{C},\mathcal{A})+\overrightarrow{\angle}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \\ &= \overrightarrow{\angle}(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \mathrm{id} \in \boldsymbol{SO}(V).\end{aligned}$$

因为$0<\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}<4\pi$, 所以得到$\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}=2\pi$. □

关于三角学的进一步发展, 我们需要下面的结果.

引理8.5.3 设abc是欧氏平面$\mathcal{E}u$中的一个三角形.

1. $|C|^2=|A|^2+|B|^2-2|A||B|\cos\gamma$(余弦定理).



2. 特别地, 设abc是一个直角三角形, 在c处为直角$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$. 则成立$|C|^2=|A|^2+|B|^2$(勾股定理).

3. 在2.的假设下, 有$|A|=|C|\cos\beta$; $|B|=|C|\sin\beta$.

4. $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=|A|:|B|:|C|$(正弦定理).

证明: 对1.: 由于6.2.16, 我们只需证明: 如果x,y是2维定向欧氏向量空间V的非零向量, 则有

$$<x,y>=|x||y|\cos\angle(x,y).$$

为此，令 $\frac{x}{|x|}=e, \frac{y}{|y|}=e'$，则 $\angle(e,e')=\angle(x,y)$. 应用 8.3.14 即得.

对 2.: 由 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，勾股定理得自 1.

对 3.: 我们能假定 abc 是正向的，因为如果 bac 是正向的，则结论不变.

由 $(a-b)=(c-b)+(a-c)$ 及 $\{d_1=\frac{(c-b)}{|A|}, d_2=\frac{(a-c)}{|B|}\}$ 是一组正的 ON-基，则从 β 的定义得出：

$$\frac{(a-b)}{|C|}=\cos\beta d_1+\sin\beta d_2,$$

于是 $\cos\beta=\frac{|A|}{|C|}, \sin\beta=\frac{|B|}{|C|}$.

对 4.: 考察 c 到 C 上的垂足点 l_c. 于是 cal_c, bcl_c 是在 l_c 处为直角的直角三角形. 由 3. 知，有 $|B|\sin\alpha=|A|\sin\beta=d(c,l_c)$. □

我们再来看三角形的合同定理.

定理 8.5.4 设 $abc, a'b'c'$ 是欧氏平面 $\mathcal{E}u$ 中的三角形，下列陈述是等价的：

1. abc 和 $a'b'c'$ 是合同的.
2. $|A|=|A'|, |B|=|B'|, |C|=|C'|$.
3. $|A|=|A'|, |B|=|B'|, \gamma=\gamma'$.
4. $|A|=|A'|, \beta=\beta', \gamma=\gamma'$.
5. $|A|=|A'|, |B|=|B'|, \alpha=\alpha', \alpha\geq\beta$.

证明: 将 a 变至 a', b 变至 b', c 变至 c' 的运动 φ 的存在性导至陈述 2, 3, 4, 5 是显然的.

2.$\Longrightarrow$1.: 是 8.1.12 的特殊情形.

3.$\Longrightarrow$2.: 得自 8.5.3.1.

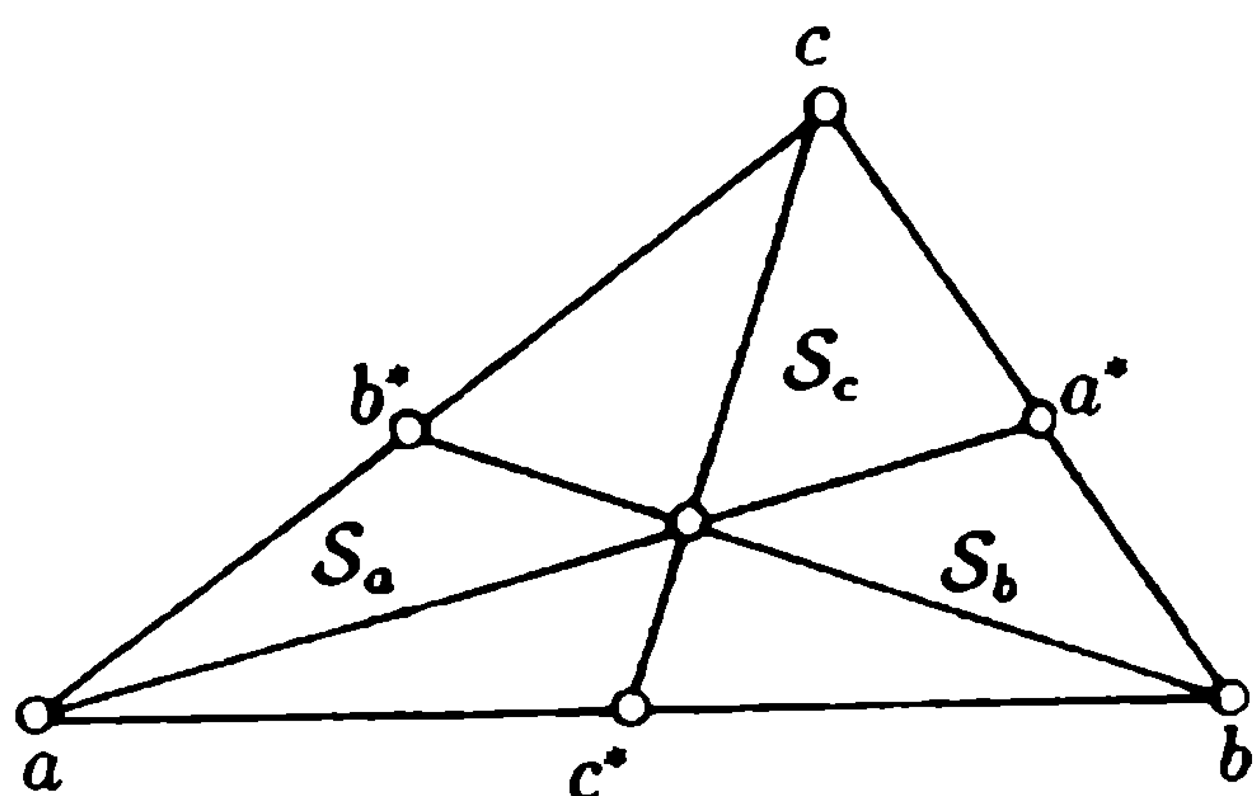
4.$\Longrightarrow$2.: 因为我们有 $\alpha=\pi-\beta-\gamma=\alpha'$ 及 8.5.3.4, 故得出 $|B|=|B'|, |C|=|C'|$.

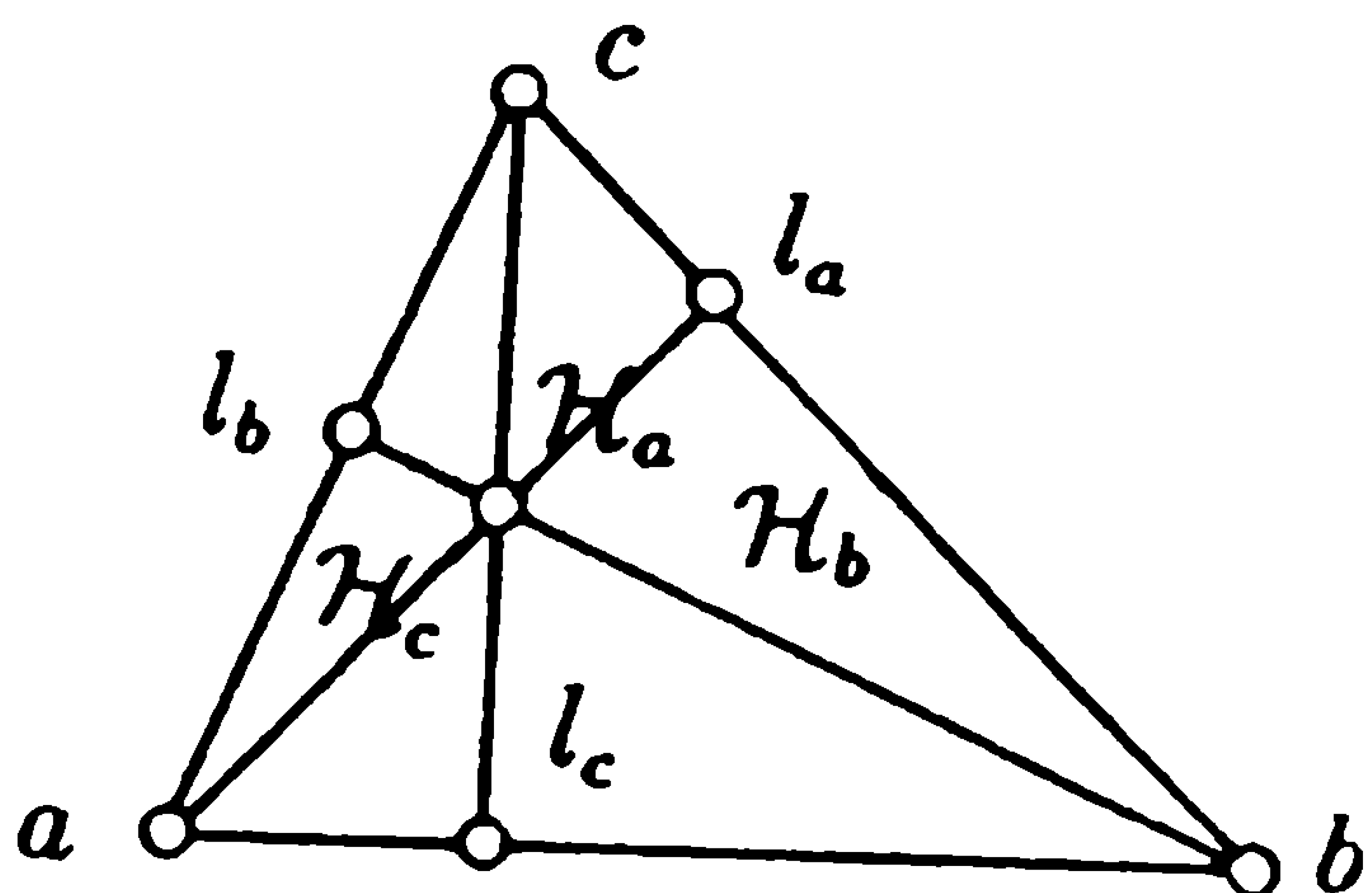
5.$\Longrightarrow$3.: 因为由8.5.3.4得出 $\sin\beta = \sin\beta'$, 由此, 得出 $\beta = \beta'$. 这是因为从$\beta' = \pi - \beta$将导出$\alpha' + \beta' = \alpha + \pi - \beta \geq \pi$, 而这是不可能的. 于是有$\gamma = \pi - \alpha - \beta = \gamma'$. □

现在我们欲讨论关于属于一个三角形的共点线束的一系列结果. 我们已在7.1.7.4中证明了第一个这类结果, 它已经属于仿射几何学的内容.

定理8.5.5 设abc是一个欧氏平面$\mathcal{E}u$中一个三角形.

1. 三条中线$\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$是共点的. 这里$\mathcal{S}_a$是通过$a$及对边$A$的中点$a^* = \dfrac{b+c}{2}$的直线. $\mathcal{S}_b$和$\mathcal{S}_c$可类似地定义.

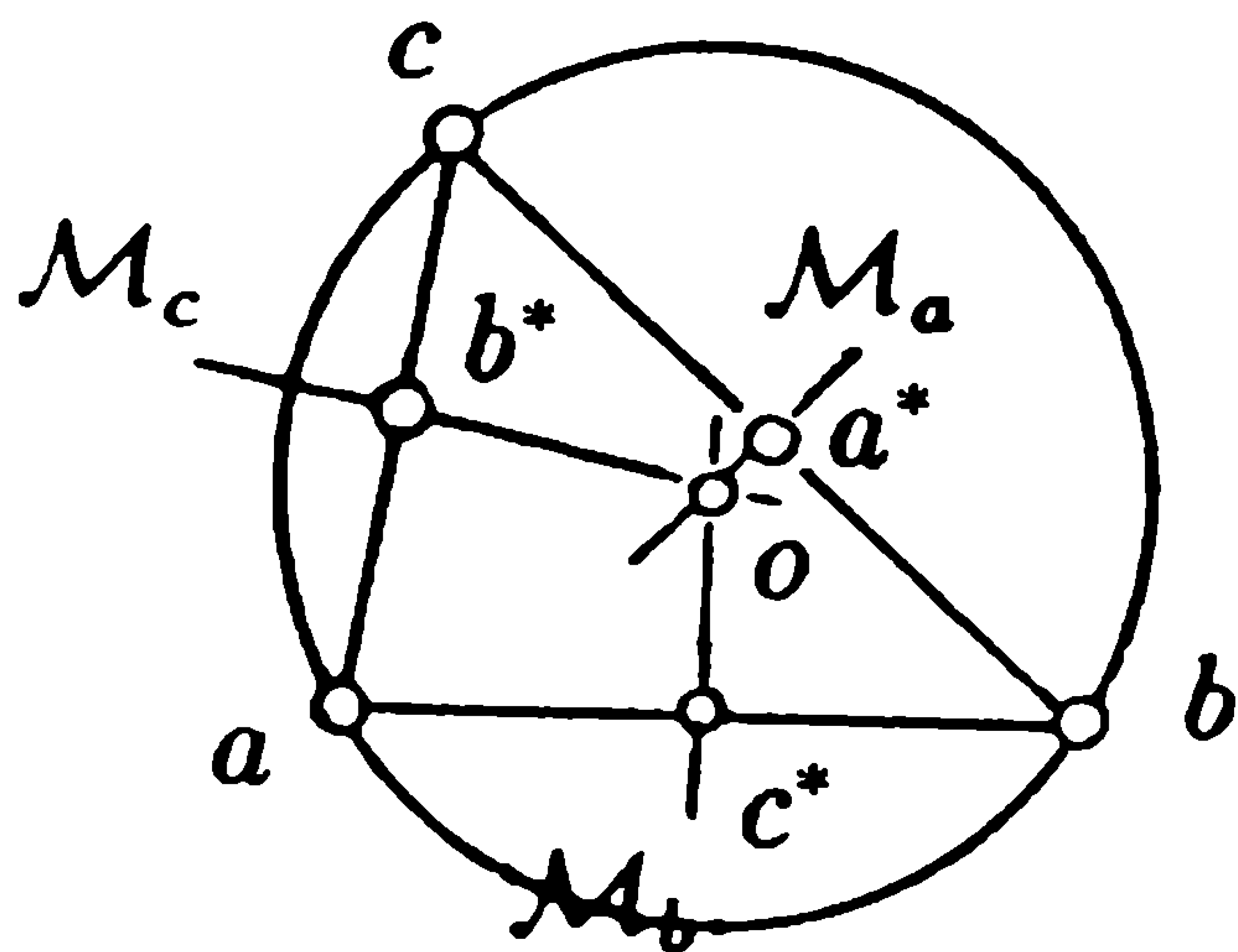


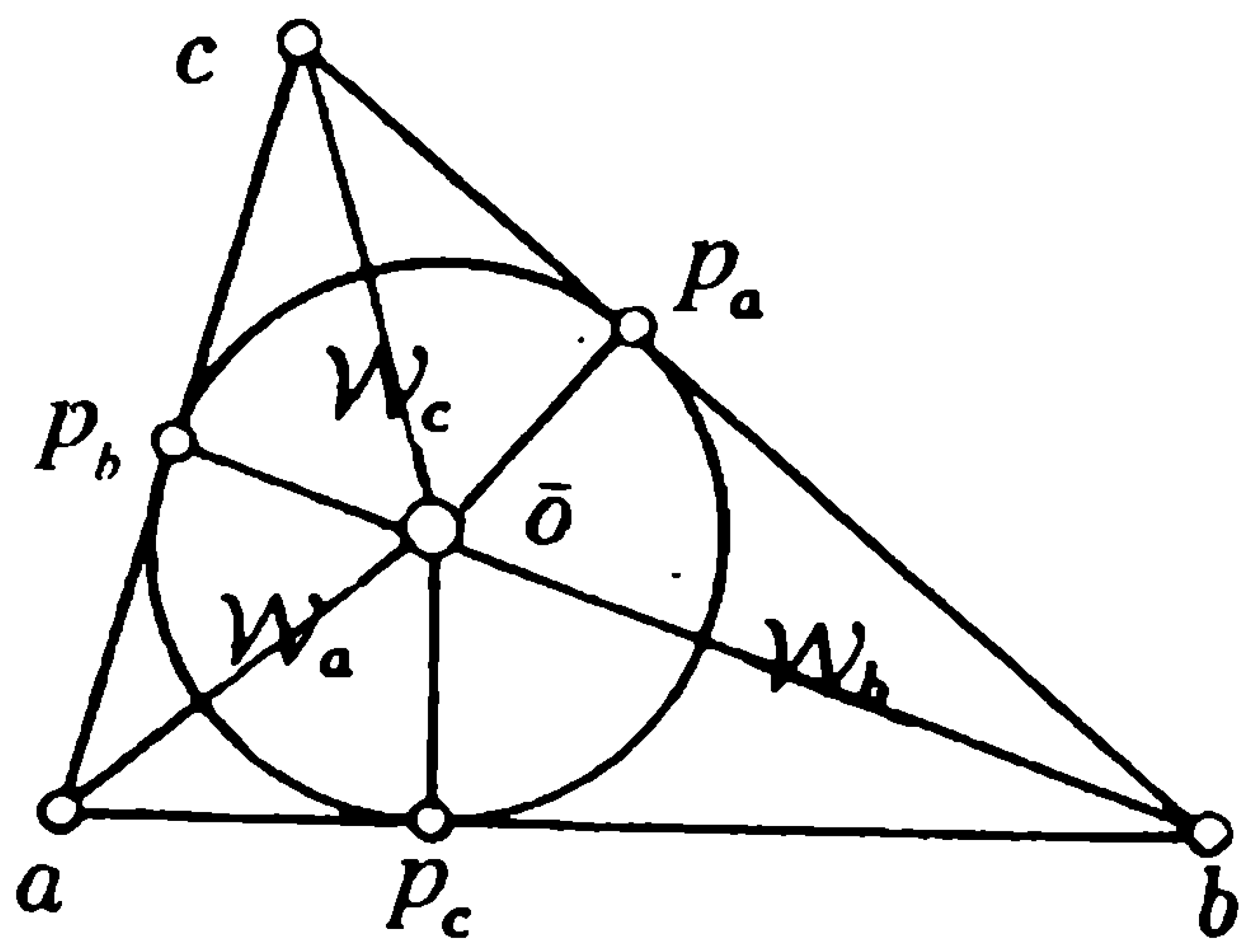


2. 三条高$\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b, \mathcal{H}_c$是共点的. 这里$\mathcal{H}_a$是从$a$到$A$上的垂线, 见8.1.15. $\mathcal{H}_b, \mathcal{H}_c$可类似地定义.

3. 三条中垂线$\mathcal{M}_\mathcal{A}, \mathcal{M}_\mathcal{B}, \mathcal{M}_\mathcal{C}$是共点的, 这里$\mathcal{M}_\mathcal{A}$是过$a^* = \dfrac{b+c}{2}$, 且垂直于$\mathcal{A}$的直线, $\mathcal{M}_\mathcal{B}, \mathcal{M}_\mathcal{C}$可类似地定义.

$\mathcal{M}_\mathcal{A}, \mathcal{M}_\mathcal{B}, \mathcal{M}_\mathcal{C}$的公共交点$o$是三角形$abc$的外接圆$S_\rho(o)$的圆心. 这是一个以$o$为心, 半径为$\rho = d(a,o) = d(b,o) = d(c,o)$的圆, 而且通过三角形$abc$的三个角点.





4. 三条角平分线$\mathcal{W}_a, \mathcal{W}_b, \mathcal{W}_c$是共点的. 这里$\mathcal{W}_a$是过$a$的，且具有正方向$\dfrac{b-a}{|b-a|}+\dfrac{c-a}{|c-a|}$的定向直线， $\mathcal{W}_b$和$\mathcal{W}_c$可定义为分别过b和c的相应直线. $\mathcal{W}_a, \mathcal{W}_b, \mathcal{W}_c$的公共交点$\bar{o}$是三角形$abc$的内切圆$S_{\bar{\rho}}(\bar{o})$的圆心. 这是一个以$\bar{o}$为心，半径为$\bar{\rho}=d(\bar{o},\mathcal{A})=d(\bar{o},\mathcal{B})=d(\bar{o},\mathcal{C})$的圆，它与边$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$分别相切于$p_a, p_b$和$p_c$，且$p_a \in A \subset \mathcal{A}$，$p_b \in B \subset \mathcal{B}$，$p_c \in C \subset \mathcal{C}$.

证明: 对1.: 见7.1.7.4.

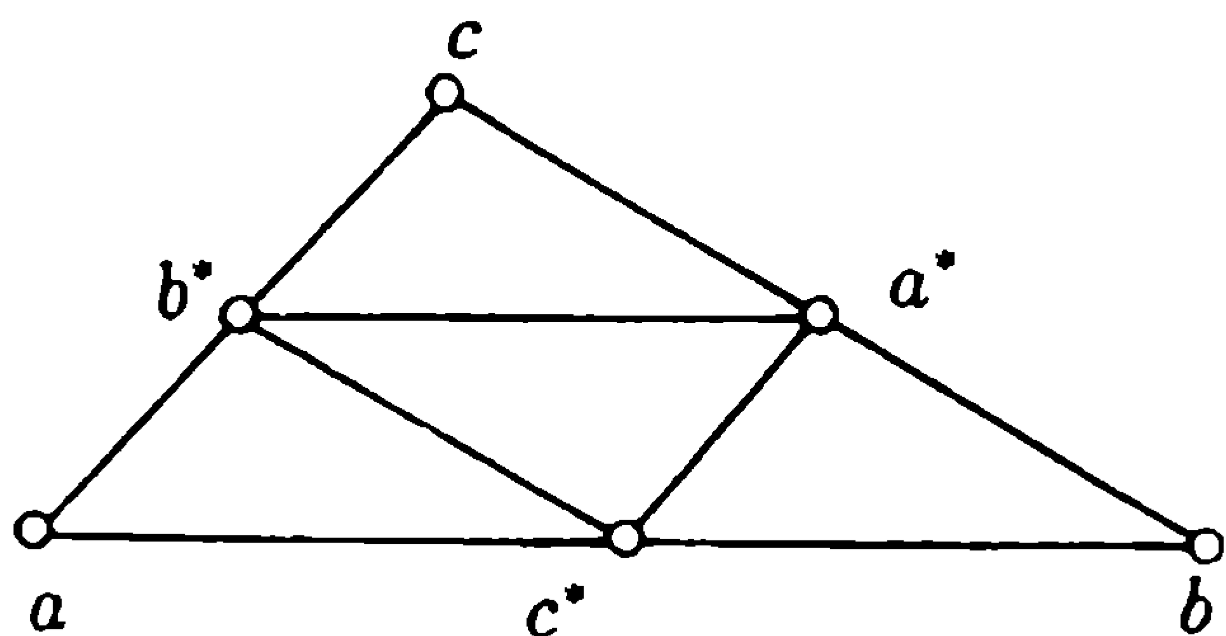
对2.: 当abc是一个直角三角形时，不妨设$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，则c是高所在的直线的公共交点. 如果abc不是直角的三角形，则Ceva定理 (见7.3.14)的假设满足：用l_a, l_b, l_c分别记a, b, c到$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$上的垂足点. 利用8.5.3.3,

$$\text{TV }(a,b,l_c)=\frac{a-l_c}{b-l_c}=\mp\frac{|B|\cos\alpha}{|A|\cos\beta},$$

根据是否成立α和$\beta<\dfrac{\pi}{2}$，右端取“$-$”号或“$+$”号. 如果角α,β,γ之一$>\dfrac{\pi}{2}$，则其它两个角$<\dfrac{\pi}{2}$. 于是在上述单比的公式

$$\text{TV }(a,b,l_c),\ \text{TV }(b,c,l_a),\ \text{TV }(c,a,l_b)$$

中遇到了一次或三次“$-$”号. 在每种情形下，它们的乘积都等于-1.



对3.: 对三角形abc, 我们去构造另一个三角形 $a^*b^*c^*$, 它具有角点 $a^* = \frac{b+c}{2}, b^* = \frac{c+a}{2}, c^* = \frac{a+b}{2}$. 于是$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \mathcal{H}_{a^*}, \mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \mathcal{H}_{b^*}, \mathcal{M}_{\mathcal{C}} = \mathcal{H}_{c^*}$. 于是结论得自2. 对$o \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, 成立$d(o,a) = d(o,b) = d(o,c) = \rho$.

对4.: $\mathcal{W}_a$是定向直线$\mathcal{C}$和$-\mathcal{B}$的角平分线, 见8.3.15. 由8.3.16, 关于$\mathcal{W}_a$的镜射把$\mathcal{C}$变至$-\mathcal{B}$. 于是$p \in \mathcal{W}_a \Longrightarrow d(p,\mathcal{C}) = d(p,\mathcal{B})$. 考察$\bar{o} \in \mathcal{W}_a \cap \mathcal{W}_b$. 于是$d(\bar{o},\mathcal{C}) = d(\bar{o},\mathcal{B})$ 和 $d(\bar{o},\mathcal{A}) = d(\bar{o},\mathcal{C})$. 由此得到: $\bar{o} \in \mathcal{W}_c$或者$\bar{o} \in \overline{\mathcal{W}}_c =$过$c$的外角平分线. 这是定向直线$\mathcal{B}$和$\mathcal{A}$的角平分线. 我们愿意排除$\bar{o} \in \overline{\mathcal{W}}_c$.

现在注意: 正扇形 Sec $(\mathcal{C},-\mathcal{B})$和正扇形 Sec $(-\mathcal{A},\mathcal{C})$(见8.3.15.2)不相交于内点. 这是因为

$$\alpha(b-c) + \beta(c-a) + a = \gamma(b-c) + \delta(b-a) + b$$

及$\alpha,\beta,\gamma,\delta > 0$蕴含: 由$(b-c) = (b-a)-(c-a)$及$\{(b-a),(c-a)\}$的线性无关性, 可得出$\beta = -\gamma$. 因为$\mathcal{W}_b \subset$ Sec $(-\mathcal{A},\mathcal{C}) \cup$ Sec $(\mathcal{A},-\mathcal{C})$, 所以$\bar{o} \in$ Sec $(\mathcal{C},-\mathcal{B}) \cap$ Sec $(\mathcal{A},-\mathcal{C}) = abc$ 在7.1.14.2意义下的内部. 由此, $\bar{o} \in$ Sec $(\mathcal{B},-\mathcal{A})$, 于是$\bar{o} \in \mathcal{W}_c$. 因而得知, $\bar{o}$是内切圆的圆心. □

补充8.5.6 用$\bar{\mathcal{W}}_a, \bar{\mathcal{W}}_b, \bar{\mathcal{W}}_c$来记三角形$abc$的外角平分线. 即$\bar{\mathcal{W}}_a =$是$(\mathcal{B},\mathcal{C})$的角平分线, $\bar{\mathcal{W}}_b, \bar{\mathcal{W}}_c$有相应的定义.

于是$\mathcal{W}_a, \bar{\mathcal{W}}_b, \bar{\mathcal{W}}_c$是共点的. 这三条直线的公共交点$\bar{o}_a$是这个三角形$abc$的旁切圆的圆心. 它与边$\mathcal{A}$相切于点$\bar{p}_a \in A \subset \mathcal{A}$, 与边$B, C$分别相切于$\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$的外部点p_{ab}, p_{ac}.

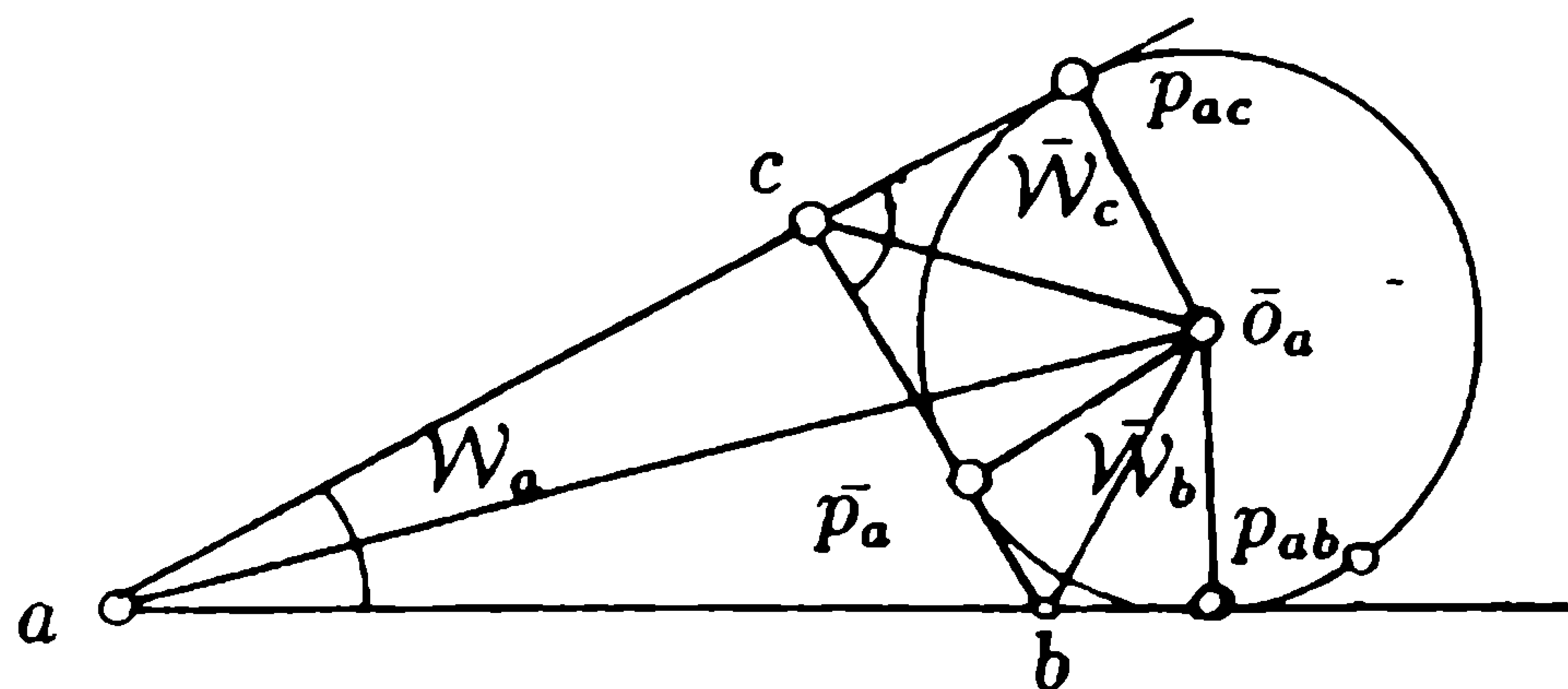
同样, 直线$\mathcal{W}_b, \bar{\mathcal{W}}_c, \bar{\mathcal{W}}_a$的公共交点$\bar{o}_b$是$abc$的旁切圆的圆心, 该圆与$\mathcal{B}$相切于点$\bar{p}_b \in B$, 与$\mathcal{C}$相切于点$p_{bc} \in \mathcal{C} \backslash C$, 与$\mathcal{A}$相切于点$p_{ba} \in \mathcal{A} \backslash A$.

最后，$\bar{o}_c \in \mathcal{W}_c \cap \bar{\mathcal{W}}_a \cap \bar{\mathcal{W}}_b$ 为旁切圆的圆心，该圆与 $\mathcal{C}$ 相切于点 $\bar{p}_c \in \mathcal{C}$，与 $\mathcal{A}$ 相切于点 $p_{ca} \in \mathcal{A}\backslash A$，与 $\mathcal{B}$ 相切于点 $p_{cb} \in \mathcal{B}\backslash B$.

$$d(a,p_b) = d(a,p_c) = \frac{-|A|+|B|+|C|}{2} = d(c,\bar{p}_b) = d(b,\bar{p}_c).$$

$$d(b,p_c) = d(b,p_a) = \frac{|A|-|B|+|C|}{2} = d(a,\bar{p}_c) = d(c,\bar{p}_a).$$

$$d(c,p_a) = d(c,p_b) = \frac{|A|+|B|-|C|}{2} = d(b,\bar{p}_a) = d(a,\bar{p}_b).$$



证明: $\bar{o}_a \in \mathcal{W}_a \cap \bar{\mathcal{W}}_b$ 蕴含 $d(\bar{o}_a,\mathcal{B}) = d(\bar{o}_a,\mathcal{C}) = d(\bar{o}_a,\mathcal{A})$ 及 $\bar{o}_a \in \text{Sec}\ (\mathcal{C},-\mathcal{B}) \cap \text{Sec}\ (\mathcal{A},\mathcal{C})$，这是因为 $\bar{\mathcal{W}}_b \subset \text{Sec}\ (\mathcal{A},\mathcal{C}) \cup \text{Sec}\ (-\mathcal{A},-\mathcal{C})$. 于是 $\bar{o}_a \in \mathcal{W}_c \subset \text{Sec}\ (\mathcal{A},-\mathcal{B}) \cup \text{Sec}\ (\mathcal{B},-\mathcal{A})$ 被排除，即有 $\bar{o}_a \in \bar{\mathcal{W}}_c$. 左边的等式得自

$$d(a,p_b) = d(a,p_c); \quad d(b,p_c) = d(b,p_a); \quad d(c,p_a) = d(c,p_b)$$

及

$$d(b,p_a) + d(c,p_a) = |A|;$$

$$d(c,p_b) + d(a,p_b) = |B|;$$

$$d(a,p_c) + d(b,p_c) = |C|.$$

右边的等式得自

$$|C| + d(a,\bar{p}_b) = |A| + d(c,\bar{p}_b);$$

$$|A| + d(b, \bar{p}_c) = |B| + d(a, \bar{p}_c);$$

$$|B| + d(c, \bar{p}_a) = |C| + d(b, \bar{p}_a);$$

及

$$d(b, \bar{p}_a) + d(\bar{p}_a, c) = |A|;$$

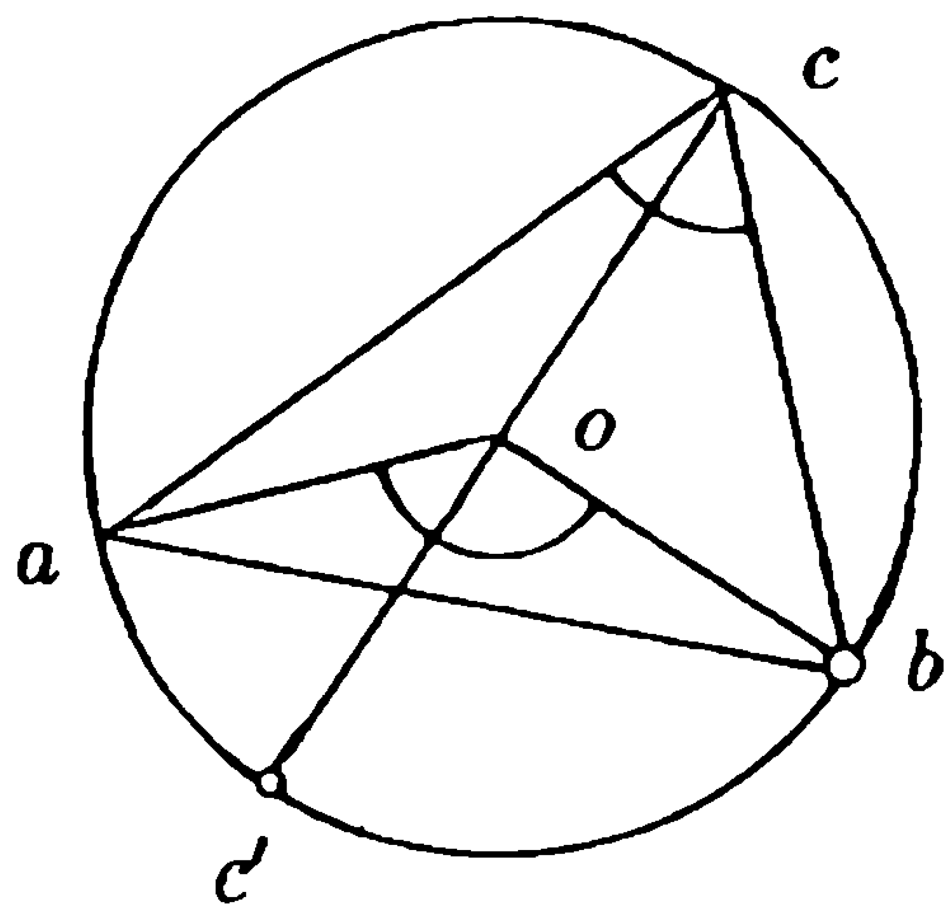
$$d(c, \bar{p}_b) + d(\bar{p}_b, a) = |B|;$$

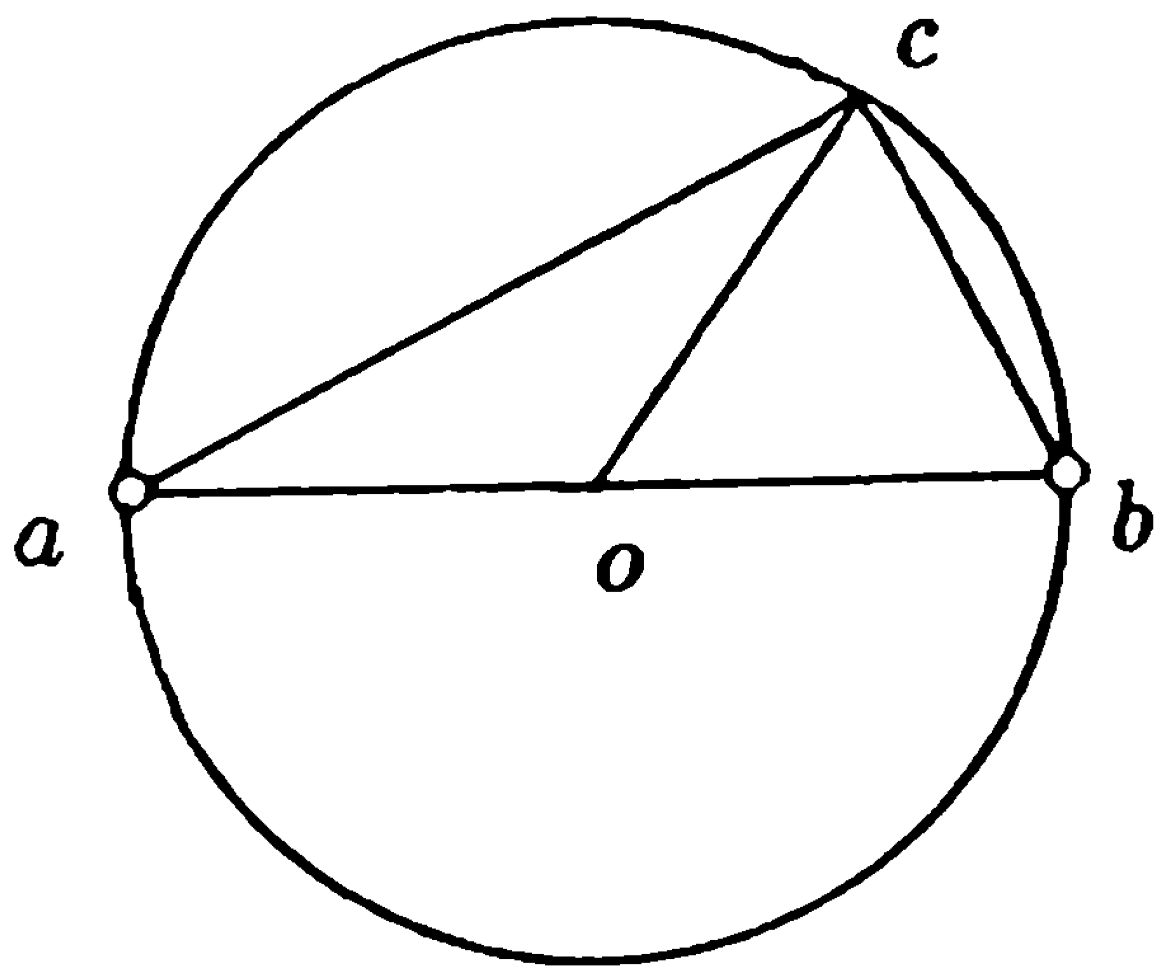
$$d(a, \bar{p}_c) + d(\bar{p}_c, b) = |C|.$$

□

引理8.5.7 考察定向欧氏平面$\mathcal{E}u$中的一个圆$S_\rho(o)$, 及$S_\rho(o)$上的两个不同的点a和b. 令$\overrightarrow{\angle}(a-o, b-o) = 2\gamma$. 于是对一个三角形$abc$而言, 三角形的边$\mathcal{B}$和$\mathcal{A}$的定向角$\overrightarrow{\angle}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$等于$\gamma$的充要条件是$c \in S_\rho(o)$.

特别地, 当a和b是对径点时, 则$\dfrac{a+b}{2} = o, \gamma = \dfrac{\pi}{2}$, 于是三角形$abc$在$c$处的角度为$\gamma = \dfrac{\pi}{2}$的充要条件是$c \in S_\rho(o)\backslash\{a, b\}$ (Thales定理).





证明: 如$c = o$, 则$\overrightarrow{\angle}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \neq \gamma$. 现设$c \neq o$. 令$(o-c)+o = c'$, 于是$o = \dfrac{c+c'}{2}$. 如果我们证明了$c \in S_\rho(o)$的充要条件为

$$\overrightarrow{\angle}(a-o, c'-o) = 2\overrightarrow{\angle}(a-c, c'-o)$$

和

$$\vec{\angle}(c'-o,b-o)=2\vec{\angle}(c'-o,b-c),$$

则结论就得证了．为证此，首先我们注意，直线 $\mathcal{G}_{oc}$ 总不会与 $\mathcal{G}_{oa}$ 和 $\mathcal{G}_{ab}$ 相重合．于是设 $\mathcal{G}_{oa}\neq\mathcal{G}_{oc}$．我们按下法将这些直线予以定向：其定向可使 $(a-o),(c-o),(b-o)$ 成为一个正的基．考察角平分线 $\mathcal{W}=\mathcal{W}(\mathcal{G}_{oa},\mathcal{G}_{oc})$．于是 $c\in S_\rho(o)$ 等价于关于 $\mathcal{W}$ 的镜射将点 a 和 c 互换，且将 $\mathcal{G}_{ac}$ 映至其自身．由于8.3.11，这又等价于

$$\vec{\angle}(a-o,a-c)=\vec{\angle}(a-c,o-c),\text{即等价于}o-c=c'-o,$$

$$\begin{aligned}\vec{\angle}(a-o,c'-o)&=\vec{\angle}(a-o,a-c)+\vec{\angle}(a-c,c'-o)\\&=2\vec{\angle}(a-c,c'-o).\end{aligned}$$

□

我们还注意到关于正弦定理的下列的补充．

命题8.5.8 设 abc 是一个三角形．于是

$$|A|:\sin\alpha=|B|:\sin\beta=|C|:\sin\gamma=2\rho,$$

这里 ρ 是包含角点 a,b,c 的外接圆 $S_\rho(o)$ 的半径．

证明：由于 8.5.3.4，只需证明最后一个等式．设 o 是 abc 的外接圆的圆心，见 8.5.5.3． 如果在 abc 的点 c 处的角为 γ，则由 8.5.7，在三角形 abo 中 o 处的角度等于 2γ 或 $2\pi-2\gamma$．设 $c^*=\dfrac{a+b}{2}$ 是边 C 的中点．三角形 ac^*o 在 c^* 处有角度 $\dfrac{\pi}{2}$，在 o 处有角度 γ 或 $\pi-\gamma$，在 ac^*o 中， c^* 的对边长度为 ρ，o 的对边长度为 $\dfrac{|C|}{2}$，由 8.5.3.4 及 $\sin\gamma=\sin(\pi-\gamma)$，可得出：

$$\frac{|C|}{2}:\sin\gamma=\rho:\sin\frac{\pi}{2}=\rho.$$

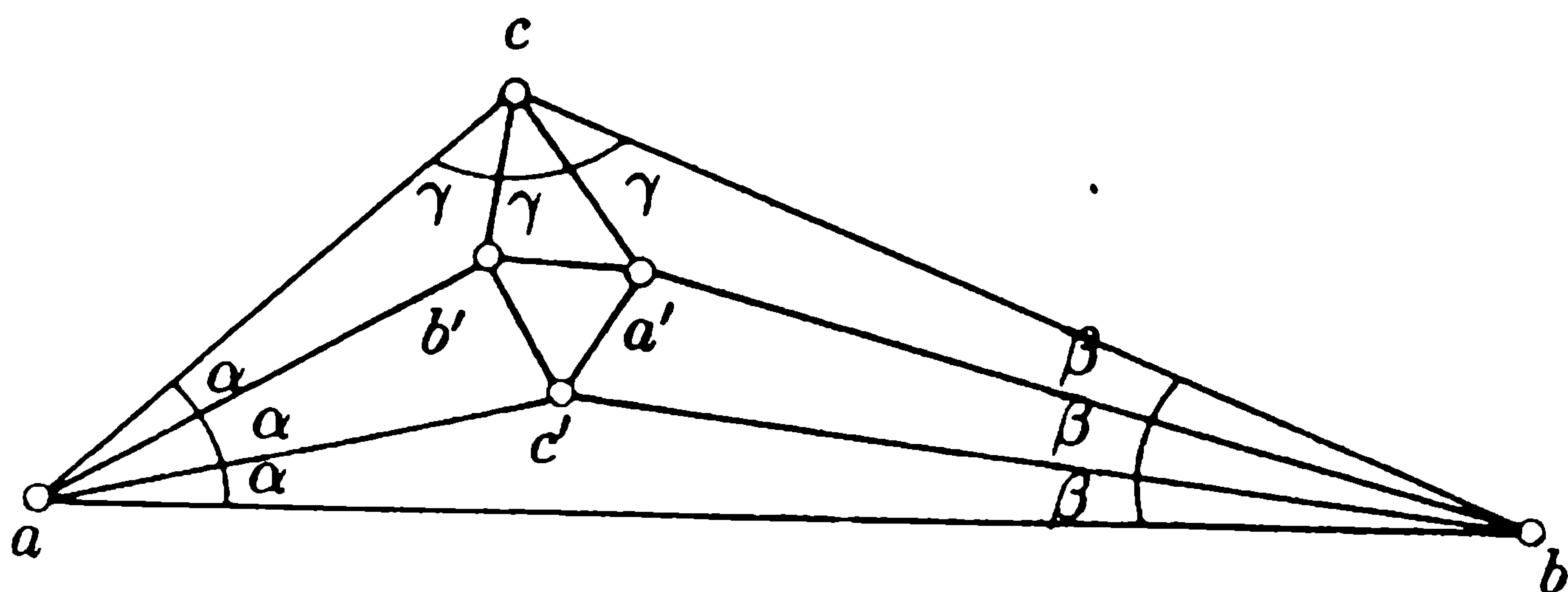
□

我们用Morley定理来结束本节的讨论. 它是一个如在三角学中令人惊异的结果那样的稀奇古怪的例子, 看上去似乎完全是与世隔绝的.

定理8.5.9 设abc是一个三角形, 这个三角形在点a,b,c的角度以例外的方式记为$3\alpha,3\beta,3\gamma$.

用$\mathcal{S}_{ab},\mathcal{S}_{ac}$来记从$a$发出的、在三角形$abc$内部的两条射线, 它们分别与边$\mathcal{B}$和边$\mathcal{C}$的夹角为$\alpha$. 换句话说, $\mathcal{S}_{ab}$和$\mathcal{S}_{ac}$在a点将三角形abc的角度3α三等分了.

类似地可定义$\mathcal{S}_{bc}$和$\mathcal{S}_{ba}$为从b出发的、在三角形abc内部的射线, 它们分别与边$\mathcal{C}$和边$\mathcal{A}$的夹角为β, 于是剩下部分的角度也为β.



最后可以类似地定义在点c处的角三等分线, 于是$\mathcal{S}_{ac},\mathcal{S}_{bc}$交于一点$c'$, $\mathcal{S}_{ba},\mathcal{S}_{ca}$交于一点$a'$, $\mathcal{S}_{ab},\mathcal{S}_{cb}$交于一点$b'$. 结论: 三角形$a'b'c'$是等边三角形, 即

$$d(a',b')=d(b',c')=d(c',a').$$

证明: 利用$\rho=abc$的外接圆半径, 对abc'的正弦定理以及8.5.8(注意, abc'在c'处的角度等于$\pi-\alpha-\beta$), 可以得出:

$$d(a,c')=|C|\sin\beta:\sin(\alpha+\beta)\ \text{和}\ |C|=2\rho\sin 3\gamma.$$

因为， $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{3}$, 我们发现：

$$d(a,c')=2\rho\sin\beta\sin 3\gamma:\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma).$$

利用加法定理8.3.4, 可以得出：

$$\sin 3\gamma=(3-4\sin^2\gamma)\sin\gamma,$$

且因为 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ：

$$\begin{aligned}\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)&=\frac{1}{4}(3\cos^3\gamma-\sin^2\gamma)\\&=\frac{1}{4}\sin 3\gamma:\sin\gamma.\end{aligned}$$

于是

$$d(a,c')=8\rho\sin\gamma\sin\beta\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma).$$

类似地，我们发现：

$$d(a,b')=8\rho\sin\beta\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{3}+\beta).$$

于是具有角度为 α,γ',β' 的三角形 $ac'b'$ 的正弦定理为

$$\begin{aligned}d(b',c'):\sin\alpha&=8\rho\sin\gamma\sin\beta\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma):\sin\beta'\\&=8\rho\sin\beta\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{3}+\beta):\sin\gamma'.\end{aligned}$$

因为由

$$(\frac{\pi}{3}+\gamma)+(\frac{\pi}{3}+\beta)+\alpha=\beta'+\gamma'+\alpha=\pi$$

可得出

$$\sin\beta':\sin(\alpha+\beta')=\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma):\sin(\alpha+\frac{\pi}{3}+\gamma),$$

于是 $\beta' = \dfrac{\pi}{3} + \gamma$. 由此得

$$d(b', c') = 8\rho \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

此式关于角度 α, β, γ 是对称的. 于是 $d(c', a')$ 和 $d(a', b')$ 也可如此地表出. □

8.6 圆锥曲线

在本节中, 我们要讨论欧氏平面中的椭圆、双曲线和抛物线. 自古以来, 这些曲线也被称为圆锥曲线. 然后我们讨论这些曲线的性质及几何特征, 也考察共焦圆锥曲线族, 最后, 我们运用所谓Dandelin球面来给出这些名称的一个缘由.

于是我们先以稍微变动的写法去注视在8.2.6中已经知道的关于椭圆、双曲线和抛物线的标准形式, 且同时导入一些缩写.

定义8.6.1 考察具有坐标 (x, y) 的欧氏平面 $\mathbf{R}^2$.

1. 一个处于标准形式下的椭圆 E 是用

$$E = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}; \quad 0 < b \le a$$

来给出的. 称 a 和 b 为主轴 (的长度). 称 $s = (a, 0)$ 和 $s' = (-a, 0)$ 为主顶点, 称 $t = (0, b)$ 和 $t' = (0, -b)$ 为次顶点.

令 $a^2 - b^2 = c^2$. 称 $f = (c, 0)$ 和 $f' = (-c, 0)$ 为 E 的焦点, $\dfrac{c}{a} = \varepsilon < 1$ 为 E 的离心率, $\dfrac{b^2}{a} = p$ 为 E 的参数.

2. 标准形式下的双曲线 H 是用

$$H = \{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}; \quad a > 0, b > 0$$

来给出的. 称 a 和 b 为 H 的轴的长度, $s = (a, 0)$ 和 $s' = (-a, 0)$ 为 H 的顶点.

令$a^2+b^2=c^2$. 称点$f=(c,0)$和$f'=(-c,0)$为H的焦点. 称$\frac{c}{a}=\varepsilon>1$为$H$的离心率, 称$\frac{b^2}{a}=p$为$H$的参数.

称直线$\{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\}$为$H$的渐近线.

3. 标准形式下的抛物线P是用

$$P=\{y^2=2px\};\quad p>0$$

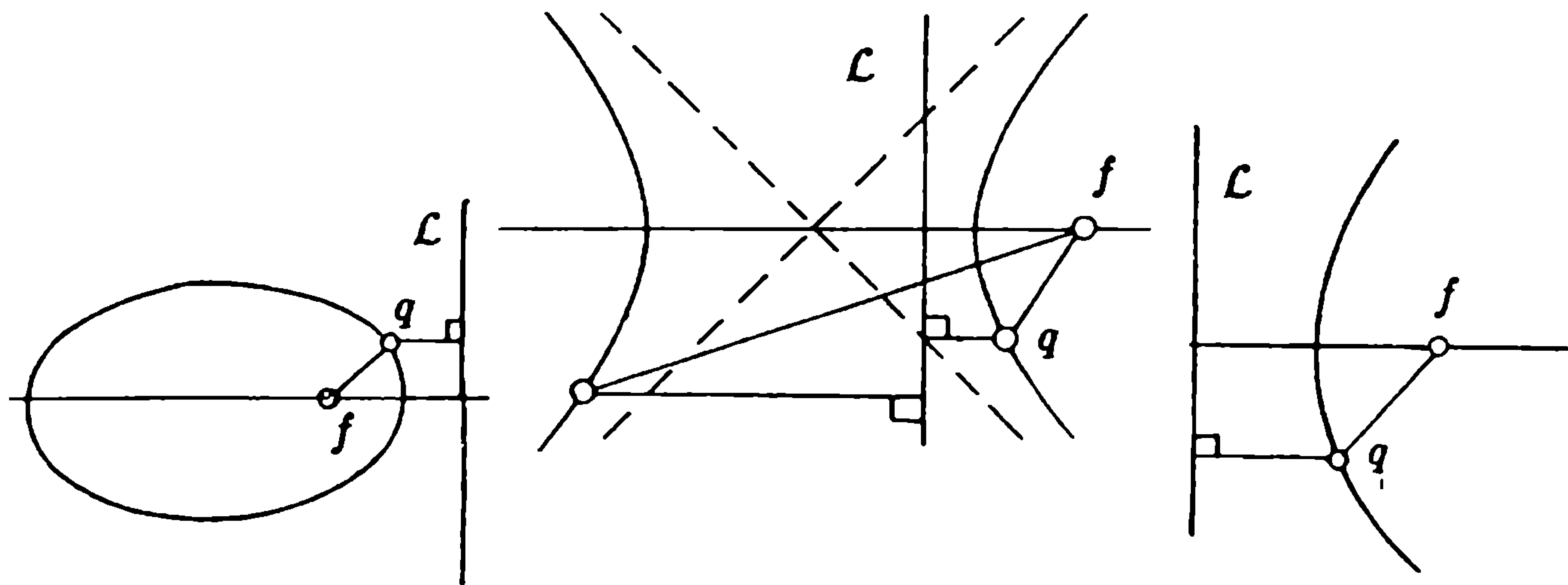
来给出的. 称$s=(0,0)$为顶点, $f=(0,\frac{p}{2})$为P的焦点, p为P的参数.

我们先来讨论非圆的圆锥曲线的第一个几何特征.

定理8.6.2 考察在欧氏平面$\mathcal{E}u$中的一点f, 称为焦点, 及f外的一条直线$\mathcal{L}$, 称为准线. 选$\varepsilon>0$, 并考察集合

$$\{d(q,f)=\varepsilon d(q,\mathcal{L})\}. \tag{8.3}$$

于是按照$\varepsilon<1,\varepsilon=1$或者$\varepsilon>1$, 它分别是一个非圆的椭圆, 一条抛物线或者是一条双曲线. 准确地说, 如果我们对$\varepsilon\neq1$, 令$\varepsilon d(f,\mathcal{L})=p$, 则$p$是由(8.3)所定义的椭圆或双曲线的参数, ε是它的离心率. 如果对$\varepsilon=1$, 我们令$\frac{d(f,\mathcal{L})}{2}=p$, 于是这是由(8.3)所定义的抛物线的参数.



证明: 设$\varepsilon \neq 1$. 在一个适当选取的欧氏参照系下, f和$\mathcal{L}$表为$(c,0)$和$\{x=\frac{c}{\varepsilon^2}\}$, 其中$c=\frac{\varepsilon^2 d(f,\mathcal{L})}{|1-\varepsilon^2|}$. 由此可将 (8.3) 写成形如

$$(x-c)^2+y^2=\varepsilon(x-\frac{c}{\varepsilon^2})^2,$$

即

$$\frac{x^2}{(\frac{c^2}{\varepsilon^2})}+\frac{y^2}{(\frac{(1-\varepsilon^2)c^2}{\varepsilon^2})}=1.$$

按照$\varepsilon<1$或$\varepsilon>1$, 这是一个在标准形式下的椭圆或者是一条双曲线.

对于椭圆来说, $a^2=\frac{c^2}{\varepsilon^2}, b^2=\frac{(1-\varepsilon^2)c^2}{\varepsilon^2}, a^2-b^2=c^2$, 于是离心率为$\varepsilon=\frac{c}{a}, p=\frac{b^2}{a}=\frac{(1-\varepsilon^2)c}{\varepsilon}=\varepsilon d(f,\mathcal{L})$.

对于双曲线, ε是离心率,

$$d(f,\mathcal{L})=\frac{c(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon^2}=\frac{c(c^2-a^2)}{c^2}=\frac{b^2}{c}=\frac{p}{\varepsilon}.$$

对$\varepsilon=1$, 设f和$\mathcal{L}$是用$(c,0)$和$\{x=-c\}$来表示的, 这里$c=\frac{d(f,\mathcal{L})}{2}$. 于是 (8.3) 意味着$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2$, 即$y^2=4cx$. □

补充8.6.3 对$\varepsilon\neq 1$, 即对不是圆的椭圆和双曲线, 存在着两个偶$\{f,\mathcal{L}\},\{f',\mathcal{L}'\}$, {焦点, 准线}, 使得这些曲线由此按8.6.2中的 (8.3) 式来表出.

证明: 这两条所谈及的曲线是在8.2.8的意义下的有心二次曲线. 中心 o与f不同, 且不位于$\mathcal{L}$之上. 于是, 关于o的镜射给出了第二个偶$\{f',\mathcal{L}'\}$. □

从8.6.2及8.6.3, 我们能对椭圆及双曲线导入一个更进一步的特征.

定理8.6.4 设 f, f' 是欧氏平面中的两点，它们之间的距离为 $d(f, f') = 2c > 0$.

对给定的 $a > c$，集合

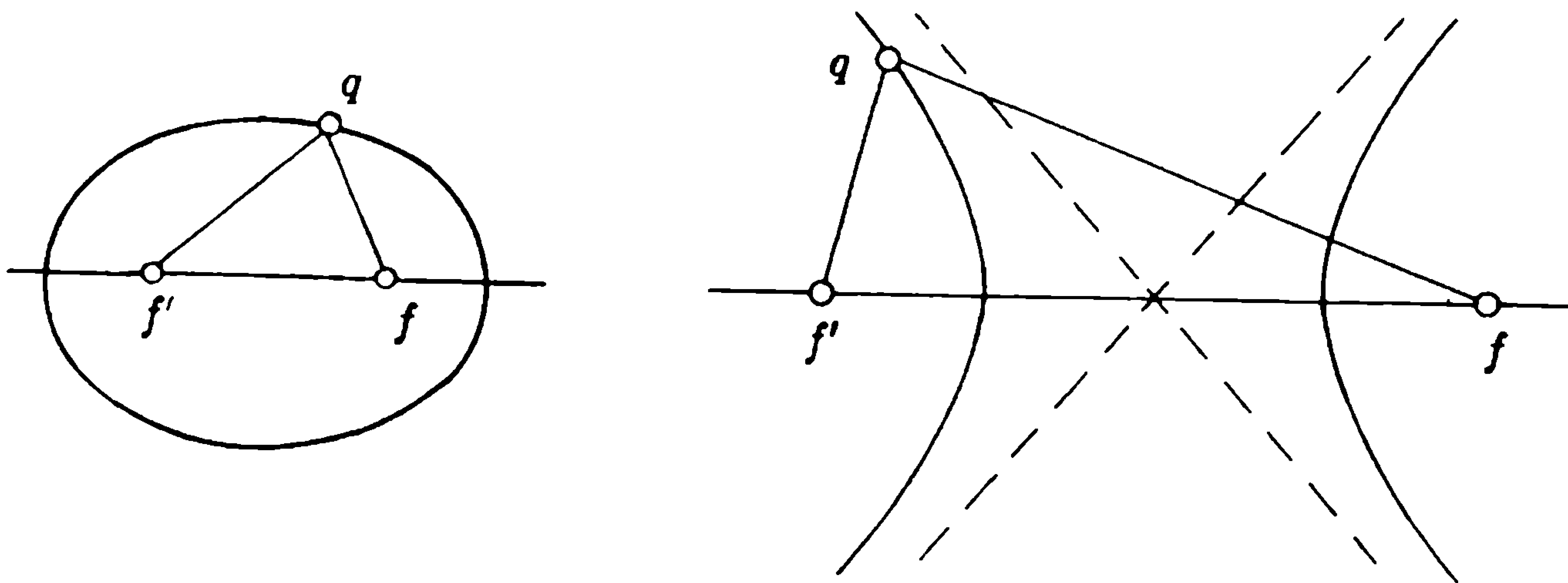
$$\{d(q, f) + d(q, f') = 2a\} \tag{8.4}$$

是一个（非圆的）椭圆，它的长半轴及短半轴分别为 a 和 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

2. 对给定的 $a, 0 < a < c$，集合

$$\{|d(q, f) - d(q', f')| = 2a\} \tag{8.5}$$

是轴为 a 及 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ 的双曲线. f 和 f' 是其两个焦点.



注:

1. 情形1对 $f = f'$ 也是有意义的，并给出了一个圆.

2. 上述特征也称为园艺家公式. 这是因为，譬如说，在椭圆的情形下，我们看到：如果我们在两点 f, f' 处连结一根长为 $2a > 2d(f, f')$ 的绳索，且用树桩以各种可能的方式来绷紧这条绳索，则树桩就描出了一个椭圆花坛的轮廓.

证明：对1.：按照8.6.2, 8.6.3, 考虑具有焦点 $\{f, f'\}$ 及相应准线 $\{\mathcal{L}, \mathcal{L}'\}$ 的椭圆 E. 于是对 $q \in E$，有

$$d(q, f) + d(q, f') = \varepsilon d(q, \mathcal{L}) + \varepsilon d(q, \mathcal{L}') = \varepsilon d(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = 2a.$$

这里，我们利用了：当$\varepsilon < 1$时，q位于$\mathcal{L}$和$\mathcal{L}'$之间，且$d(\mathcal{L},\mathcal{L}') = \frac{2c}{\varepsilon^2} = \frac{2a}{\varepsilon}$. 反过来，对具有坐标$(c,0),(-c,0)$的$f,f'$，考察条件(8.4)的坐标表示：

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

因为

$$((x-c)^2+y^2)-((x+c)^2+y^2)=-4cx,$$

于是得到

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\frac{2cx}{a}.$$

第一个和第三个等式之差给出了

$$x^2+y^2+c^2=a^2+\frac{c^2x^2}{a^2},$$

于是就得出了半轴为a及$b=\sqrt{a^2-c^2}$的椭圆方程.

对2.：$d(\mathcal{L},\mathcal{L}') = \frac{2c}{\varepsilon^2}$，且因为$\varepsilon > 1, \mathcal{L}$和$\mathcal{L}'$位于由8.6.2, 8.6.3所定义的双曲线$H$上的点$q$的同一侧. 于是

$$|d(q,f)-d(q,f')| = \varepsilon|d(q,\mathcal{L})-d(q,\mathcal{L}')| = \varepsilon d(\mathcal{L},\mathcal{L}') = 2a.$$

反之，证明与1.中相仿. □

定义8.6.5 在欧氏平面$\mathcal{E}u$中选取一个原点o及一个单位向量$d\in V$. 设$\{d,e\}$为一个正的ON-基的扩张.

所谓基于(o,d)的极坐标是指映射

$$q\in\mathcal{E}u\backslash\{0\}\longmapsto(r(q),\phi(q))\in(0,\infty)\times[0,2\pi),$$

这里$r(q)=|q-0|$; $\phi(q)=\overrightarrow{\angle}(d,q-o)$.

于是如果 (x,y) 是关于 $(o,\{d,e\})$ 的坐标，则我们有

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\phi=\overrightarrow{\angle}((1,0),(x,y))\text{及}x=r\cos\phi;y=r\sin\phi.$$

注：如果我们将 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 恒同于 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbf{C}$，则对 $z\neq 0,r(z)$ 和 $\phi(z)$ 可用 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 来给出.

命题8.6.6 1. 设 E 是离心率 $\varepsilon>0$，参数为 p 的椭圆，f,f' 为其焦点，s,s' 为其顶点，它们满足 $|s'-f'|\geq|s-f|$. 令 $\dfrac{s-f}{|s-f|}=d$. 则在基于 (f,d) 的极坐标 (r,ϕ) 下，E 可表为

$$\{r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\phi}\},$$

其中 ϕ 可以任意选取. 相应地，在基于 (f',d) 的极坐标 (r',ϕ') 下，E 可表为

$$\{r'=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\phi'}\},$$

其中 ϕ' 可任意选取.

2. 设 H 是参数为 p，离心率为 ε 的双曲线，f,f' 是它的焦点，s,s' 是它的顶点，且满足 $|f-s|<|f'-s|$. 令 $\dfrac{f-s}{|f-s|}=d$. 于是双曲线的两支在基于 (f,d) 的极坐标 (r,ϕ) 下可分别表为

$$\{r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\phi}\}\text{ 及 }\{r=\frac{p}{-1-\varepsilon\cos\phi}\}$$

其中 ϕ 分别满足 $1>\dfrac{1}{\varepsilon}>\cos\phi$ 及 $-\cos\phi>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 这两支在基于 (f',d) 的极坐标 (r',ϕ') 下可表为

$$\{r=\frac{p}{-1+\varepsilon\cos\phi'}\}\text{ 及 }\{r'=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\phi'}\}$$

其中 ϕ' 分别满足 $\cos\phi'>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 及 $\cos\phi'>-\dfrac{1}{\varepsilon}$.

值 $\cos\phi = \pm\frac{1}{\varepsilon}$ 相应于渐近线的方向.

3. 设 P 是以 f 为焦点, s 为顶点的抛物线. 令 $\frac{f-s}{|f-s|} = d$. 于是 P 在基于 (f,d) 的极坐标 (r,ϕ) 下的表示为

$$\{r = \frac{p}{1-\cos\phi}\},$$

其中 $1 > \cos\phi$.

证明: 对 1.: 对 $q \in E$, 准线 $\mathcal{L}$ 及焦点 f, 我们从 8.6.2 得到

$$d(q,\mathcal{L}) = \frac{d(q,f)}{\varepsilon} = \frac{r(q)}{\varepsilon}.$$

由 $d(q,\mathcal{L}) = d(f,\mathcal{L}) - r(q)\cos\phi(q)$ 和 $d(f,\mathcal{L}) = \frac{p}{\varepsilon}$, 可得 $\frac{r}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon} - r\cos\phi$. 第二个等式同样得自 $d(f',\mathcal{L}') = \frac{p}{\varepsilon}$ 及 $d(q,\mathcal{L}') = d(f',\mathcal{L}') + r(q)\cos\phi(q)$.

对 2.: 又从 8.6.2 可得出, 对 $q \in H$, 有 $r(q) = \varepsilon d(q,\mathcal{L})$. 于是对靠近 f 的一支上的 q, 有 $d(q,\mathcal{L}) = d(f,\mathcal{L}) + r(q)\cos\phi(q)$, 而对另一支上的 q, 有 $d(q,\mathcal{L}) = -d(f,\mathcal{L}) - r(q)\cos\phi(q)$. 第一个公式得自于 $d(f,\mathcal{L}) = \frac{p}{\varepsilon}$, 第二个公式可类似地得出.

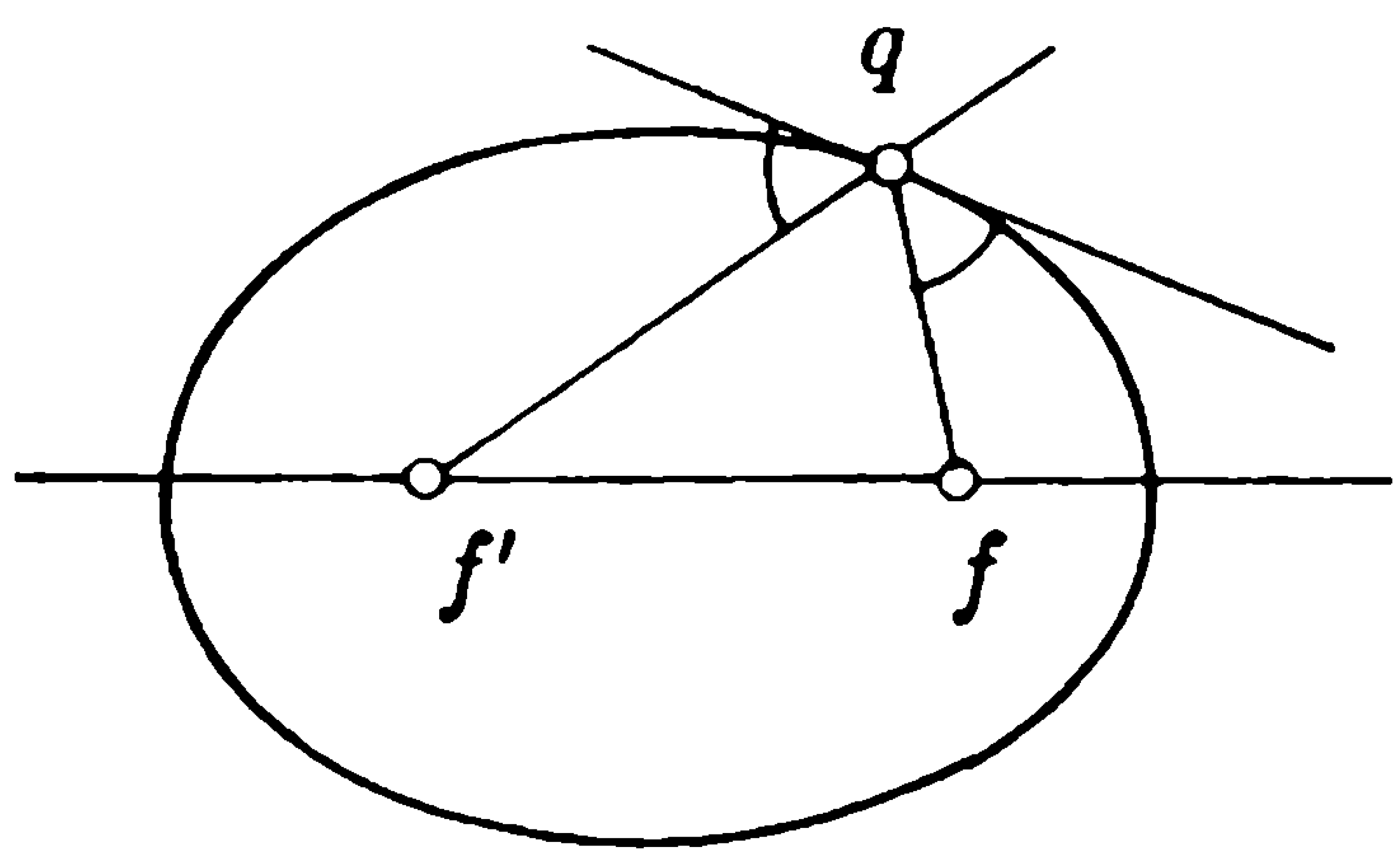
对 3.: 从 8.6.2, 对 $q \in P$, 我们有 $r(q) = d(q,\mathcal{L}) = d(f,\mathcal{L}) + r(q)\cos\phi(q)$. □

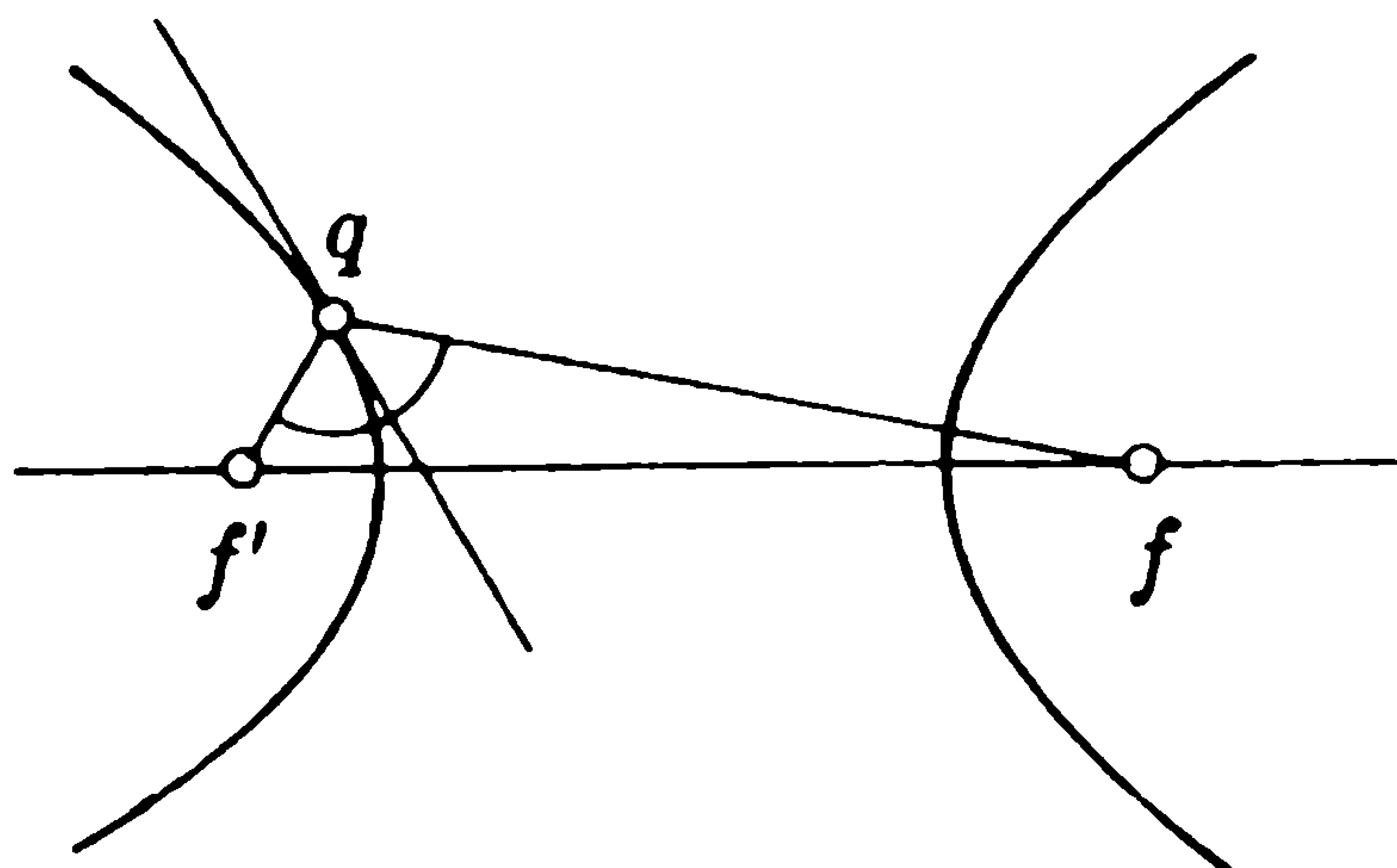
注解8.6.7 考察用 $\{r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\phi}\}$ 所描述的集合. 设极坐标的原点为焦点 f, 直线 $\{r\cos\phi = -\frac{p}{\varepsilon}\}$ 为准线 $\mathcal{L}$. 于是对 $\varepsilon < 1$, 这是一个椭圆, 且以 f 为 "左" 焦点. 对 $\varepsilon = 1$, 这是一条抛物线, 对 $\varepsilon > 1$, 这是双曲线靠近 f 的一支. 人们发现, 当变动 ε 时, 椭圆会变至一条抛物线, 及双曲线的一支, 见 9.5.19.

在下面的定理中, 我们来考察圆锥曲线的切线.

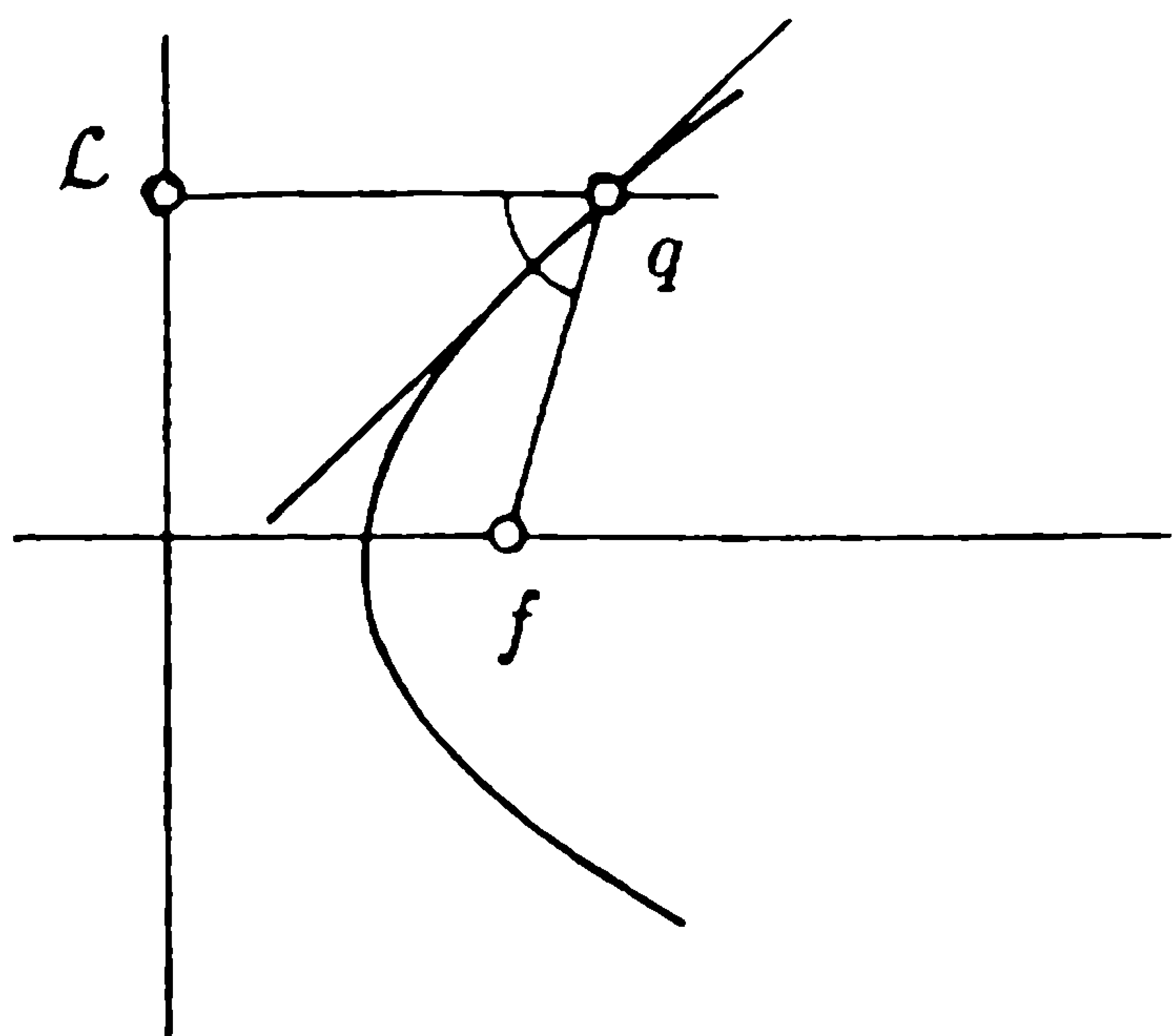
定理8.6.8 1. 设 f, f' 是一个不是圆的椭圆 E 的焦点. 对每点 $q \in E$, 从 q 到 f 及从 f' 到 q 的两条定向直线的角平分线

是E在q处的切线T_qE，即$q\in T_qE$是直线T_qE与E的唯一的公共点.





2. 设f,f'是双曲线H的焦点. 对每点$q\in H$，从q到f及从q到f'的角平分线是H在q处的切线T_qH. 即$q\in T_qH$是直线T_qH与H的唯一的公共点.



3. 设f是抛物线P的焦点，$\mathcal{L}$是其准线，对每点$q\in P$，考虑通过q及q到$\mathcal{L}$上的垂足点的定向直线，以及从q到f的定向直线. 于是其角平分线是P在q处的切线T_qP. 即q是直线T_qP与P的唯一的公共点.

证明: 对1.: 我们已假设E不是圆，所以，$f\neq f'$. 考察定理中所述的角平分线，且将它记为T_qE. 显然$q\in T_qE$. 我们来证明: $E\cap T_qE=\{q\}$.

现设f''是f在关于T_qE的镜射下的象. 于是可得

$$d(f',f'')=d(f',q)+d(q,f)=2a=\text{在8.6.4中定义}E\text{的常数},$$

且f',q,f''位于一直线之上. 如果$r\in T_qE\cap E$，则

$$2a=d(r,f)+d(r,f')$$

$= d(r,f'') + d(r,f')$　(因为f''是f关于T_qE的镜射点)

$\geq d(f'',f')$　(三角不等式)

$= 2a.$

于是 $r = q$.

对2.: 再设 f'' 是 f 在关于 T_qH 的镜射下的象. f', q, f'' 位于一条直线上, 且 $d(f',f'') = 2a =$ 在 8.6.4 中定义 H 的常数. 对 $r \in T_qH \cap H$, 于是我们有

$$\begin{aligned} 2a &= |d(r,f) - d(r,f')| \\ &= |d(r,f'') - d(r,f')| \leq d(f',f'') = 2a, \end{aligned}$$

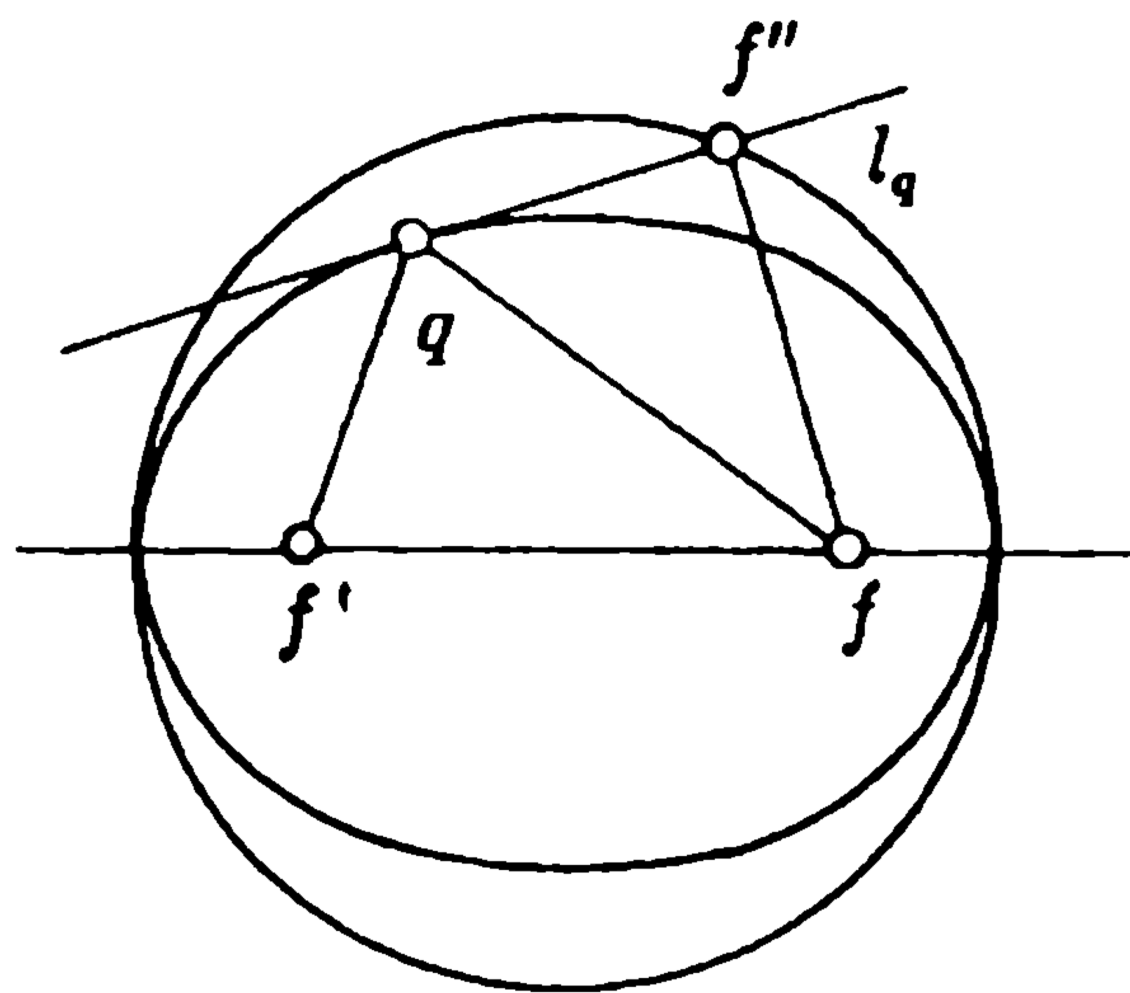
即 $r = q$.

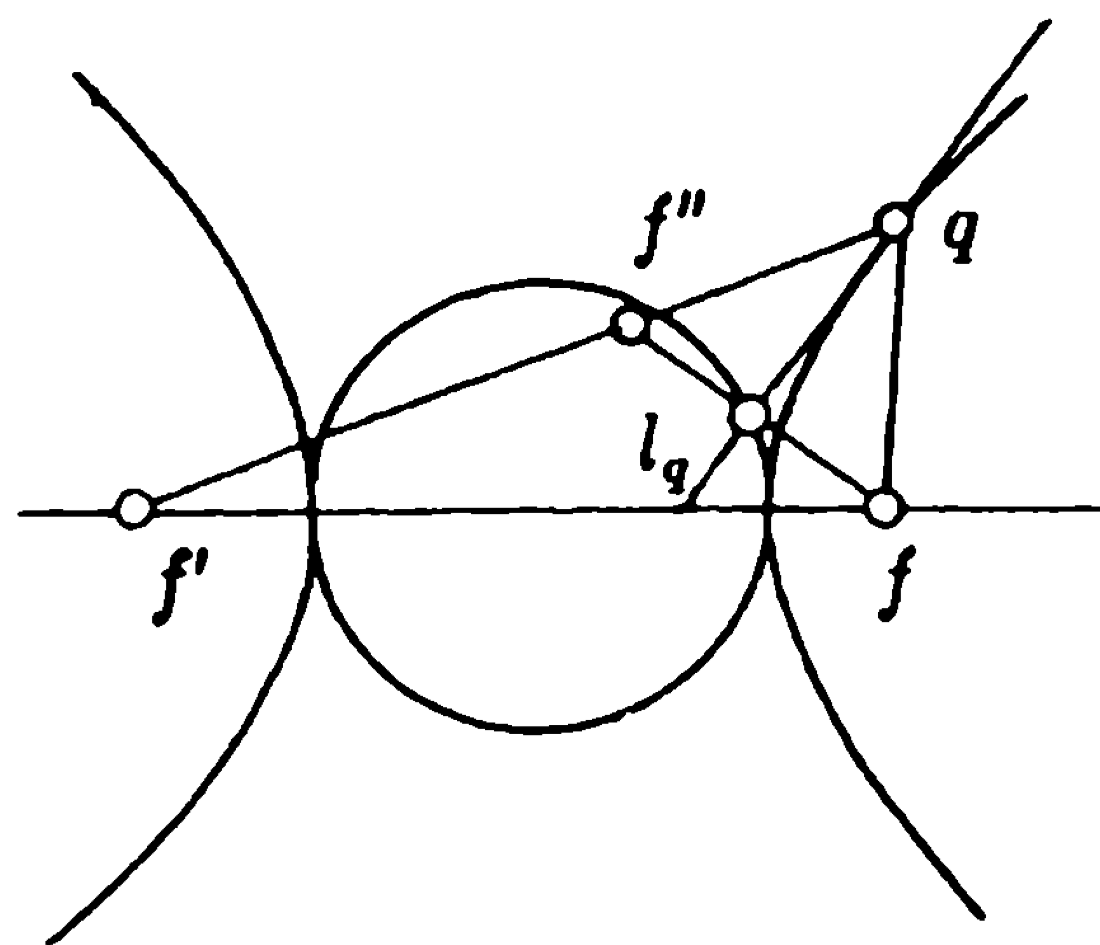
对3.: 设 f'' 是 f 在关于 T_qP 的镜射下的象. 则 f'' 是 q 到 P 的准线 $\mathcal{L}$ 上的垂线的垂足点. $r \in T_qP \cap P$ 意味着

$$d(r,\mathcal{L}) = d(r,f) = d(r,f'') = d(q,f'') = d(q,\mathcal{L}),$$

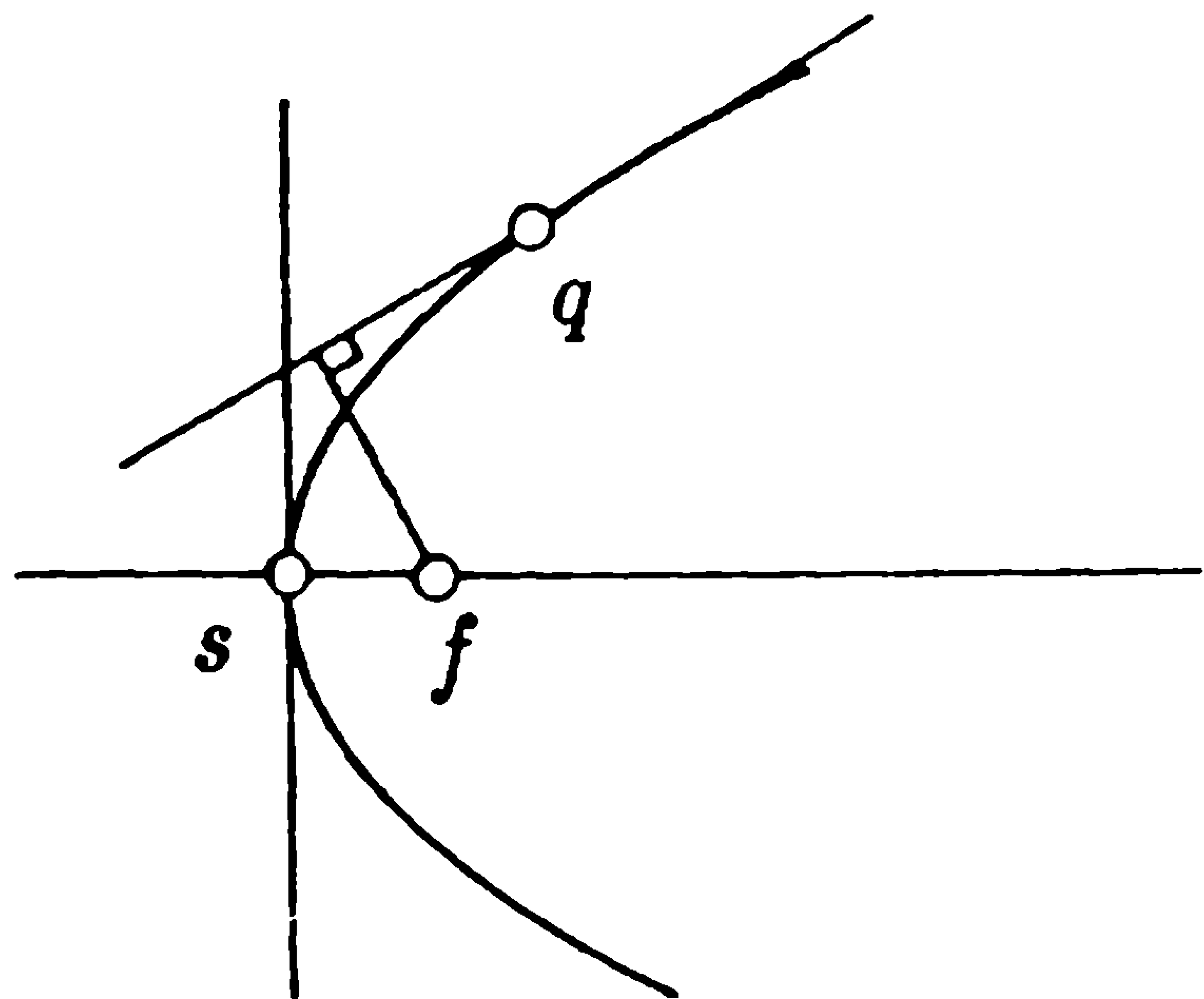
于是 $r = q$. □

推论8.6.9　1. 设 E 是一个椭圆, f 是其焦点, $2a = d(s,s')$ 是 8.6.4 中的常数. 于是 f 在 E 的切线 T_qE 上的垂足点 $l_f(q)$ 的集合是一个以 E 的中心为心, 半径为 a 的圆.





2. 设H是一条双曲线，f是H的焦点，$2a=d(s,s')$是8.6.4 中的常数. 于是f到H的切线T_qH上的垂足点$l_f(q)$的集合构成了一个以H的中心为心，半径为a的圆，但要除去这个圆与渐近线的交点.



3. 设P是一条抛物线，f是其焦点，$\mathcal{L}$是其准线. 于是f到P的切线T_qP上的垂足点l_q的集合构成了在P的顶点s处的切线，它与$\mathcal{L}$是平行的.

证明：对 1.：如在 8.6.8.1 的证明中那样，对$q\in E$，现考察三角形$ff'f''$.

$\dfrac{f+f'}{2}$是E的中心o，$\dfrac{f+f''}{2}$是垂足点$l_f(q)$. 于是按射线定理 7.3.12，有$d(o,l_f(q))=\dfrac{d(f',f'')}{2}=a$.

对 2.：证明与情形 1 相仿.

对 3.：利用8.6.8.3的证明中的记号，有$l_f(q)=\dfrac{f+f''}{2}$，其中$f''\in\mathcal{L}$. 现在注意，因为有$d(s,f)=d(s,\mathcal{L})$，所以P的顶点s是从f到f在$\mathcal{L}$上的垂足点的线段的中点. □

定义8.6.10 设f,f'是欧氏平面$\mathcal{E}u$中两个不同的点. 所谓以f,f'为焦点的共焦圆锥曲线系是指以f,f'为焦点的所有椭圆和双曲线的集合. 令$d(f,f')=2c>0$. 这个椭圆和双曲线可按下法予以参数化：

$$E_u=\{d(q,f)+d(q,f')=2\sqrt{c^2-u};0<-u\},$$
$$H_v=\{|d(q,f)-d(q,f')|=2\sqrt{c^2-v};0<v<c^2\}.$$

这个系统的主轴和次轴$\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$分别被定义为$\mathcal{X}=$通过f和f'的

直线，$\mathcal{Y}$ = 过此系统的所有圆锥曲线的公共中心 $o = \dfrac{f+f'}{2}$ 所作的与 $\mathcal{X}$ 相垂直的直线.

定理8.6.11 考察 $\mathcal{E}u$ 中具有 $d(f,f') = 2c > 0$ 的焦点 f, f' 的共焦圆锥曲线族 $\{E_u, H_v; (u,v) \in (-\infty, 0) \times (0, c^2)\}$. 于是对每点 $q \in \mathcal{E}u$, $q \notin \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, 在这个族中存在恰好一个椭圆 $E_{u(q)}$ 及恰好一条双曲线 $H_{v(q)}$ 通过这个 q 点. 这两条圆锥曲线的切线是彼此正交的.

如果我们用 (x,y) 来记 $\mathcal{E}u$ 的关于欧氏参照系 $(o, \{d, e\})$ 的坐标，其中 d 和 e 分别是 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的方向，则坐标轴外的一点 (x,y) 的值 $u(x,y), v(x,y)$ 可用

$$x(u,v)^2 = \frac{(c^2-u)(c^2-v)}{c^2};$$
$$y(u,v)^2 = -\frac{uv}{c^2}$$

来确定. 这表明：这四个不同的点 $(\pm x, \pm y)$ 确定了相同的 (u,v) 值.

用对应

$$q \in \mathcal{E}u \backslash (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \longmapsto (u(q), v(q)) \in (-\infty, 0) \times (0, c^2)$$

来定义所谓的椭圆坐标.

证明：对 $q \in \mathcal{E}u \setminus (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$，令 $d(q,f) + d(d,f') = 2\sqrt{c^2-u}$ 和 $|d(q,f) - d(q,f')| = 2\sqrt{c^2-v}$. 于是由 8.6.4, 椭圆 E_u 及双曲线 H_v 如在 8.6.10 中那样被定义. 由 8.6.8, 切线 T_qE_u 和 T_qH_v 是从 f 到 q 的直线 $\mathcal{G}_{fq}$ 及从 f' 到 q 的直线 $\mathcal{G}_{f'q}$ (带有适当的定向) 的角平分线. 这样的角平分线是相互正交的，这是因为如果 $\mathcal{G}_{fq}$ 及 $\mathcal{G}_{f'q}$ 的方向是单位向量 d, d', 则它们的方向可用 $d+d'$ 及 $d-d'$ 来生成.

$x(u,v)^2$ 和 $y(u,v)^2$ 的公式得自所定义的方程

$$E_u = \{\frac{x^2}{c^2 - u} + \frac{y^2}{-u} = 1\};$$
$$H_v = \{\frac{x^2}{c^2 - v} - \frac{y^2}{v} = 1\}.$$

□

作为下一定理的预备，我们来证明在一般欧氏空间中关于球面的一个结果.

引理8.6.12 设 $\mathcal{E}u$ 是一个 n 维的欧氏空间. 考察以 $o \in \mathcal{E}u$ 为心，半径为 $\rho > 0$ 的球面 $S_\rho(o) = \{d(p,o) = \rho\}$.

现如 $q \in \mathcal{E}u$ 至 o 的距离为 $d(q,o) > \rho$, 则考察超平面

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_q = \{r \in \mathcal{E}u; < r - q, o - q >= |o - q|^2 - \rho^2\}.$$

于是 $S_\rho(o) \cap \mathcal{H}$ 是这种点 r 的集合，即从 q 到 r 的直线 $\mathcal{G}_{qr}$ 是与球面 $S_\rho(o)$ 相切的，换言之， r 是直线 $\mathcal{G}_{qr}$ 与 $S_\rho(o)$ 的唯一公共点.

证明: 我们指出： $r \in S_\rho(o) \cap \mathcal{H}$ 是 o 在 $\mathcal{G}_{qr}$ 上的垂足. 换言之，有 $< r - o, r - q >= 0$. 对此，可写出

$$(r - q) = (r - o) + (o - q);$$
$$(r - o) = (r - q) + (q - o).$$

于是

$$\begin{aligned} < r - o, r - q > &=< r - o, (r - o) + (o - q) > \\ &= \rho^2 + < (r - q) + (q - o), o - q > \\ &= \rho^2 + |o - q|^2 - \rho^2 - |o - q|^2 = 0. \end{aligned}$$

反之，如果 $< r - o, r - q >= 0$ 及 $|r - o|^2 = \rho^2$, 则

$$< r - q, o - q > =< (r - o) + (o - q), o - q >$$

$$= |o-q|^2 + < r-o, (o-r)+(r-q) >$$
$$= |o-q|^2 - \rho^2.$$

□

我们来回忆圆锥面的概念:

定理8.6.13 设$\mathcal{E}u^3$是一个3维欧氏空间, $\mathcal{W}$是$\mathcal{E}u^3$中的一条直线, $o \in \mathcal{W}$. $\{p \in \mathcal{E}u^3; d(p, l_p) = d(o, l_p); l_p = $从$p$到$\mathcal{W}$上的垂线的垂足点$\}$给出了一个顶点为$o$, 张开角为$\frac{\pi}{2}$, 轴为$\mathcal{W}$的圆锥面$K$.

证明: 对$\mathcal{E}u^3$, 我们选取一个欧氏参照系$(o, \{e, d, f\})$, 这里f是$\mathcal{W}$的方向. 如果用(x, y, z)来表示由此所确定的坐标, 则上述K的方程式为:

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \quad x^2 + y^2 = z^2\}.$$

这是在8.2.6.2中的标准形式下圆锥面的方程. 因为$\beta = \gamma = 1$, 所以我们将它称为具有张开角为$\frac{\pi}{2}$的圆锥面. □

于是, 我们现在能说明将椭圆、抛物线和双曲线称为"圆锥曲线"的理由.

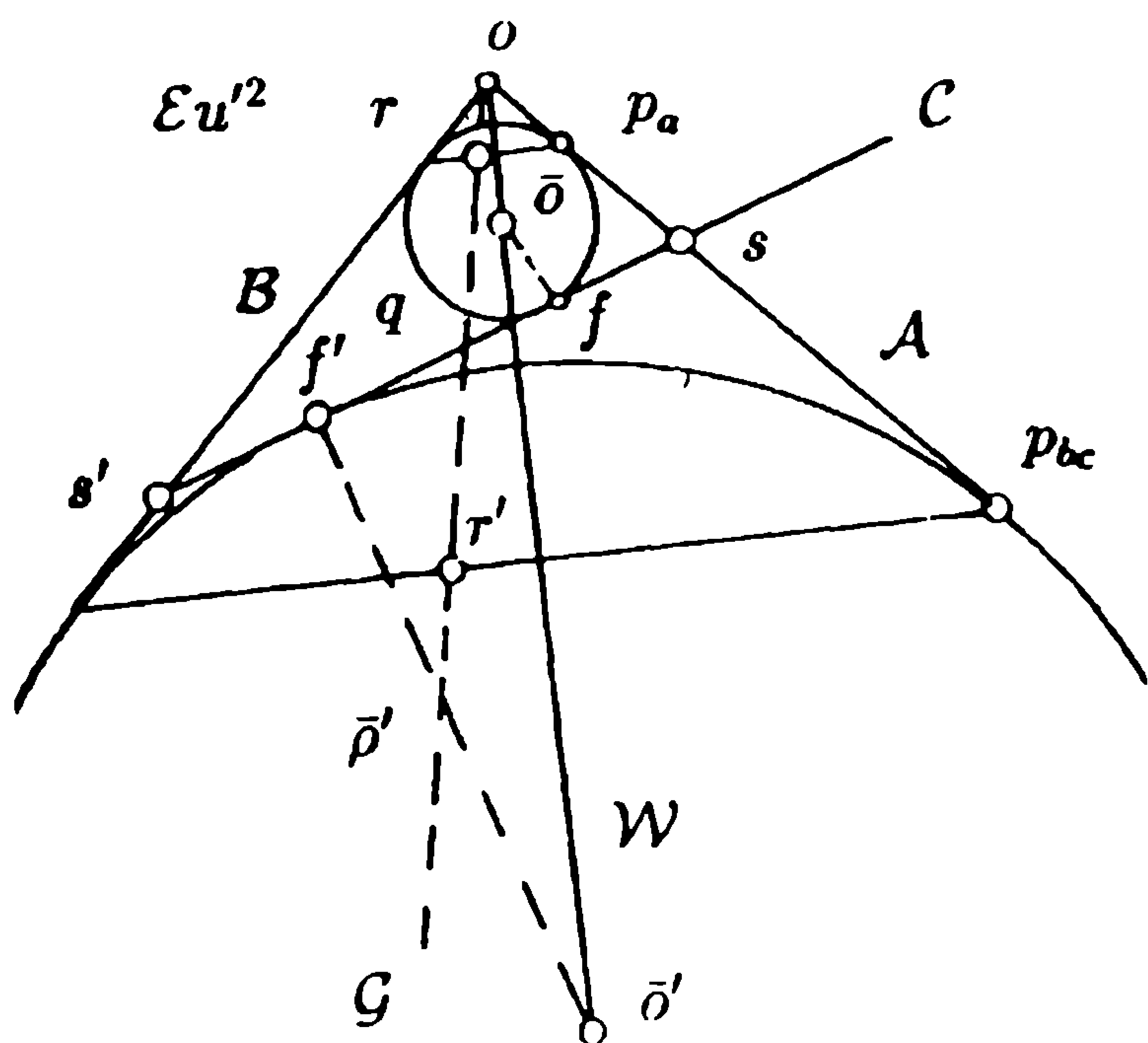
定理8.6.14 设K是欧氏空间$\mathcal{E}u^3$中的一个圆锥面, 其张开角为$\frac{\pi}{2}$, o为其顶点, $\mathcal{W}$是它的轴.

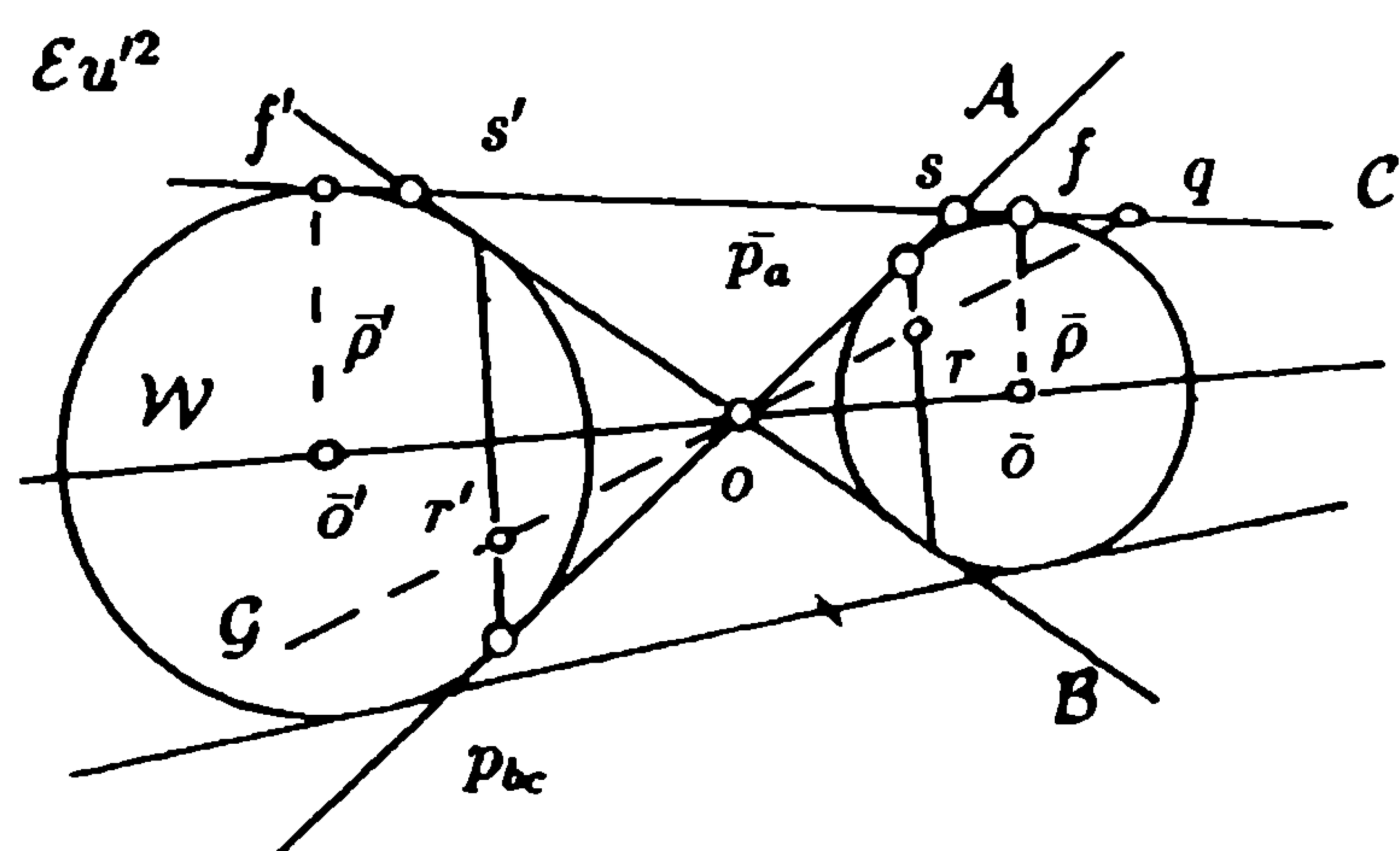
K与一个不含顶点o的平面$\mathcal{E}u^2$的交$K \cap \mathcal{E}u^2$, 按照由o到$\mathcal{E}u^2$上的垂线$\mathcal{L}$及轴$\mathcal{W}$所构成的角度$\angle(\mathcal{L}, \mathcal{W}) < \frac{\pi}{4}, = \frac{\pi}{4}$或$> \frac{\pi}{4}$, 分别为椭圆、抛物线或双曲线.

通过平面$\mathcal{E}u^2$的适当选取, 能以上述方式表出合同的椭圆、抛物线和双曲线的所有的类.

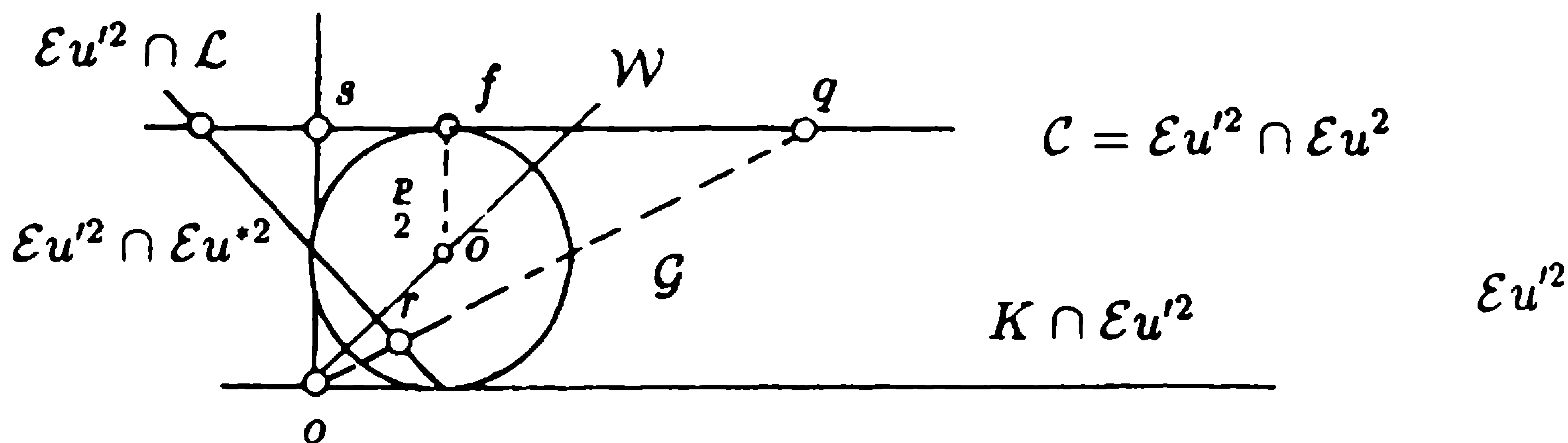
补充8.6.15 1. $K \cap \mathcal{E}u^2$是一个椭圆E. 设s', s是E的顶点, 且有$d(s', o) \geq d(s, o)$. 点集$\{s', s, o\}$生成了一个平面$\mathcal{E}u'^2$. 于是在$\mathcal{E}u'^2$中的三角形$s'so$在o处为直角. $s'so$的内切圆与从

s'到s的边$\mathcal{C}$相切于E的一个焦点f，而边$\mathcal{C}$的旁切圆与$\mathcal{C}$相切于另一个焦点f'. 设$\bar{o},\bar{o}'$分别是内切圆和旁切圆的圆心. 半径分别为$\bar{\rho}=d(\bar{o},\mathcal{C})$和$\bar{\rho}'=d(\bar{o}',\mathcal{C})$的所谓Dandelin球面$S^2_{\bar{\rho}}(\bar{o})$和$S^2_{\bar{\rho}'}(\bar{o}')$与$\mathcal{E}u^2$相切于焦点$f$和$f'$. 此外，这些球面与圆锥$K$相切于圆. K上每条过o的直线与这些圆交两点，它们之间具有固定的距离$d(s',s)$. o不位于这两个圆之间.





2. $K\cap\mathcal{E}u^2$是一条双曲线H. 设s',s是顶点，且$d(s',o)\geq d(s,0)$. $\{s',s,o\}$ 生成了一个平面$\mathcal{E}u'^2$. 在$\mathcal{E}u'^2$中的三角形$s'so$在o处为直角. $s'so$关于连接s和o的边$\mathcal{A}$的旁切圆与连接s和s'的边$\mathcal{C}$相切于焦点f，$s'so$关于连接s'和o的边$\mathcal{B}$的旁切圆与$\mathcal{C}$相切于另一个焦点f'. 设$\bar{o}$和$\bar{o}'$是这两个旁切圆的圆心. 半径分别为$\bar{\rho}=d(\bar{o},\mathcal{A})$和$\bar{\rho}'=d(\bar{o}',\mathcal{B})$的所谓Dandelin球面$S^2_{\bar{\rho}}(\bar{o})$和$S^2_{\bar{\rho}'}(\bar{o}')$与$\mathcal{E}u^2$相切于焦点$f$和$f'$. 此外，这些球面与圆锥$K$相切于圆. K上每条过o的直线与这些圆交于两点，它们之间具有固定的距离$d(s',s)$. o位于这些圆之间.



3. $K \cap \mathcal{E}u^2$是一条抛物线P. 设s是它的顶点， f是它的焦点. $\{s, f, o\}$生成一个平面$\mathcal{E}u'^2$, 且sfo是这个平面中的一个在s处为直角的三角形. $\mathcal{E}u'^2$与K相交于一条过o的，与连接s, f 的直线$\mathcal{C}$平行、且相距距离为$d(s, o)$的直线. 令$d(s, o) = p$, $\frac{o-s}{2} + f = \bar{o}$. Dandelin球面$S^2_{\frac{p}{2}}(\bar{o})$与$\mathcal{E}u^2$相切于焦点$f$, 且与圆锥$K$相切于一个圆，这个圆上的点到$o$的距离为$\frac{p}{2}$. 由8.6.12, 这个圆是$S^2_{\frac{p}{2}}(\bar{o})$与一个平面$\mathcal{E}u^{*^2}$的交， $\mathcal{E}u^{*^2} \cap \mathcal{E}u^2$是抛物线$P$的准线$\mathcal{L}$, p为其参数.

证明: 对1.: 设E是$\mathcal{E}u^2$中的一个椭圆, 这里$\mathcal{E}u^2$位于一个3维空间$\mathcal{E}u^3$之中. 设f, f'是它们的焦点， s, s'是它的顶点, 且有$d(f, s) < d(f, s')$. 用$\mathcal{C}$来标记过f, f', s, s'的直线. 在$\mathcal{E}u^3$中定义这样一个平面$\mathcal{E}u'^2$, 它是由$\mathcal{C}$及过f的、与$\mathcal{C}$垂直的直线所生成的. 我们能在$\mathcal{E}u'^2$中定义一个在o处为直角的三角形$s'so$, 且具有性质：内切圆$S^1_{\rho}(\bar{o})$和与直线$\mathcal{C}$相切于f.

为了看出这一点，令$d(s, s') = |C|$. 我们假设$d(s', o) \geq d(s, o)$, 且令$d(s', o) = |B|$, $d(s, o) = |A|$. 于是点s', s, o对应于在8.5.6中所标记的点a, b, c. 利用那里的公式，我们发现，对从$\mathcal{C}$上的内切圆和旁切圆的切点p_c和$\bar{p}_c$到边$\mathcal{C}$的中点$\frac{a+b}{2} = \frac{s+s'}{2}$的距离$d(p_c, \frac{a+b}{2}) = d(\bar{p}_c, \frac{a+b}{2})$的值为$\frac{|B|-|A|}{2}$. 换言之，我们已经放弃： $|C|$和$|B| - |A|$一起满足$|A|^2 + |B|^2 = |C|^2$. 由

此，我们写

$$|A| = -\frac{|B|-|A|}{2} + \sqrt{\frac{|C|^2}{2} - \frac{(|B|-|A|)^2}{4}}$$

及

$$|B| = |A| + (|B|-|A|).$$

于是所寻找的三角形$s'so$的存在性是有保证的.

我们也知道，边C的旁切圆$S^1_{\bar{\rho}'}(\bar{o}')$切于另一个焦点$f'$，这是因为$d(s',f') = d(s,f)$. 现在定义在$\mathcal{E}u'^2$中的直线$\mathcal{W}$为三角形$s'so$在点$o$处的角平分线.

用K来记$\mathcal{E}u^3$中的顶点为o，轴为$\mathcal{W}$的圆锥. 内切圆和旁切圆到$\mathcal{E}u^3$中的球面的扩张$S^2_{\bar{\rho}}(\bar{o})$和$S^2_{\bar{\rho}'}(\bar{o}')$与$K$总是相切于一个圆，见8.6.12. 如果$\mathcal{G}$是$K$上过$o$的一条直线（也称为$K$的母线），且$r$和$r'$为$\mathcal{G}$与这些圆的交点，于是$d(r,r')$与$\mathcal{G}$的选取无关. 于是为了确定$d(r,r')$，我们能对$\mathcal{G}$选取通过三角形$s'so$的点$s$和$o$的边直线$\mathcal{A}$. 在这个情形下，$\mathcal{A}$与内切圆相切于切点$p_a$，与关于$C$的旁切圆相切于$p_{cb}$，见8.5.6中的记号，在此记号下，我们的$s',s,o$分别与那里的以$a,b,c$为标记的点相对应. 于是利用8.5.6中的公式，有：

$$\begin{aligned} d(p_a,p_{ca}) &= d(p_a,b) + d(b,p_{ca}) \\ &= d(a,\bar{p}_c) + d(b,\bar{p}_c) = |C| = d(s',s). \end{aligned}$$

我们现在断言： $K \cap \mathcal{E}u^2 = E$. 对此，我们证明：

$$q \in K \cap \mathcal{E}u^2 \Longrightarrow d(q,f) + d(q,f') = d(s',s). \tag{8.6}$$

因为 8.6.4，所以这时有 $K \cap \mathcal{E}u^2 \subset E$. 但因为在交集中每个 Cauchy序列总有一个极限，所以得到$K \cap \mathcal{E}u^2 = E$.

对于 (8.6) 的证明，对 $q \in K \cap \mathcal{E}u^2$，考虑 K 的生成集 $\mathcal{G}$，它包含 q. 设 r, r' 分别是 $\mathcal{G}$ 与 $S^2_{\bar{\rho}}(\bar{o})$ 和 $S^2_{\bar{\rho}'}(\bar{o}')$ 的切点. 因为 $S^2_{\bar{\rho}}(\bar{o})$ 和 $S^2_{\bar{\rho}'}(\bar{o}')$ 与 $\mathcal{E}u^2$ 分别相切于 f 和 f'，所以由 8.6.12 及我们上述的注意，可以得到：

$$d(q,f) + d(q,f') = d(q,r) + d(q,r') = d(s',s).$$

对2.：设 H 是平面 $\mathcal{E}u^2 \subset \mathcal{E}u^3$ 中的一条双曲线. 设 f, f' 是它们的焦点，s, s' 是它的顶点，且有 $d(f,s) < d(f,s')$. 设 $\mathcal{C}$ 是过这四点的直线，$\mathcal{E}u'^2$ 为与 $\mathcal{E}u^2$ 在 $\mathcal{C}$ 处正交的平面，见1. 我们寻找一个在 $\mathcal{E}u'^2$ 中的在 o 处为直角的三角形 $s'so$，且 $d(s',o) \geq d(s,o)$，其关于过 s 及 o 的边 $\mathcal{A}$ 的旁切圆与直线 $\mathcal{C}$ 相切于 f，且其关于过 s' 及 o 的边 $\mathcal{B}$ 的旁切圆与直线 $\mathcal{C}$ 相切于 f'，这样一个三角形的存在性可如 1. 那样得出.

现在考虑三角形 $s'so$ 在点 o 处的另一个角平分线. 记 K 为以 $\mathcal{W}$ 为轴，o 为顶点的一个圆锥. 所谓旁切圆至球面 $S^2_{\bar{\rho}}(\bar{o})$ 和 $S^2_{\bar{\rho}'}(\bar{o}')$ 的扩张总是分别与 K 相切于一个圆，与平面 $\mathcal{E}u^2$ 相切于 f 和 f'. K 的母线 $\mathcal{G}$ 与这两个圆相交于点 r, r'，且距离 $d(r,r') = d(s,s')$ 与 $\mathcal{G}$ 无关. 为了看出这个最后的式子，我们用 a, b, c 来替代 s', s, o，而且用 8.5.6 中的这些公式及记号确定的距离 $d(\bar{p}_a, p_{bc})$ 为

$$d(\bar{p}_a, c) + d(c, \bar{p}_b) = |C| = d(a,b) = d(s,s').$$

完全类似于 1. 的证明，在应用了两个相切球面后，现在可得出

$$q \in K \cap \mathcal{E}u^2 \Longrightarrow d(q,f) - d(q,f') = \pm d(s,s'). \qquad (8.7)$$

因为交集是完备的，所以从 8.6.4 可得到 $K \cap \mathcal{E}u^2 = H$.

对 3.: 我们限于证明: $q \in K \cap \mathcal{E}u^2$ 蕴含 $d(q,f) = d(q,\mathcal{L})$, 这里 $\mathcal{L} = \mathcal{E}u^{*2} \cap \mathcal{E}u$. 事实上, 如果 q 放到由 K 所生成的集合 $\mathcal{G}$ 中, 则球面 $S^2_{\frac{p}{2}}(\bar{o})$ 与 $\mathcal{G}$ 相切于圆 $K \cap S^2_{\frac{p}{2}}(\bar{o}) \cap \mathcal{E}u^{*2}$ 上的一点 r. 于是 $d(q,f) = d(q,r)$. 设 l'_q 是 q 在 $\mathcal{E}u^{*2}$ 上的垂线的垂足点. 于是 $d(q,l'_q) = \dfrac{d(q,r)}{\sqrt{2}}$, 这是因为 $\angle(r-q, l'_q-q) = \dfrac{\pi}{4}$. 如果 l_q 是 q 到直线 $\mathcal{E}u^2 \cap \mathcal{E}u^{*2}$ 上垂线的垂足点, 则 $l_q q l'_q$ 是一个三角形, 它在 l'_q 处的角度为 $\dfrac{\pi}{2}$, 在 l_q 处的角度为 $\dfrac{\pi}{4}$. 因此 $d(q,l_q) = \sqrt{2d(q,l'_q)} = d(q,r)$.

□

注解8.6.16 在 8.6.15.3 中我们已经用准线 (见 8.6.2) 来表示一条抛物线的特征. 在 8.6.2 中我们也已借助于准线来表示非圆的椭圆及双曲线的特征.

现在这些特征可从这些作为与圆锥 K 的截口曲线的描述中看出. 如我们在 8.6.15 中已经做过的那样: 譬如说, 考虑 Dandelin 球面 $S^2_{\rho}(\bar{o})$ 和平面 $\mathcal{E}u^{*2}$, 它包含了圆 $K \cap S^2_{\rho}(\bar{o})$. 按照假设, 如平面 $\mathcal{E}u^2$ 与 K 的交集是一个非圆的椭圆或者一条双曲线, 则平面 $\mathcal{E}u^2$ 不平行于 $\mathcal{E}u^{*2}$. 交集 $\mathcal{E}u^2 \cap \mathcal{E}u^{*2}$ 正好是圆锥曲线 $K \cap \mathcal{E}u^2$ 的准线 $\mathcal{L}$.

习题

1. 设 $\mathcal{E}u$ 是一个仿射 - 酉空间, 且 $\sigma : \mathcal{E}u \longrightarrow \mathcal{E}u$ 是一个不等于恒等元的运动, 且有 $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. 证明 σ 是一个镜射, 即存在一个子空间 $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}u$, 使得 $\sigma(p) = -(p - p_{\mathcal{B}}) + p_{\mathcal{B}}$. 在这里 $p_{\mathcal{B}}$ 是从 p 到 $\mathcal{B}$ 的垂足点.

(提示: $\mathcal{B}$ 是 σ 的不动点集合 $\{\dfrac{p+\sigma(p)}{2}; p \in \mathcal{E}u\}$.)

2. 设 $\mathcal{E}u$ 是实欧氏平面. 称一个二次型 $\{\chi = 0\}$ 为椭圆,

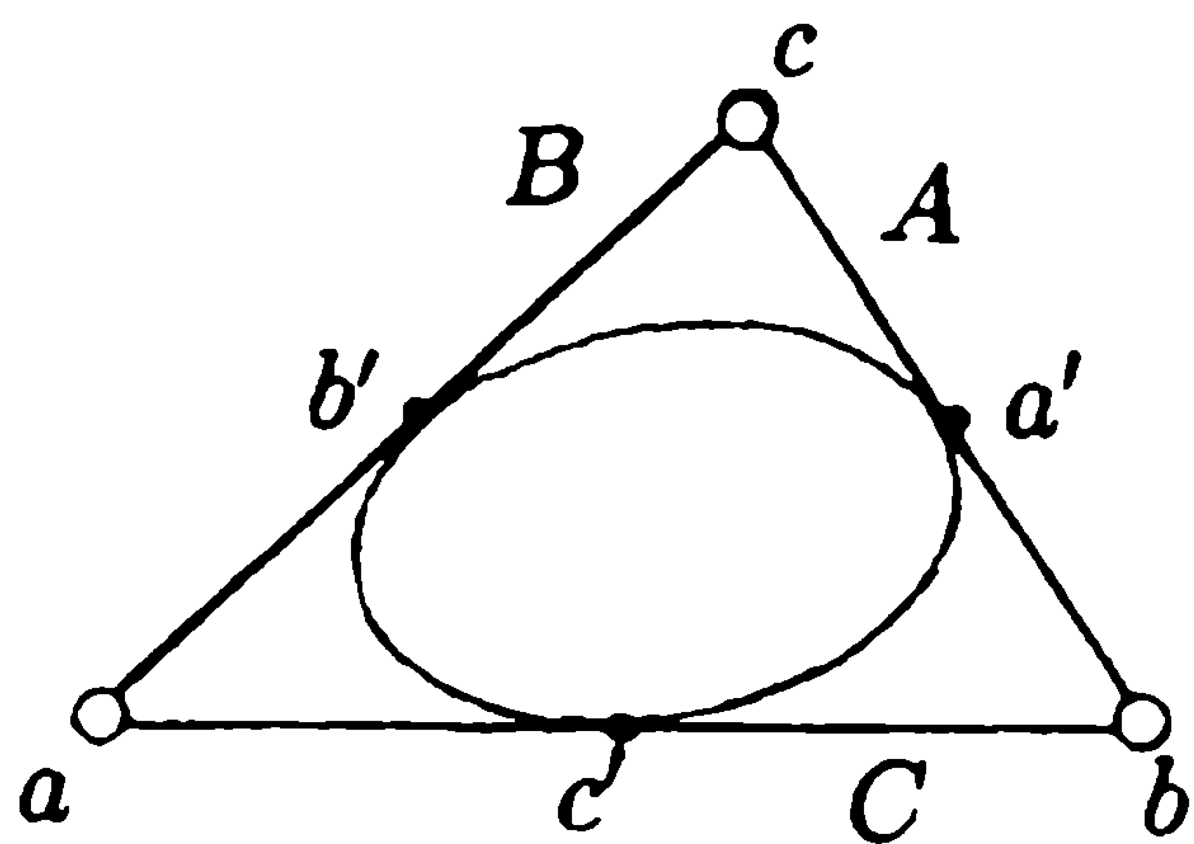
如果在二次函数χ的表示

$$\chi(p)=\psi(p-o,p-o)+2l_o(p-o)+\chi(o)$$

下，对称双线性型是正定的，即对所有$x\neq 0$，有$\psi(x,x)>0$. 特别地，当$\psi=<\ ,>$时，则亦称此时的椭圆为圆.

(a) 证明：如果$\{\chi=0\}$是椭圆，且$\varphi:\mathcal{E}u\longrightarrow\mathcal{E}u$是任一仿射变换，则$\{\chi\circ\varphi=0\}$还是一个椭圆.

(b) 对每个椭圆$\{\chi=0\}$，存在一个仿射变换$\varphi:\mathcal{E}u\longrightarrow\mathcal{E}u$，使得$\{\chi\circ\varphi=0\}$是一个圆.



3. 设abc是欧氏平面中的一个三角形. 证明：恰好存在一个椭圆，它与三角形的三条边在各自的中点$a'=\dfrac{b+c}{2}\in A, b'=\dfrac{c+a}{2}\in B, c'=\dfrac{a+b}{2}\in C$相切.

(提示：首先考虑一个三角形，其椭圆的存在性是显然的.)

4. 考察$\mathbf{R}^n$中二次型的欧氏标准形. 在什么条件下可确定一个$(n-1)$维的二次型？

(至少确定$\mathbf{R}^4$中的类型为$A1$的3维二次型.)

注：如果存在着一个超平面，使得一个二次型在该超平面上的正交投影是一个内部为非空的集合，则称此二次型为$(n-1)$维二次型.

5. 在$\mathbf{R}^n$中关于点$x_0\in\mathbf{R}^n$及幂为ρ^2的反演$I_{x_0,\rho}$是用

$$I_{x_0,\rho}:\mathbf{R}^n\setminus\{x_0\}\longrightarrow\mathbf{R}^n\setminus\{x_0\};\quad x\longmapsto\rho^2\frac{x-x_0}{|x-x_0|^2}+x_0$$

来定义的，这里$|x|=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. 证明：

(a) $I_{x_0,\rho}$ 的不动点是球面 $\{x \in \mathbf{R}^n; |x - x_0| = \rho\}$，今后我们也把关于以 x_0 为心，半径为 ρ 的球面的反演记为 $I_{x_0,\rho}$.

(b) $I_{x_0,\rho} \circ I_{x_0,\rho} = \mathrm{id}$.

(c) 不通过 x_0 的球面 $\{x \in \mathbf{R}^n; |x-x_1| = \sigma\}$ (即 $|x_0-x_1| \neq \sigma$) 在 $I_{x_0,\rho}$ 下被映至一个球面. (注意: 球面亦可写成 $\{x \in \mathbf{R}^n; |x|^2 + 2 < x, a > +\beta = 0\}$.)

(d) 包含 x_0 的球面 $\{x \in \mathbf{R}^n; |x - x_1| = \sigma\}$ 在 $I_{x_0,\rho}$ 下被映至一个以 $x_1 - x_0$ 为法向量的超平面.

6. 关于球面 $\{x^2+y^2+(z-1)^2 = 2\}$ 的反演将除去点 $(0,0,1)$ 的球面 $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 映至平面 $\{z = 0\}$. 这是球极投影. 证明: 这时球面 S^2 上的除去点 $(0,0,1)$ 的圆 (它是 S^2 与平面或者球面的交) 被映至 $\{z = 0\}$ 上的一个圆.

7. 对下列集合导出其 Hesse 标准形:

(a) 在 $\mathbf{R}^3$ 中的 $4x + 3y + 2z = 1$;

(b) 在 $\mathbf{R}^2$ 中的 $2x + 7y = 0$;

(c) 在 $\mathbf{C}^2$ 中的 $(3 + \mathrm{i})x + (1 + 5\mathrm{i})y = 1$.

8. 对下列二次型导出其欧氏标准形:

(a) $x^2 + 5y^2 + 4xy - 2 = 0$;

(b) $4xy + z^2 - 1 = 0$;

(c) $4xy - z^2 - 1 = 0$.

9. 考察欧氏 $\mathbf{R}^2$ 中的二次曲线族

$$\mathcal{Q}u(\lambda) = \{\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1\},$$

这里 $a > b > 0, \lambda > -a^2, \lambda \neq -b^2$.

(a) 在这个族中有多少个通过点 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ 的二次曲线?

(b) 证明: 如果有两个这样的二次曲线, 则在交点 (x_0, y_0) 处这两条二次曲线是正交的.

注：设 $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}u(\lambda)$. $\mathcal{Q}u(\lambda)$ 在 (x_0, y_0) 处的切线是直线

$$\{\frac{xx_0}{a^2+\lambda} + \frac{yy_0}{b^2+\lambda} = 1\}.$$

要去证明：如果 $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}u(\lambda_1) \cap \mathcal{Q}u(\lambda_2), \lambda_1 \neq \lambda_2$，则这两条二次曲线在这点的切线是正交的.

10. 对 $\mathbf{R}^3$ 的相应的习题：

讨论欧氏 $\mathbf{R}^3$ 中的一族二次曲面

$$\mathcal{Q}u(\lambda) = \{\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1\},$$

其中 $a > b > c > 0, \lambda > -a^2, \lambda \neq -b^2, -c^2$.

(a) 在此族中存在多少个二次曲面，它们是通过一个给定的点 $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$?

(b) 证明：如果存在三个这样的二次曲面，则在它们的交点 (x_0, y_0, z_0) 处，它们的切线两两正交.

注：在 $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{Q}u(\lambda)$ 处的切平面是用

$$\{\frac{xx_0}{a^2+\lambda} + \frac{yy_0}{b^2+\lambda} + \frac{zz_0}{c^2+\lambda} = 1\}$$

给出的.

11. 考察在欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中的一个 1 维的二次曲线

$$\{\psi(x, x) + 2l(x) + \gamma = 0\}.$$

这个二次曲线在点 x_0 处的切线定义为

$$\{\psi(x, x_0) + l(x) + l(x_0) + \gamma = 0\}.$$

(a) 证明：如果 $y_0 \in \mathbf{R}^2$ 不位于二次曲线上，则通过点 y_0 至多存在两条二次曲线的切线.

(b) 考察一个椭圆：对哪些点 $y_0 \in \mathbf{R}^2$ 可使得不存在、存在一条或两条通过 y_0 点的切线？作图！

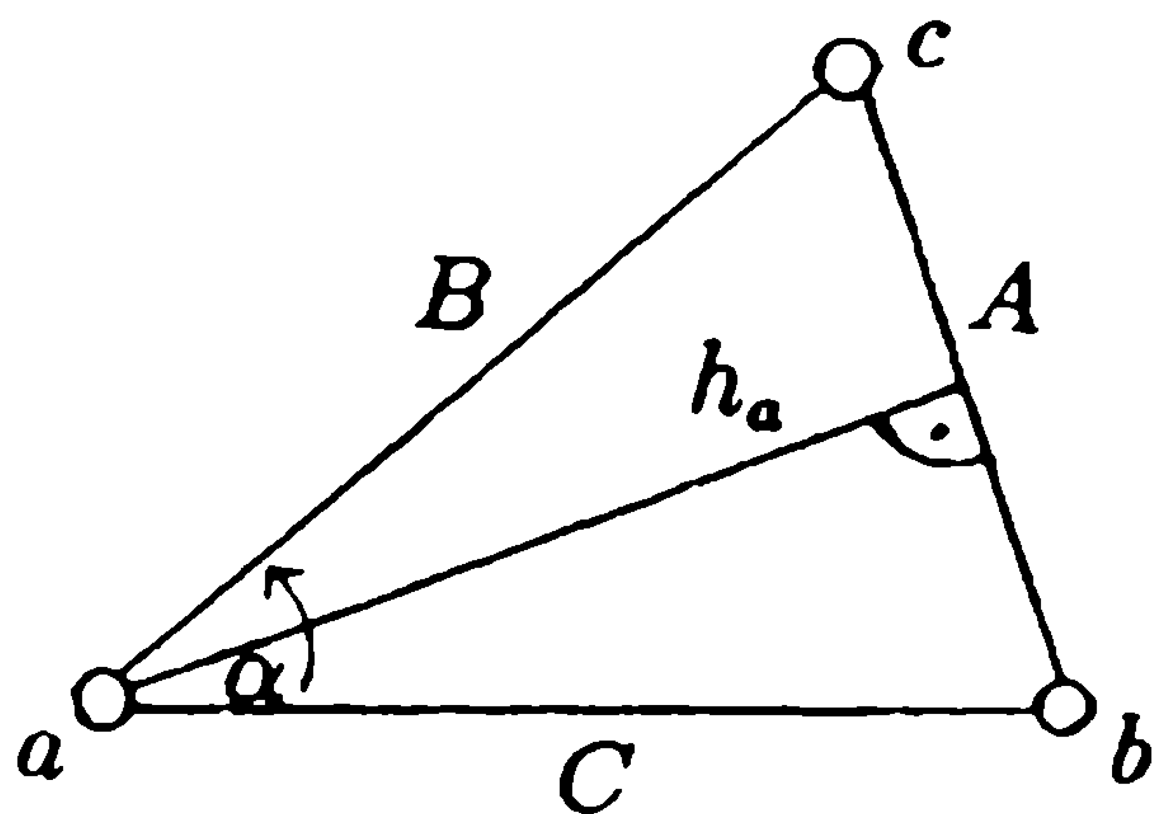
(c) 对双曲线研究此问题．作图！

(d) 对抛物线研究此问题．作图！

12. 考察 n 维欧氏空间中的不位于一个超平面中的 $n+1$ 个点 $p_1, \cdots, p_{n+1}$．证明：恰好存在一点 o，使得 $d(o,p_1) = \cdots = d(o,p_{n+1})$，即恰好存在一个球面，它包含了这 $n+1$ 个点．

（特殊情形：通过欧氏平面中不在同一直线上的三点，正好有一个圆通过．）

13. 给出欧氏平面中两点 p, q 以及一个实数 $\lambda > 0$，且有 $d(p,q) < \lambda$．证明：与以 p 为圆心，半径为 λ 的圆相切，并通过 q 的圆的圆心构成了一个椭圆，并确定这个椭圆的欧氏标准形式．



14. 考察一个欧氏平面中的一个三角形 abc（即点 a,b,c 不共线），A,B,C 是三条边，且 $|A| = d(c,b) = |c-b|, |B| = d(a,c) = |a-c|, |C| = d(a,b) = |a-b|$ 表示边长．令 $P = \dfrac{|A|+|B|+|C|}{2}$．设 α, β, γ 是角度， $h_a = d(a,A)$ 是三角形边 A 上的高．

证明：三角形的面积 $F = F(a,b,c)$ 是由

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2}|B||C|\sin\alpha \\
&= P\bar{\rho} = \sqrt{P(P-|A|)(P-|B|)(P-|C|)}
\end{aligned}
$$

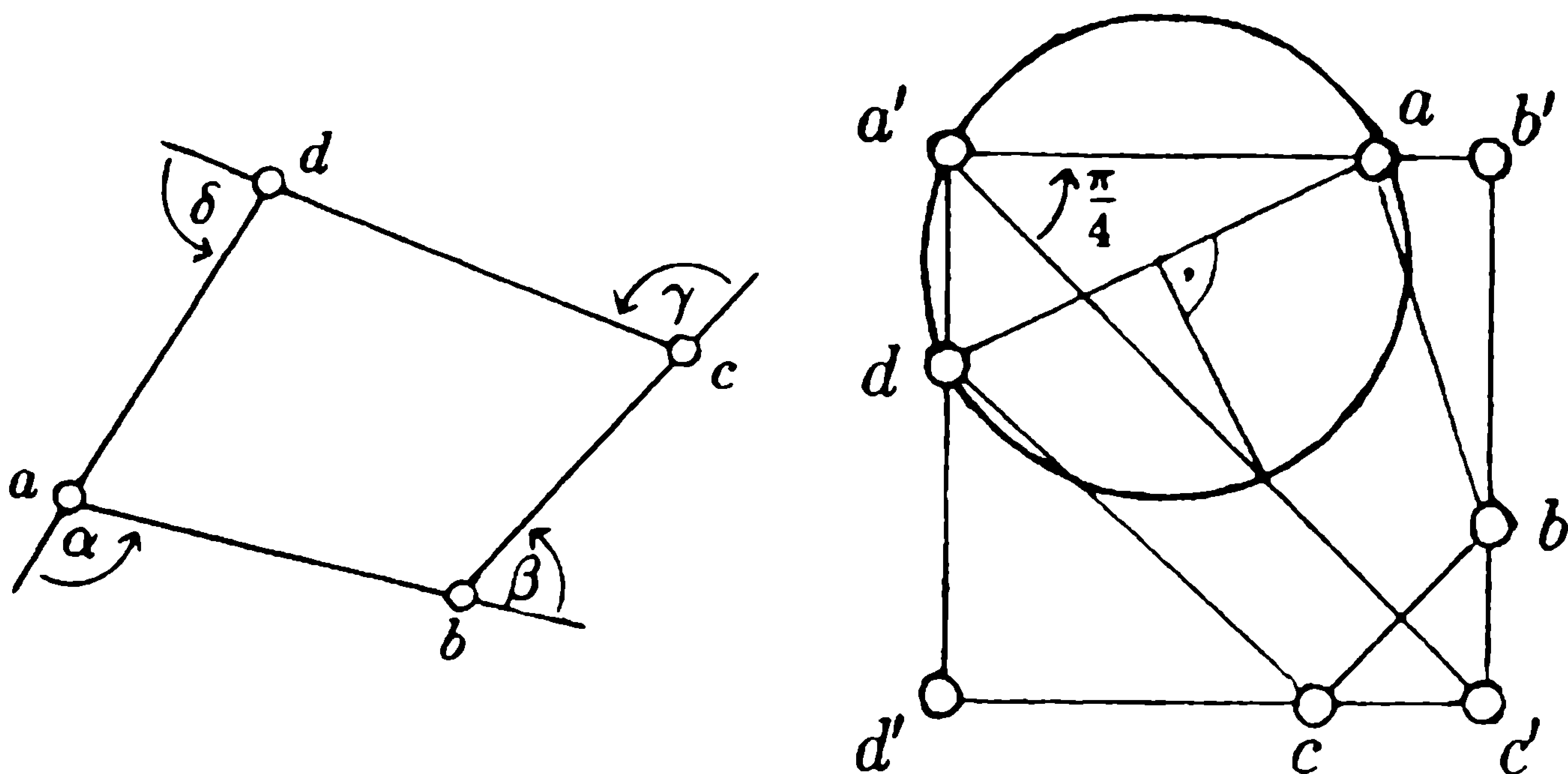
给出的，这里 $\bar{\rho}$ 是内切圆的半径．

15. 证明：对每一个三角形 abc，不等式

$$
F(a,b,c) \le \frac{P^2}{3\sqrt{3}}
$$

成立. 等号成立的充要条件是三角形abc为等边三角形.

16. 给定欧氏平面中的一个凸的四点形$abcd$, 即在平面的适当定向下, 定向外角$\alpha = \overrightarrow{\angle}(a-d, b-a)$等等均$< \pi$. 证明: 平面中正好存在一点$x$, 使得函数$x \longmapsto |x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$达到最小.



17. 设$abcd$是欧氏平面中的一个凸的四点形. 试确定一个正方形$a'b'c'd'$, 使它们的边通过上述四点. 注意, 这并不是对所有的a, b, c, d都是可能的. (提示: 首先试确定此正方形的对角线$a'c'$: 它与以$\frac{a+d}{2}$为心, 半径为$\frac{|d-a|}{2}$的圆交于a', 而且它与不包含a'的从d到a的圆弧的中点相交.)

18. 考察一个三角形abc及一个与这些顶点不同的点p. 设$\mathcal{G}_a$, $\mathcal{G}_b$, $\mathcal{G}_c$是从p到这些顶点的连线. 如果现在直线$\mathcal{G}'_a$, $\mathcal{G}'_b$, $\mathcal{G}'_c$分别通过a, b, c, 使得

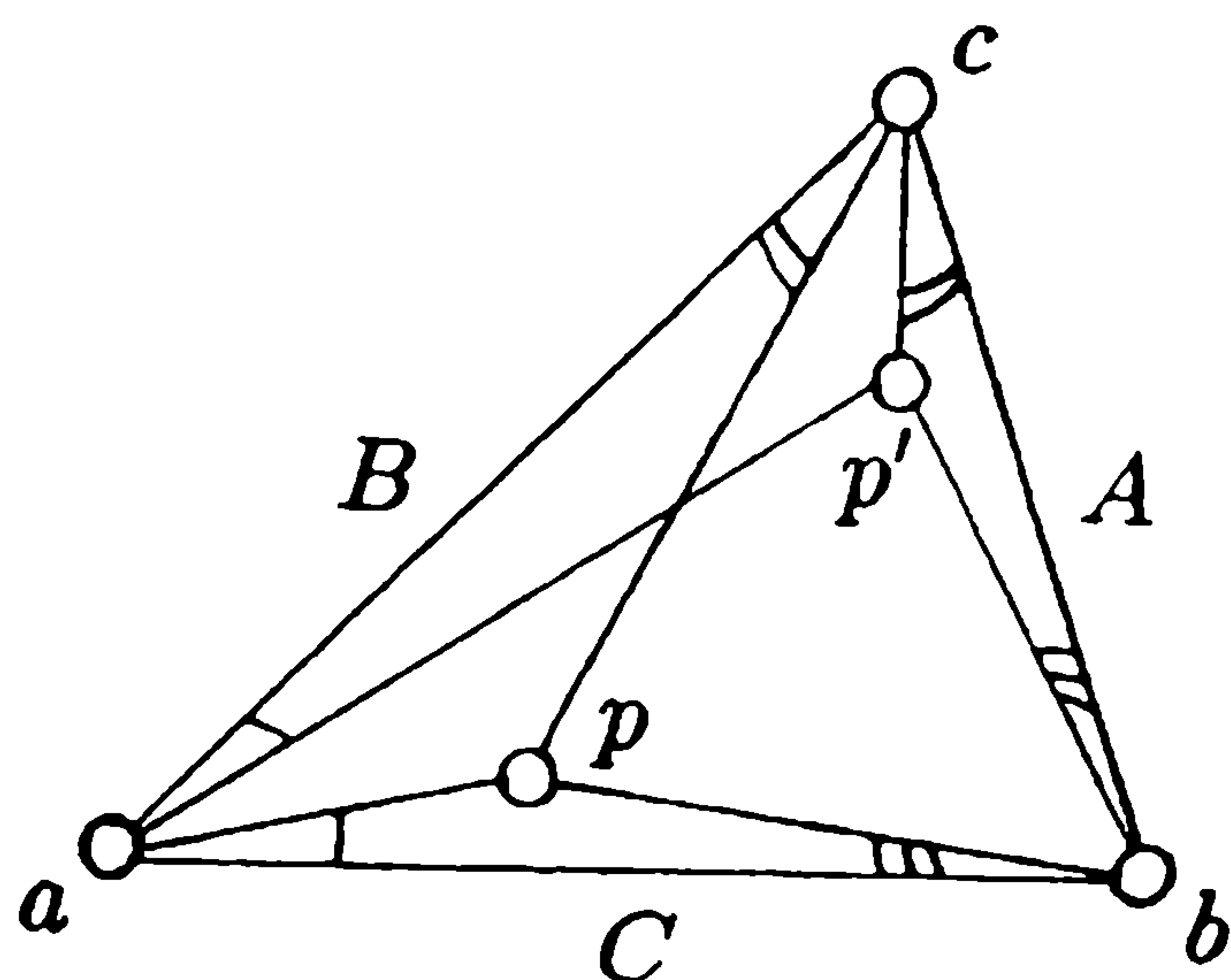
$$\overrightarrow{\angle}(C, \mathcal{G}_a) = \overrightarrow{\angle}(\mathcal{G}'_a, B);$$

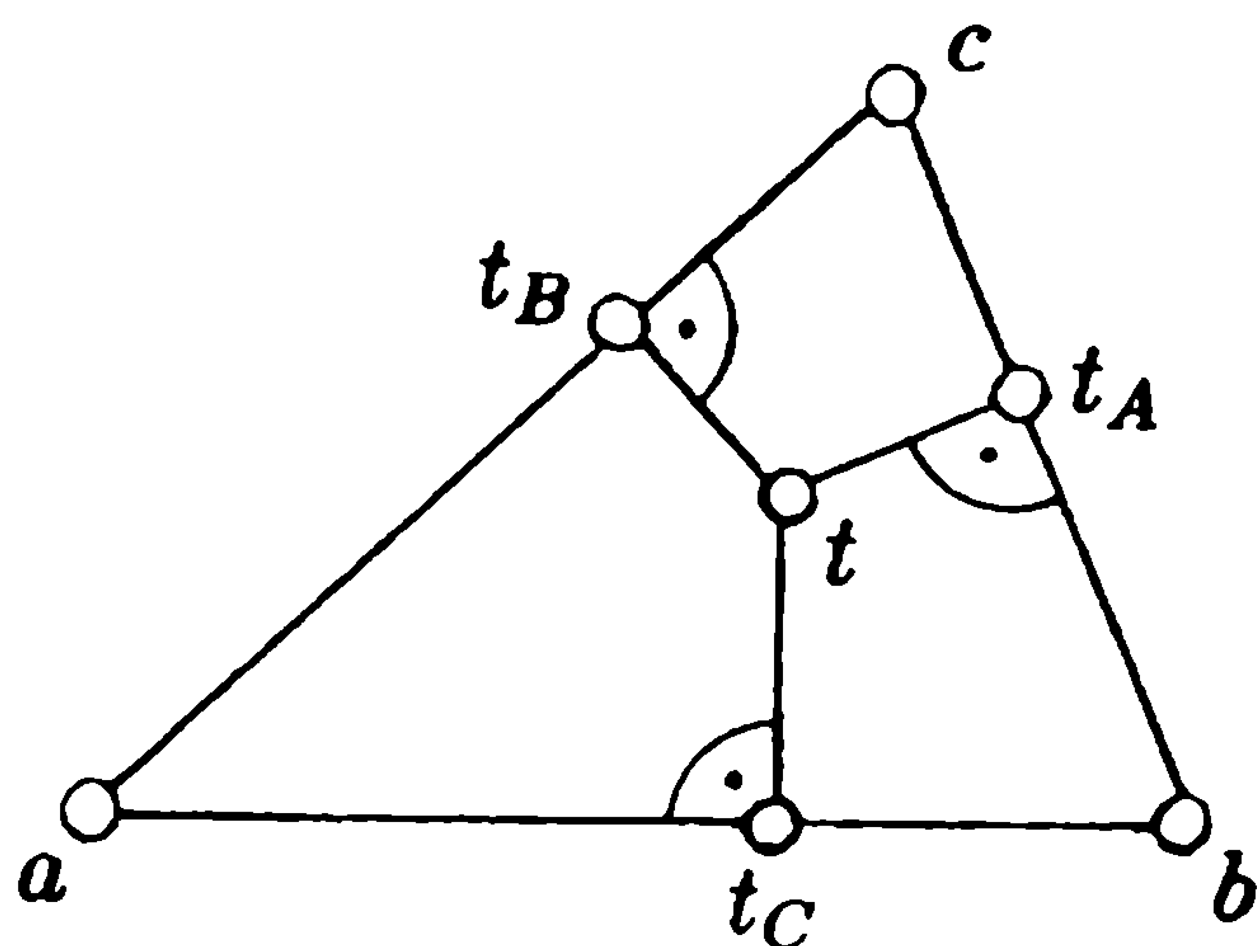
$$\overrightarrow{\angle}(A, \mathcal{G}_b) = \overrightarrow{\angle}(\mathcal{G}'_b, C);$$

$$\overrightarrow{\angle}(B, \mathcal{G}_c) = \overrightarrow{\angle}(\mathcal{G}'_c, A),$$

则$\mathcal{G}'_a$, $\mathcal{G}'_b$, $\mathcal{G}'_c$交于一点p'(这是三条角平分线交于一点的定理的推广).

定理的证明是利用直线镜射：我们用$\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$来记关于$A, B, C$的镜射，且用$\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$来记关于 $\mathcal{G}_a$, $\mathcal{G}_b$, $\mathcal{G}_c$的镜射，用$\sigma'_a, \sigma'_b, \sigma'_c$来记关于 $\mathcal{G}'_a$, $\mathcal{G}'_b$, $\mathcal{G}'_c$的镜射．于是假设 $\sigma'_a = \sigma_B\sigma_a\sigma_C$; $\sigma'_b = \sigma_C\sigma_b\sigma_A; \sigma'_c = \sigma_A\sigma_c\sigma_B$表明： $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$是一个直线镜射．要利用关于三条不平行的直线的直线镜射的乘积仍是直线镜射的充要条件是这三条直线交于一点.





19. (难题)：设abc是一个三角形，对三角形内部（它是由顶点a, b和c及给定的边所构成的开的正扇形的交集）中的每点t，成立

$$d(t,a) + d(t,b) + d(t,c) \geq 2(d(t,t_A) + d(t,t_B) + d(t,t_C)),$$

这里t_A是从t到边A的垂足点， t_B, t_C类似定义．仅当等边三角形时等号成立.

第 9 章

射影几何

9.1 射影空间

我们要对一个维数 ≥ 1 的向量空间 V 去构造射影空间 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$. V 的 (线性) 子空间 U 在 $\mathcal{P}(V)$ 中诱导了一个射影子空间 $\mathcal{P}(U)$, 且线性群 $GL(V)$ 诱导了 $\mathcal{P}$ 的射影变换群 $Pro(\mathcal{P})$.

在历史上, 射影空间的概念有其起源, 人们希望对一个仿射平面通过添加所谓非实质点或无限远点而得以扩张, 使得平行的、但又不相同的直线在扩张中总会有一个交点. 一般地, 应该得出: 一个空间 $\mathcal{A}$ 中满足 $\dim B - \operatorname{codim} B' \geq 0$ 的两个仿射子空间 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 在扩张成为一个射影空间后, 总会有一个维数 $\geq \dim B - \operatorname{codim} B'$ 的子空间作为它们的交集. 我们将在 9.2 中进一步讨论这种扩张.

在本节中我们将导入射影空间 $\mathcal{P}(V)$ 的重要的性质. V 应当永远是有限维的, 不过我们在这里注意, 在后文中也有相当一部分是没有这个假设的. V 的基域 K 可以任意选取. K 应当总是交换的. 人们当然也能考虑在非交换的域 K 上的向量空间和射影空间; 但下面的结论将不会全部成立, 故基于这一点, 我们放弃作这样一般化的推广.

定义 9.1.1* 1. 设 V 是 K 上的一个向量空间, $\dim V > 0$. 所谓 V 上的射影空间 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ 是指 V 的 1 维子空间的集合. 也称一个这样的子空间为 $\mathcal{P}(V)$ 中的一点. $\mathcal{P}(V)$ 的维数定义为 $\dim V - 1$.

---

* 译者注: 在定义 9.1.1 中应该再加上射影空间 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ 的 (射影) 子空间的定义: 所谓 $\mathcal{P}(V)$ 的 (射影) 子空间 $\mathcal{L}$ 是指存在 V 中的一个子空间 U, 使得 $\mathcal{L} = \mathcal{P}(U)$.

2. 也称 $\mathcal{P}=\mathcal{P}(V)$ 的1维 (射影) 子空间 $\mathcal{L}$ 为直线，称其2维子空间为平面. 当 $\operatorname{codim} U=1$ 时，子空间 $\mathcal{P}(U)$ 有余维数为1. 也称这样的子空间为 (射影) 超平面.

例9.1.2 设 V 是一个 $(n+1)$ 维欧氏向量空间. 用 $S(V)$ 表示 n 维球面： $S(V)=\{x\in V;|x|=1\}$. 对 V 的每一个1维子空间 U, 在 $U\cap S(V)$ 中正好存在两个元素， x 和 $-x$. 它们是 U 的一个欧氏基的元素. 由此 $\mathcal{P}(V)$ 能恒同于 $S(V)$ 上所谓对径点的偶 $\{x,-x\}$ 的全体. $\mathcal{P}(V)$ 中的每一条直线 $\mathcal{P}(U)$ 对应于一个大圆 $S^1\subset S(V)$, 即交集 $S(V)\cap U$. 这里对径点被看成是恒同的.

首先指出：射影空间的结构在有些方面要比仿射空间的结构来得简单，下列的维数公式就说明了这一点. 将它与仿射空间的相应公式7.1.13作比较.

定理9.1.3 设 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$ 是 $\mathcal{P}=\mathcal{P}(V)$ 的子空间. 于是

$$\dim\,(\mathcal{L}\cap\mathcal{L}')+\dim\,(\mathcal{L}+\mathcal{L}')=\dim\,\mathcal{L}+\dim\,\mathcal{L}'$$

这里 $\mathcal{L}=\mathcal{P}(U)$, $\mathcal{L}'=\mathcal{P}(U')$, $\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'=\mathcal{P}(U\cap U')$, $\mathcal{L}+\mathcal{L}'=\mathcal{P}(U+U')$ 和 $U+U'=[U\cup U']$.

证明: 这可从2.6.9立即得出，我们只需对其和式中的每一项减去1即可. □

系9.1.4 若 $\dim\,\mathcal{L}+\dim\,\mathcal{L}'\geq\dim\,\mathcal{P}$, 则

$$\dim\,(\mathcal{L}\cap\mathcal{L}')=\dim\,\mathcal{L}+\dim\,\mathcal{L}'-\dim\,(\mathcal{L}+\mathcal{L}')\geq 0,$$

即 $\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'\neq\emptyset$. □

现在我们来讨论射影空间的态射. 如同对仿射空间那样，我们不考虑一般的态射，而是仅考虑由所属的向量空间的态射所诱导的那种态射.

定义9.1.5

1. 设V和V'是K上的维数相同的向量空间，称映射

$$\pi: \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}' = \mathcal{P}(V')$$

是射影的，如果存在一个线性同构$f: V \to V'$，使得V的1维子空间U的象$\pi(U)$是由$f(U)$给出的．于是我们也用$\mathcal{P}(f)$去标记这样的π.

2. 特别当$V = V'$时，则$\mathcal{P} = \mathcal{P}'$，于是我们也称射影映射$\pi: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$为射影变换．记$\mathcal{P}$的射影变换的集合为$Pro(\mathcal{P})$.

3. 设V是一个向量空间，所谓V的一个相似变换是指映射$h_\alpha: V \to V; x \mapsto \alpha x$，这里$\alpha \neq 0$是$K$中的元．我们把$V$的相似变换的集合记为$HT(V)$.

引理9.1.6

1. V的相似变换的集合构成了$GL(V)$的一个子群，借助于$h_\alpha \mapsto \alpha$，它是同构于K^*.

2. $Pro(\mathcal{P})$是$\mathcal{P}$的双射群 Perm $(\mathcal{P})$的子群．我们称它为$\mathcal{P}$的射影变换群．映射

$$\mathcal{P}: f \in GL(V) \mapsto \mathcal{P}(f) \in Pro(\mathcal{P})$$

是一个群同态，且其核 $= HT(V)$.

证明: 对1.: $h_\alpha h_{\alpha'} = h_{\alpha\alpha'}$和 $h_\alpha^{-1} = h_{\alpha^{-1}}$是显然的，且由此又可得出： $h_\alpha \in HT(V) \mapsto \alpha \in K^*$是一个群同态.

对2.: 由$f \in GL(V)$可得出$\mathcal{P}(f) \in$ Perm $(\mathcal{P})$. 因为$(f \cdot f')(U) = f(f'(U))$，即有$\mathcal{P}(f \cdot f') = \mathcal{P}(f) \cdot \mathcal{P}(f')$. $\mathcal{P}(f) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$意味着$f$将$V$的每一个1维子空间$U$变至自身．当 $\dim V = 1$时，则有$HT(V) = GL(V)$. 对 $\dim V \geq 1$，考虑V中两个线性无关的元素$\{x, x'\}$. 于是由$\mathcal{P}(f) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$得出：

$$f(x) = \alpha x, \quad f(x') = \alpha' x', \quad f(x + x') = \beta(x + x'),$$

这里α, α', $\beta \neq 0$. 于是$\beta(x+x') = \alpha x + \alpha' x'$, 即$\alpha = \alpha' = \beta$. 其余部分可从1.4.12得出. □

定义9.1.7

1. 设U是V的一个1维子空间, 于是$\mathcal{P}(U)$是$\mathcal{P}(V)$中的一个点. 所谓 $\mathcal{P}(U)$的一个射影坐标或齐性坐标, 是指U的一个生成元x.

2. 所谓n维射影空间$\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$的一个射影参照系$Q$, 是指具有下列性质的$(n+2)$个点$\{q_0, q_1, \cdots, q_n, e\}$: q_i具有齐次坐标b_i, 使得$B = \{b_0, \cdots, b_n\}$是V的基, 且$\sum\limits_i b_i$是e的齐次坐标. 称B为从属于Q的基, e是Q的单位点.

注解9.1.8 1. 名称"齐次坐标"起源于可以用x, 也可以用αx, $\alpha \neq 0$, 作为点$p \in \mathcal{P}$的齐次坐标.

2. 对$\mathcal{P}(V)$的射影参照系Q的设定等价于具有下述性质的$(n+2)$个点$\{p_0, \cdots, p_n, p_{n+1}\}$的设定: 如果$x_i$是$p_i$的齐次坐标, $0 \leq i \leq n+1$, 于是每$(n+1)$个这样的x_i构成了V的一组基. 于是人们能写$x_{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x_i$, 且$\alpha_i \neq 0$, $0 \leq i \leq n$. 于是$b_i = \alpha_i x_i$是p_i的坐标, 这正是作为一个射影参照系所需要的.

引理9.1.9 设$Q = \{q_0, \cdots, q_n, e\}$是$\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ 的射影参照系. 于是从属于Q的基能被确定到直至V的一个相似.

证明: 设$B = \{b_0, \cdots, b_n\}$和$B' = \{b'_0, \cdots, b'_n\}$是从属于$Q$的基, 则对每个$i$, $0 \leq i \leq n$, 有一个$\alpha_i \neq 0$, 使得$b'_i = \alpha_i b_i$, 且存在$\alpha \neq 0$, 使得$\sum\limits_i b'_i = \sum\limits_i b_i$, 即$\sum\limits_i (\alpha - \alpha_i) b_i = 0$, 于是对所有$0 \leq i \leq n$, $\alpha_i = \alpha$. □

对照于7.2.9, 有:

定理9.1.10 设$\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$是$V$上的射影空间, $\dim \mathcal{P} = n$. 利用$\mathcal{P}$的射影参照系$Q = \{q_0, \cdots, q_n, e\}$, 定义了一个射影同

构

$$\pi_Q : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(K^{n+1}).$$

而且1维子空间 $U = [x]$ 与元素 $[\Phi_B(x)]$ 相联系，这里 B 是从属于 Q 的基.

证明: 按照9.1.9, B 能被确定到至多只差一个相似 h_α. 令 $h_\alpha(B) = \alpha B$. 于是 $[\Phi_{\alpha B}(x) = \alpha^{-1}x] = [x]$.

对照于7.2.10, 有:

定理9.1.11 设 $Q = \{q_0, \cdots, q_n, e\}$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个射影参照系.

1. 射影变换 $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 把射影参照系 Q 变至射影参照系 $Q' = \{\pi(q_0), \cdots, \pi(q_n), \pi(e)\}$.

2. 如果 $Q' = \{q_0', \cdots, q_n', e'\}$ 是关于 $\mathcal{P}$ 的一个任意的前述的射影参照系，则正好存在一个射影变换 π, 它将 Q 变至 Q'.

证明: 对1.: 设 $\pi = \mathcal{P}(f)$, $B = \{b_0, \cdots, b_n\}$ 是 V 的一个从属于 Q 的基. 设 $f(b_i) = b_i'$, $0 \le i \le n$. 因为 $f(\sum_i b_i) = \sum_i f(b_i) = \sum_i b_i'$, Q' 是一个射影参照系，且以 $B' = \{b_0', \cdots, b_n'\}$ 作为其从属的基.

对2.: 设 B 和 B' 分别是 V 的从属于射影参照系 Q 和 Q' 的基. 用 $f(B) = B'$ 定义 $f \in GL(V)$. 于是 $\mathcal{P}(f)$ 将 Q 变至 Q'. B 和 B' 仅被确定到相差一个相似，即 f 亦仅被确定到相差一个相似. 按照9.1.6, 它属于核 $\ker\{\mathcal{P} : GL(V) \to Pro(\mathcal{P}(V))\}$. □

9.2 仿射空间的射影扩张

现在我们对 V 上的一个仿射空间 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$ 定义它的射影扩张 $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$, 即我们在 $\mathcal{A}$ 中补入它们的所谓非实质点或无限远点的集合 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$. $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 具有射影空间的结构，而且典范地同构于 $\mathcal{P}(V)$. 同时对 $\mathcal{A}$ 的每一个仿射子空间 $\mathcal{B}$ 可借此定义

它的射影扩张 $\mathcal{B}\cup\mathcal{P}_\infty(\mathcal{B})$.

这个射影扩张 $\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 携带了一个射影空间 $\mathcal{P}(V')$ 的结构，这里 $\dim V' = \dim V+1$, 在 $\mathcal{P}(V')$ 中，子空间 $\mathcal{P}(V)$ 是突出的. 与仿射空间的结构相比较，射影空间具有比较简单的结构的原则 —— 特别地，可参见维数公式9.1.3—— 于是能被应用到对仿射空间的研究.

我们用 Pappos-Pascal 定理和 Desargues 定理作为例子来表明这一点.

定义9.2.1 设 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 是 V 上的一个仿射空间. 所谓 $\mathcal{A}$ 的一个非实质点或无穷远点，是指 $\mathcal{A}$ 的一族平行直线，见 7.1.16. 称这些非实质点的集合为 $\mathcal{A}$ 的非实质的射影空间 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$.

上述所导入的记号可通过下述命题而得到阐明：

命题9.2.2 设 $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个仿射空间. 于是 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 是典范地双射于 V 上的射影空间 $\mathcal{P}(V)$.

证明: $\mathcal{A}$ 的一个非实质点，即 $\mathcal{A}$ 中一族平行直线，它一一对应于这些直线的公共方向 ($=V$ 的 1 维子空间). 但是一个这样的方向是 $\mathcal{P}(V)$ 中的一个点. □

注解9.2.3 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 的一个子空间，于是亦定义 $\mathcal{P}_\infty(B)$ 为从属于 $\mathcal{B}$ 的平行直线的类的集合. 如果 $U_\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$ 的方向，则 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{B})$ 也典范地同构于 $\mathcal{P}(U_\mathcal{B})\subset\mathcal{P}(V)$.

引理9.2.4 设 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 是仿射空间. 每个仿射变换 $\phi\in$ Aff $(\mathcal{A})$ 诱导了 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 的一个射影变换，记为 $\mathcal{P}_\infty(\phi)$.

$$\phi\in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})\mapsto\mathcal{P}_\infty(\phi)\in Pro(\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}))$$

是一个群态射.

我们将这个态射的核记为 $Dil(\mathcal{A})$, 并称其中的元素为膨胀. 群 $Dil(\mathcal{A})$ 由平移和相似所生成. 平移构成了 $Dil(\mathcal{A})$ 的一个不变子群.

注解9.2.5 1. 我们在9.1.5中已首次对向量空间V导出了相似的概念. 对于仿射空间, 我们把仿射变换φ理解成: f_φ是一个相似.

2. φ是$\mathcal{A}$的一个膨胀是指: φ把$\mathcal{A}$的每条直线 $\mathcal{G}$变至与其平行的直线, 这是因为这正好表明了: $\mathcal{G}$和$\varphi(\mathcal{G})$具有相同的方向.

9.2.4 的证明: 考虑群态射的复合

$$\varphi \in \text{ Aff } (\mathcal{A}) \mapsto f_\varphi \in GL(V) \mapsto \mathcal{P}(f_\varphi) \in Pro(\mathcal{P}(V)).$$

$\mathcal{P}(f_\varphi)$正好描述了从f_φ到V的1维子空间上的运算, 于是, 也是平行直线类上的运算, 即$\mathcal{P}(f_\varphi) = \mathcal{P}_\infty(\varphi)$. 特别地, 由此证明了$\mathcal{P}$: Aff $(\mathcal{A}) \to Pro(\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}))$是一个群态射. $\varphi \in \ker \mathcal{P}$意味着$f_\varphi \in HT(V)$, 见9.1.6.2. 于是

$$\varphi(p) = \alpha(p-o) + \varphi(o) = (\varphi(o) - o) + \alpha(p-o) + o,$$

即φ是一个相似与一个平移的复合. $\mathcal{A}$的平移群是映射

$$\varphi \in Dil(\mathcal{A}) \mapsto \alpha \in K^*$$

的核, 这里α是用$f_\varphi = h_\alpha$来确定的. □

定理9.2.6 设V'是维数$n+1>1$的向量空间, V是一个n维的子空间. 于是射影空间$\mathcal{P}(V')$以及它的子空间$\mathcal{P}(V)$具有V 上仿射空间$\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$的射影扩张$\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$的结构. 这里$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$对应于子空间$\mathcal{P}(V)$, 而$\mathcal{A}$对应于补$\mathcal{P}(V') \setminus \mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V' \setminus V)$, 而且, 以下列方式在$V'$上选一个线性形式$l: V' \to K$, 使得 $\ker l = V$. 于是对每个$y \in V$, 确定了一个所谓横截

$$y_l^+ : V' \to V'; \quad x' \mapsto l(x')y + x'.$$

y_l^+ 是 $GL(V')$ 中的一个元素，且 $y^+|_V = \mathrm{id}_V$. 由此，对所考虑的元素 $y \in V$，我们用 $\mathcal{P}(y_l^+)|\mathcal{P}(V' \setminus V)$ 来定义一个映射

$$y^+ : \mathcal{P}(V' \setminus V) \to \mathcal{P}(V' \setminus V).$$

即对 $x' \in V' \setminus V$, 有 $y + [x'] = [l(x')y + x']$.

按此方法， $y \in V$ 作为平移 y^+ 作用在集合 $\mathcal{P}(V' \setminus V)$ 上，使得 $\mathcal{P}(V' \setminus V)$ 成为一个仿射空间 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$. 这个空间 $\mathcal{A}$ 与线性形式 l 的选取有关. 如果我们今后将它记为 $\mathcal{A}_l$, 且用 $\mathcal{A}_{l'}$ 去记借助于形式 $l' = \alpha^{-1}l$ 所定义的仿射空间，则相似 $h_\alpha : V' \to V'$ 诱导了从 $\mathcal{A}_l$ 到 $\mathcal{A}_{l'}$ 上的一个仿射同构.

如此典范同构于 $\mathcal{A}_l$ 的类定义了仿射空间 $\mathcal{P}(V' \setminus V)$, 我们也把它记为 $\mathcal{A}$.

证明: 显然 y_l^+ 是线性的, $(-y)_l^+$ 是逆元素, 则$y_l^+ \in GL(V')$. 如果我们选线性形式 l, 使得 $\ker\, l = V$, 则 $\mathcal{P}(V' \setminus V)$ 的每点唯一确定了在 $\{l = 1\}$ 中的齐次坐标 $x' \in V' \setminus V$. y_l^+ 将集合 $\{l =$ 常值$\}$ 变至其自身. 特别地， y_l^+ 在 $\{l = 1\}$ 上以 $x' \mapsto y + x'$ 的方式作用着. 这表明 $\{l = 1\}$ 具有 V 上的一个仿射空间 $\mathcal{A}_l$ 的结构.

现设 $\alpha^{-1}l = l'$, $h_\alpha : V' \to V'$ 是相似 $x' \mapsto \alpha x'$. 于是我们有

$$\begin{aligned} h_\alpha(y_l^+ x') &= \alpha(l(x')y + x') = \alpha^{-1}l(\alpha x')(\alpha y) + \alpha x' \\ &= l'(\alpha x')(\alpha y) + \alpha x' = h_\alpha(y)_{l'}^+ h_\infty(x'). \end{aligned}$$

由此我们能把 $\mathcal{P}(V' \setminus V)$ 想象为 V 上的射影空间 $\mathcal{A}$. 按 9.2.2, 能与 $\mathcal{P}(V)$ 恒同的空间 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 现在能作为 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(V' \setminus V)$ 在 $\mathcal{P}(V')$ 中的补集出现. □

在 9.2.6 中我们已经对 V' 及它的余维数为 1 的子空间 V 构造出一个仿射空间 $\mathcal{A}(V)$ 及其非实质的空间 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}(V))$. 现在我们要指出，对 V 上一个给定的仿射空间 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 本质上典范地同构于一个这样的 $\mathcal{P}(V' \setminus V) \cup \mathcal{P}(V)$.

定理 9.2.7 设 A 是 V 上的仿射空间. 设 V' 是一个向量空间, 它包含了作为其余维数为 1 的子空间 V. 选定了 $o \in \mathcal{A}$ 及 $x'_0 \in V' \setminus V$ 以后, 就可确定一个双射

$$\chi = \chi(o, x'_0) : \mathcal{A} \cup \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(V'),$$

使得 $\chi|_{\mathcal{A}}$ 是一个与仿射空间 $\mathcal{P}(V' \setminus V)$ 的仿射同构, 且 $\chi|_{\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})}$ 是一个与 $\mathcal{P}(V)$ 的典范恒同, 见 9.2.2.

当 χ, χ' 是两个上述类型的双射. 于是 $\chi'|_{\mathcal{A}} = \chi \circ f|_{\mathcal{A}}$, 且 $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个膨胀.

定义 9.2.8 我们称这样定义的射影空间 $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的射影扩张. 同时, 对 $\mathcal{A}$ 的每一个仿射子空间 $\mathcal{B}$, 定义了射影扩张 $\mathcal{B} \cup \mathcal{P}_\infty(\mathcal{B})$. 这里 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 的一个射影子空间.

证明: 用 $x'_0 \in V' \setminus V$ 确定了一个线性形式 l, 它满足 $l|_V = 0$, $l(x'_0) = 1$. 按照 9.2.6, $\{l = 1\}$ 是 V 上的一个仿射空间 $\mathcal{A}_l$. $o \in \mathcal{A}$ 的选法确定了一个仿射双射 $\chi = \chi(0, x'_0) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_l$, 使得 $p \mapsto (p - o) + x'_0$. 如在 9.2.2 中那样, 将 χ 扩张到 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 上去.

如果 $o' \in \mathcal{A}$, $x''_0 \in V' \setminus V$, 可用 $l(\alpha x''_0) = 1$ 去确定 α. 考察膨胀

$$f : p \in \mathcal{A} \mapsto \alpha(o - o') + (\alpha x''_0 - x'_0) + \alpha(p - o) + o \in \mathcal{A}.$$

于是人们发现, $\chi' = \chi(o', x''_0)|_{\mathcal{A}} : \chi'(p) = \chi \circ f(p)$. 最后注意到: 按照 9.2.4, 对膨胀 f, 成立 $\mathcal{P}_\infty(f) = \mathrm{id}$. □

补充 9.2.9 考虑 V 上的一个仿射空间 A 和它的射影扩张 $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$. $\mathcal{A}$ 的一个仿射参照系 $P = \{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ 可按如下方式确定了一个射影参照系 Q:

将 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 写成 $\mathcal{P}(V' \setminus V)$ 和 $\mathcal{P}(V)$. 对 $p_0 \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(V' \setminus V)$, 选一个坐标 b_0. 令 $p_i - p_0 = b_i$, $1 \le i \le n$. 则 $\{b_0, b_1, \cdots, b_n\}$ 是 V' 的一组基, 且对 $i > 0$, 有 $b_i \in V$. 于是用 $q_i = [b_i]$, $0 \le i \le n$ 及 $e = \sum_{i=0}^n b_i$ 就给出一个射影参照系 Q.

现如 $p=\sum_{i=0}^n \alpha_i p_i$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个点，其中 $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$，则 $(1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是 p 关于 Q 的齐次坐标. e 有坐标 $(1,1,\cdots,1)$ (今后称它为单位点)，而 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 中的点具有形如 $(0,\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 的坐标.

证明:

$$p=\sum_{i=0}^n \alpha_i p_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i(p_i-p_0)+p_0=\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + b_0.$$

$$e=\sum_{i=0}^n b_i.$$

$\{b_1,\cdots,b_n\}$ 是 V 的基. □

在 9.2.4 中我们已经用 $\mathcal{P}_\infty(\varphi)=\mathcal{P}(f_\varphi)$ 把 $\varphi\in$ Aff $(\mathcal{A})$ 扩张成 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})=\mathcal{P}(V)$ 的一个射影变换. 我们用下述引理来补充这个结果.

引理9.2.10 考虑 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 的射影扩张 $\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$.

$\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 的射影变换的群 $Pro(\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}))$ 具有一个与仿射变换群 Aff $(\mathcal{A})$ 同构的子群. 它们正好是这样的射影变换，即变 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 至其自身. 对这样的 π，有

$$\mathcal{P}_\infty(\pi|\ \mathcal{A})=\pi|\ \mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}).$$

证明: 按照 9.2.7，我们能将 $\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 恒同于 $\mathcal{P}(V')$，将 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 恒同于 $\mathcal{P}(V)$，V 是 V' 的一个余维数为 1 的子空间.

考虑 $\pi=\mathcal{P}(f'), f'\in GL(V')$. $\mathcal{P}(f')|\ \mathcal{P}(V)$ 将 $\mathcal{P}(V)$ 变至其自身中，这意味着 $f=f'|\ V\in GL(V)$. 通过与一个适当的相似相乘，我们能得出：对所有 $x'\in V'$，有 $f(x')-x'\in V$. 即如果我们固定一个 $x_0'\in V'\setminus V$，则对 $x\in V$，有

$$f'(x_0'+x)-f'(x_0')=f(x);\quad f'(x_0')-x_0'=a\in V.$$

即$\mathcal{P}(f')|\,\mathcal{P}(V'\backslash V)$是一个仿射变换$\varphi$，它是用$\varphi(o)=a+o, f_\varphi=f$来给出的.

因为这里$a\in V$和$f\in GL(V)$能任意预先给定，所以每个$\varphi\in$ Aff $(\mathcal{A})$可用一个适当的$f'\in GL(V')$来表示.

最后注意：利用前面所导入的记号，有

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\infty(\pi|\mathcal{A})&=\mathcal{P}_\infty(\varphi)=\mathcal{P}(f)=\mathcal{P}(f'|V)\\&=\pi|\mathcal{P}(V)=\pi|\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

□

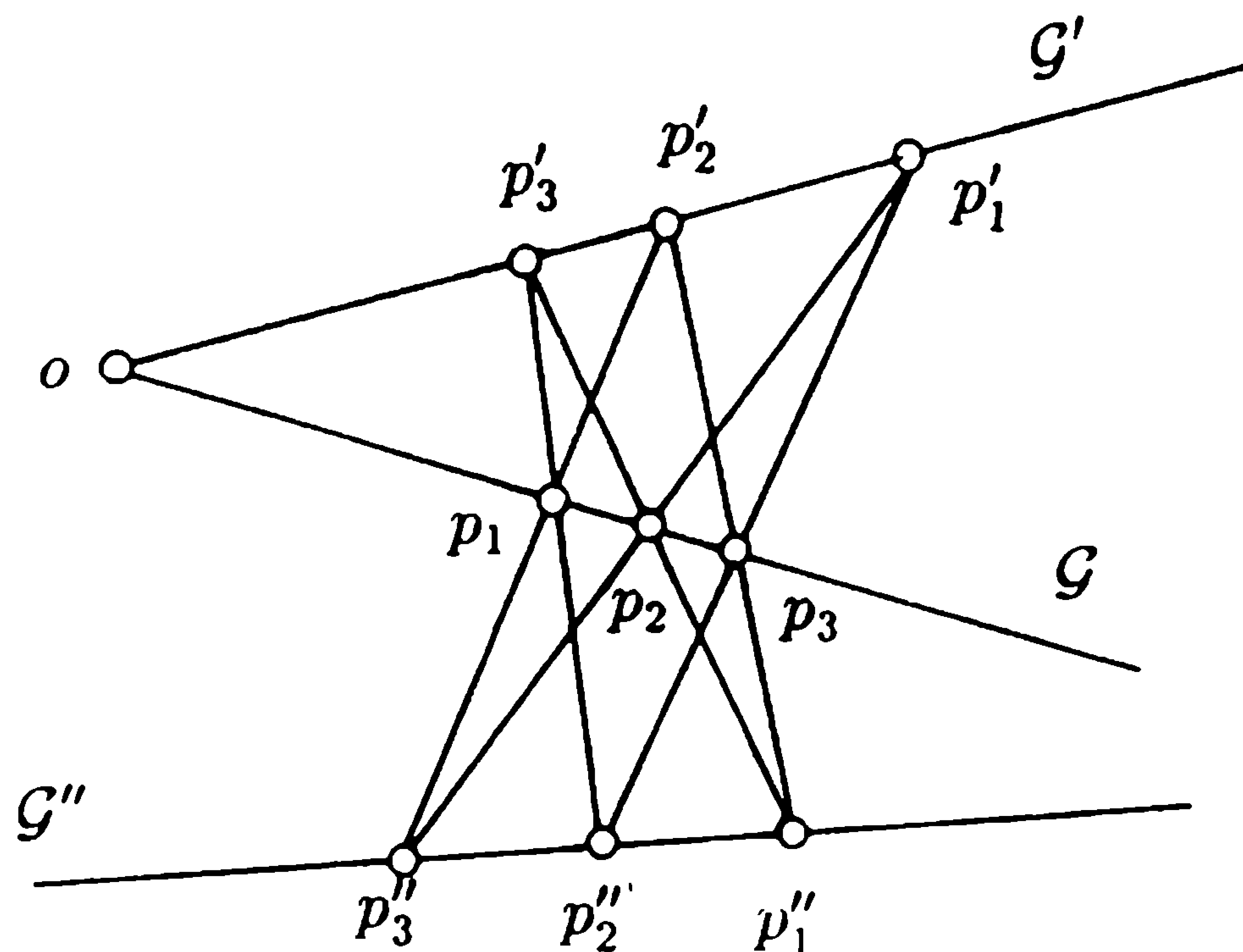
在9.2.6和9.2.7中我们已经指出，仿射空间的射影扩张$\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$是射影等价于一个射影空间$\mathcal{P}(V')$. 在扩张中具有特色的子空间$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$这时对应于$\mathcal{P}(V')$中具有特色的子空间$\mathcal{P}(V)$.

我们现在要利用此关系，从仿射平面的两个基本定理去导出射影平面的基本定理.

首先，我们来证明Pappos-Pascal定理 (射影形式). 对于其仿射形式，可参见7.3.16.

定理9.2.11 设$\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$是射影平面中的两条直线，而且有$\mathcal{G}\cap\mathcal{G}'=\{o\}$. 设$p_1,p_2,p_3$是在$\mathcal{G}\setminus\{o\}$上的三个不同的点，$p_1',p_2',p_3'$是在$\mathcal{G}'\setminus\{o\}$上的三个不同的点，于是

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{p_1p_3'}\cap\mathcal{G}_{p_3p_1'}&=\{p_2''\},\\\mathcal{G}_{p_2p_1'}\cap\mathcal{G}_{p_1p_2'}&=\{p_3''\},\\\mathcal{G}_{p_3p_2'}\cap\mathcal{G}_{p_2p_3'}&=\{p_1''\},\end{aligned}$$



且p_1''，p_2''，p_3''是共线的.

证明: 首先我们容易看出：在已作出的假定下，我们用来构造交集的直线偶是不同的．于是$p_2'' \neq p_3''$．这是因为

$$\begin{aligned}\{p_2''\} \cap \{p_3''\} &= (\mathcal{G}_{p_1p_3'} \cap \mathcal{G}_{p_3p_1'}) \cap (\mathcal{G}_{p_2p_1'} \cap \mathcal{G}_{p_1p_2'}) \\ &= (\mathcal{G}_{p_1p_3'} \cap \mathcal{G}_{p_1p_2'}) \cap (\mathcal{G}_{p_3p_1'} \cap \mathcal{G}_{p_2p_3'}) \\ &= \{p_1\} \cap \{p_1'\} = \emptyset.\end{aligned}$$

令$\mathcal{G}_{p_2''p_3''} = \mathcal{G}''$．考虑仿射平面$\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{G}''$．即对$\mathcal{A}$而言，$\mathcal{G}''$扮演着非实质直线$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$的角色.

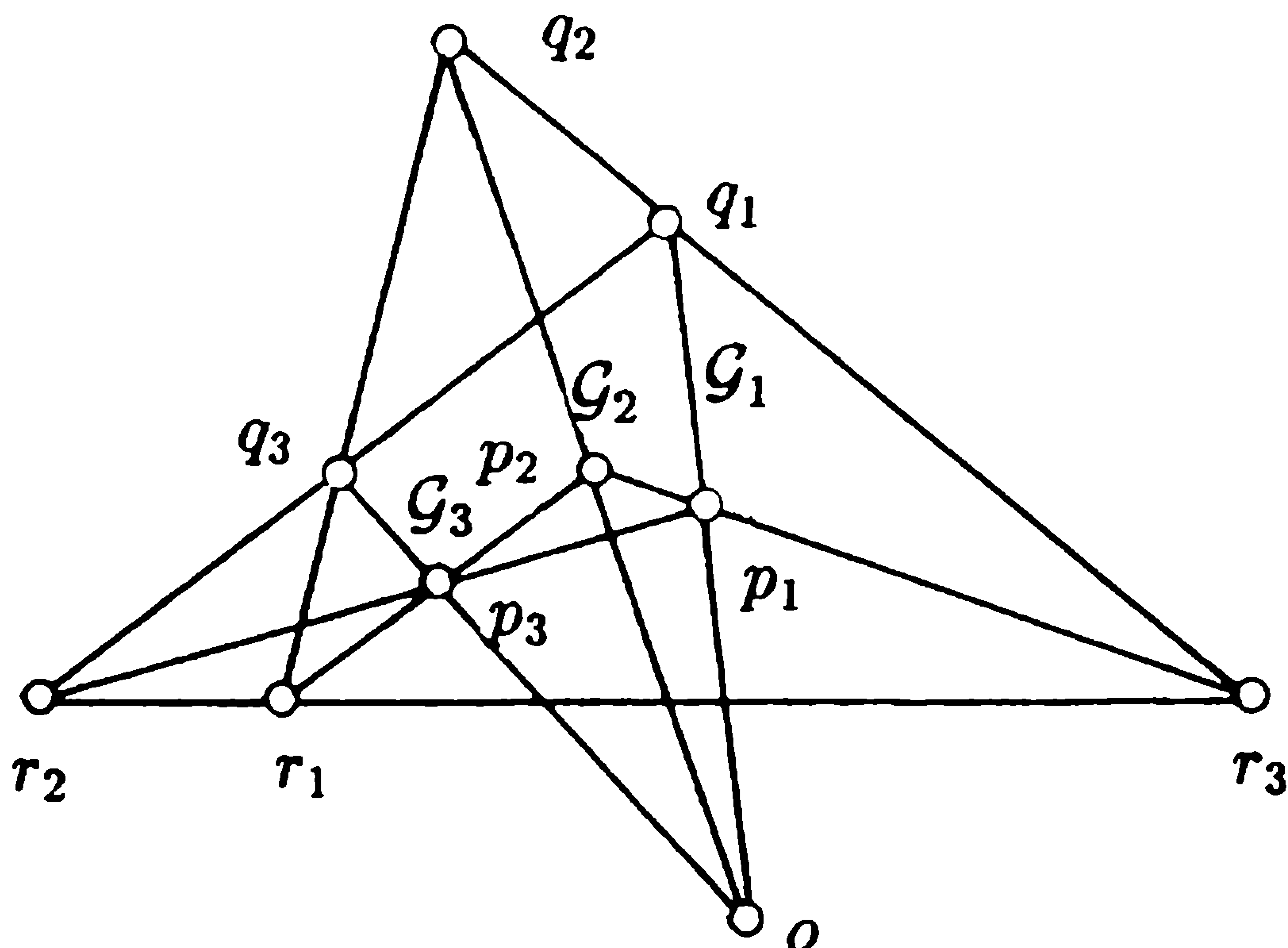
对直线$\mathcal{G}^* \neq \mathcal{G}''$，我们也把其从属于$\mathcal{A}$的部分$\mathcal{G}^* \cap \mathcal{A}$记为$\mathcal{G}^*$．于是$\mathcal{G}^*$是$\mathcal{A}$中的直线．由此我们有：

$$\mathcal{G}_{p_1p_3'} \| \mathcal{G}_{p_3p_1'} \quad 和 \quad \mathcal{G}_{p_1p_2'} \| \mathcal{G}_{p_2p_1'},$$

因此按照7.3.16：$\mathcal{G}_{p_2p_3'} \| \mathcal{G}_{p_3p_2'}$，即射影直线$\mathcal{G}_{p_2p_3'}$和$\mathcal{G}_{p_3p_2'}$的交点$p_1''$在$\mathcal{G}''$上. □

Desargues定理（射影形式）可叙述如下（对于它的仿射形式，可参见7.3.17)：

定理9.2.12 设 $\mathcal{G}_1$，$\mathcal{G}_2$，$\mathcal{G}_3$是射影平面中的三条不同的直线，且 $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 = \{o\}$. 设$p_i, q_i$是 $\mathcal{G}_i \setminus \{0\}, i = 1,2,3,$ 上的不同点. 于是



$$\mathcal{G}_{p_1p_2} \cap \mathcal{G}_{q_1q_2} = \{r_3\},$$

$$\mathcal{G}_{p_1p_3} \cap \mathcal{G}_{q_1q_3} = \{r_2\},$$

$$\mathcal{G}_{p_2p_3} \cap \mathcal{G}_{q_2q_3} = \{r_1\},$$

且r_1，r_2，r_3是共线的.

证明: 我们先证明所考虑的直线的交总是仅由一点构成，且$r_3 \neq r_2$. 令 $\mathcal{G}_{r_3r_2} = \mathcal{G}_\infty$，且考虑仿射平面$\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{G}_\infty$. 于是直线 $\mathcal{G}_{p_1p_2}$和 $\mathcal{G}_{q_1q_2}$的仿射部分是平行的，且直线 $\mathcal{G}_{p_1p_3}$和 $\mathcal{G}_{q_1q_3}$的仿射部分也同样如此. 因而从7.3.17就可得出$r_1 \in \mathcal{G}_\infty$. □

我们以射影几何的基本定理来结束本节. 对于仿射几何的基本定理，见7.2.16. 如在那儿相仿，我们用$\alpha \in K \mapsto \bar{\alpha} \in K$来记基域$K$的一个同构. 且如果$Q = \{q_1, \cdots, q_n, e\}$是射影空间

$\mathcal{P}$的一个射影参照系，且$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$为V'的一个从属的基，则利用

$$x=\sum_{i=0}^{n}\xi_i b_i\mapsto\bar{x}=\sum_{i=0}^{n}\bar{\xi}b_i$$

可定义

$$(^-):\mathcal{P}\to\mathcal{P}.$$

定理9.2.13 设$\mathcal{P}=\mathcal{P}(V')$是一个维数$\geq 2$的射影空间．射影直射变换

$$\bar{\pi}:\mathcal{P}\to P$$

是一个双射，它把射影直线变至射影直线．可将一个这样的$\bar{\pi}$写成形如$\pi\circ(^-)$．这里π是一个射影变换，借助于如上所定义的域同构，$(^-)$是一个直射变换，它使射影参照系Q不变．

注：与7.2.16不同的是我们在这里不必假设$1+1\neq 0$．为了保险起见，这个假设被做成：仿射空间的一条直线至少要包含三个不同的点．此外，还有足够的假设：$K\neq\mathbf{Z}_2$．

与此相反，在射影空间中，一条直线至少有三个不同的点．我们在下面将会看到，在射影空间中与7.1.13相对应的定理的证明会极大地得到简化．

证明：我们首先证明：射影直射变换$\bar{\pi}$将$\mathcal{P}$的一个l维子空间$\mathcal{L}$变至同样的空间，对此可参见7.2.13．

我们对l运用归纳法．对$l=1$，这是我们的假设．

假设对$l-1$维，断言已被证明．现在在$\mathcal{L}$中选一点o及一个不含o的$l-1$维的子空间$\mathcal{K}$，每点$p\in\mathcal{L}$属于过o的一条直线$\mathcal{G}$，且$\mathcal{G}$与$\mathcal{K}$相交于一点q．$\bar{\pi}(o)\notin\bar{\pi}(\mathcal{K})$，$\bar{\pi}(\mathcal{K})$是$l-1$维子空间，于是$\bar{\pi}(\mathcal{L})$是由在直线$\bar{\pi}(\mathcal{G})$上的点的集合所构成的空间，$\mathcal{G}$如上所述．

在$\mathcal{P}$中选取余维数为1的子空间$\mathcal{P}_\infty$．存在一个射影变换π'，使得π'和$\bar{\pi}$的复合（我们仍将它记成$\bar{\pi}$）把$\mathcal{P}_\infty$变至其自

身. 即我们能谈论在仿射空间 $\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\infty$ 上的仿射直射变换 $\bar{\varphi} = \bar{\pi}|\mathcal{A}$.

对 $\bar{\varphi}$, 7.2.13 是满足的，于是我们能按照 7.2.13, 把 $\bar{\varphi}$ 写成形如 $\varphi \circ (\bar{\ })$, 这里 $(\bar{\ })$ 将 $\mathcal{A}$ 的仿射参照系 $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$ 的点固定不动，且 $(\bar{\ })(\sum_i \alpha_i p_i) = \sum_i \bar{\alpha}_i p_i$. 于是在按照 9.2.9 的方法从 P 所构造出来的射影参照系 Q 上，如前所述的那样定义了 $(\bar{\ })$. □

与 7.2.19 相对照的是:

系 9.2.14 对 **R** 上的维数 ≥ 2 的射影空间，每个直射变换是一个射影变换.

证明: 这可从 7.2.18 利用 9.2.13 而得到. □

9.3 附录: 一般射影和仿射平面

对 3 维向量空间 V 上的射影平面 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$, 成立着下列事实:

$(A1)$ 对两个不同的点 p 和 q, 正好存在一条包含 p 和 q 的直线.

$(\overline{A1})$ 对两条不同的直线 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$, 正好存在一点 $p_{\mathcal{GH}}$, 它包含在这两条直线之中.

$(A*)$ 每条直线至少包含三点，而且每点至少包含在三条直线之中.

当我们考虑，譬如说， $K = \mathbf{Z}_2$ 上 3 维向量空间上的射影平面时，于是每条直线至多包含三点，而且每点至多包含在三条直线之中.

在本节中我们现在欲考察所谓的一般射影平面 $\tilde{\mathcal{P}}$, 这是用公理 $(A1), (\overline{A1})$ 及 $(A*)$ 所定义的对象. 人们能证明: 一个这样的 $\tilde{\mathcal{P}}$ 不一定是射影平面 $\mathcal{P}(V)$. 但对于表述诸如 Desargues 定理或 Pappos-Pascal 定理 (见 9.2.11 和 9.2.12) 等基本定理,

$\tilde{\mathcal{P}}$的结构已经是足够的了. 至于这些定理是否成立, 这是另一个问题. 事实上, Pappos-Pascal定理为真是等价于$\tilde{\mathcal{P}}$能被视为$\mathcal{P}(V)$.

对基本定理, 人们将试图导入用坐标去描述$\tilde{\mathcal{P}}$的点. 为此目的, 考虑一个一般的仿射平面$\tilde{\mathcal{A}}$是有益处的. 通过从$\tilde{\mathcal{A}}$中析出直线 $\mathcal{G}_\infty$, 形成了$\tilde{\mathcal{A}}$, 对$\tilde{\mathcal{A}}$来说, $\mathcal{G}_\infty$扮演了非实质直线的角色.

在这个附录中我们只限于对一个坐标区域定义加法和乘法, 交换律的有效性相应于Pappos-Pascal定理的有效性, 结合律的有效性相应于所谓的蝴蝶定理的有效性. 我们将指出: 这等价于Desargues定理.

定义9.3.1 1. 所谓一个 (一般的) 射影平面$\tilde{\mathcal{P}}$是指一个集合, 其中的元素称为点, 且某些称为直线的子集被特别指定, 使得上述列出的性质$(A1)$,$(\overline{A1})$和$(A*)$成立.

2. 所谓一个 (一般的) 仿射平面$\tilde{\mathcal{A}}$是指射影平面$\tilde{\mathcal{P}}$中的直线$\mathcal{G}_\infty$的余集$\tilde{\mathcal{P}}\backslash\mathcal{G}_\infty$. 称$\mathcal{P}$中属于$\mathcal{A}$的不等于$\mathcal{G}_\infty$的直线为 (仿射) 直线, 我们仍用$\mathcal{G}$来记它. 于是一条仿射直线也是一条射影直线, 由此, 从属于$\mathcal{G}_\infty$的点被析出.

也称$\mathcal{G}_\infty$的点为$\tilde{\mathcal{A}}$的非实质点.

我们说$\tilde{\mathcal{A}}$的两条直线 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{G}'$是平行的, 如果它们与$\mathcal{G}_\infty$相交于同样的非实质点, 记为: $\mathcal{G}\parallel\mathcal{G}'$.

命题9.3.2 设$\tilde{\mathcal{A}}=\tilde{\mathcal{P}}\backslash\mathcal{G}_\infty$是一个一般的仿射平面. 于是成立:

$(A1)'$ 对每两点p和q, 正好存在一条直线$\mathcal{G}_{pq}$, 它包含这两点.

$(\overline{A1})'$ 对一条直线$\mathcal{G}$及一点$p\notin\mathcal{G}$, 正好存在一条平行于$\mathcal{G}$的直线$\mathcal{G}'$, 且它包含p.

$(A*)'$ 每条直线至少包含两点, 而每点至少包含在三条直

线之中.

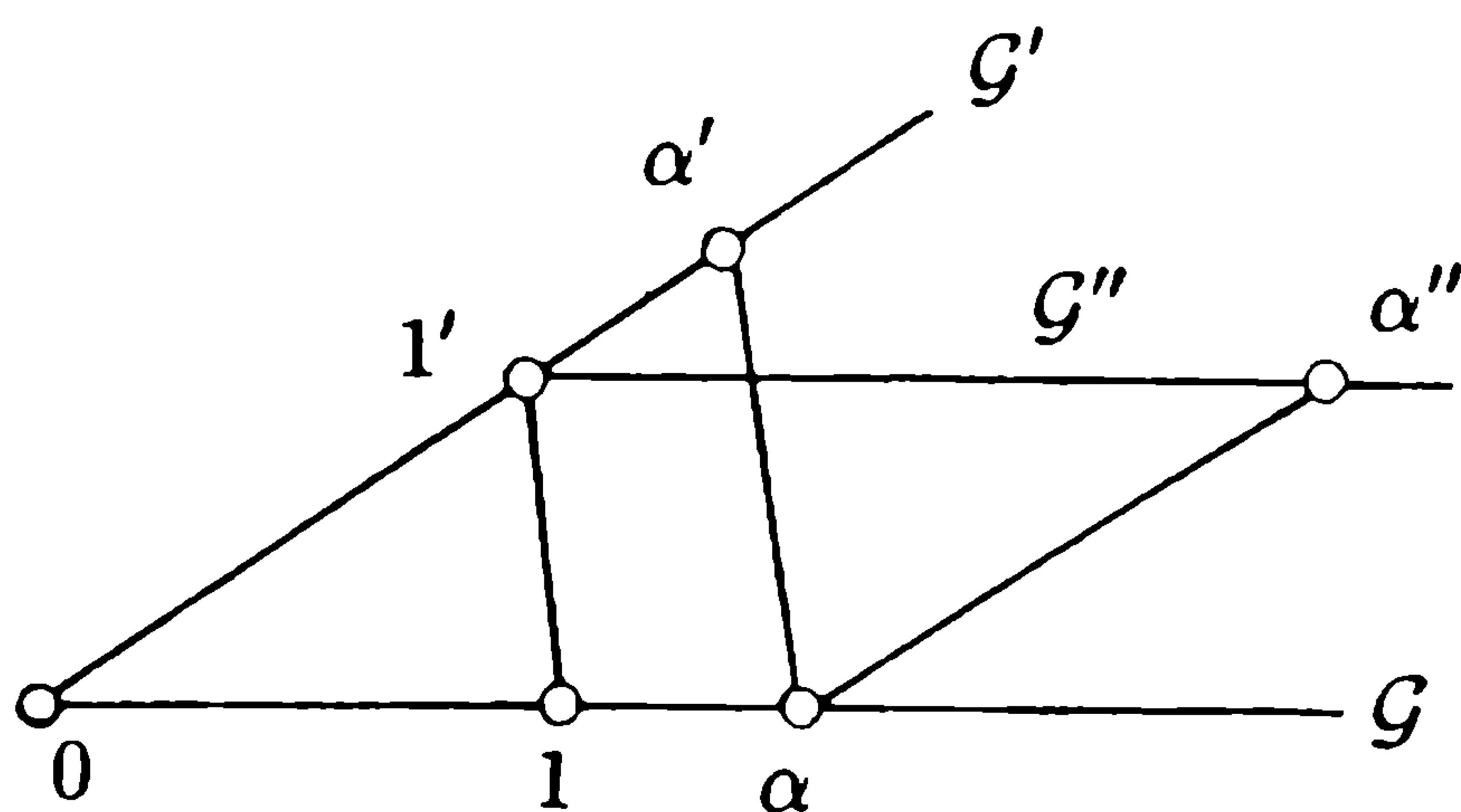
证明: 由于$\tilde{\mathcal{A}}$定义为$\tilde{\mathcal{P}}\setminus\mathcal{G}_\infty$以及平行性的定义, $(A1)'$可从$(A1)$得出. $(\overline{A1})'$可从$(\overline{A1})$得出, 这里我们选取$\mathcal{G}'$为通过p和$\mathcal{G}$的非实质点的射影直线中的仿射部分. $(A*)'$得自$(A*)$. □

注解9.3.3 容易证明, 一般仿射平面$\tilde{\mathcal{A}}$是用$(A1)',(\overline{A1})'$及$(A*)'$来说明其特征的.

人们能将相互平行的仿射直线的每一个类与一个非实质点相联系, 这些非实质点的集合$\mathcal{G}_\infty$作为非实质直线而被定义, 于是$\tilde{\mathcal{A}}\cup\mathcal{G}_\infty$是一个一般的射影平面$\tilde{\mathcal{P}}$, 它的点是$\tilde{\mathcal{A}}$的点和$\mathcal{G}_\infty$的点, 以及它的直线$\mathcal{G}_\infty$是仿射直线, 它们被扩张至$\mathcal{G}_\infty$中与它们相联系的非实质点.

于是这意味着我们可以不加限制地把一个一般仿射平面$\tilde{\mathcal{A}}$考虑成点$p,q,\cdots$的集合, 且在它们中已特别取定了称为直线的子集$\mathcal{G},\mathcal{H},\cdots$, 只要$(A1)',(\overline{A1})'$和$(A*)'$成立.

定义9.3.4 设$\tilde{\mathcal{A}}$是一般的仿射平面.



1. 所谓$\tilde{\mathcal{A}}$的一个仿射参照系是指$\tilde{\mathcal{A}}$中不属于一条直线的三个标记为$\{0,1,1'\}$的点. 我们也把直线$\mathcal{G}_{01}$和$\mathcal{G}_{01'}$分别标记为$\mathcal{G}$和$\mathcal{G}'$. 称0为参照系$\{0,1,1'\}$为原点, $\mathcal{G}$和$\mathcal{G}'$是它的轴, 称1和$1'$为在这些轴上的单位点.

我们也把$\mathcal{G}$的点记为$\alpha,\beta,\cdots$. 我们把每个$\alpha\in\mathcal{G}$按下法与点$\alpha'\in\mathcal{G}'$相联系: $0'=0$, 且如果$\alpha\neq 0$, 则设α'是$\mathcal{G}'$与过α的、并与$\mathcal{G}_{11'}$平行的直线的交点.

最后我们记$\mathcal{G}''$为过$1'$且平行于$\mathcal{G}$的直线. 我们把每个

$\alpha \in \mathcal{G}$按下法与 $\mathcal{G}''$上标记为α''的元素相联系： α''是 $\mathcal{G}''$与过α的、且与 $\mathcal{G}'$平行的直线的交点. 于是特别地，有$0'' = 1'$.

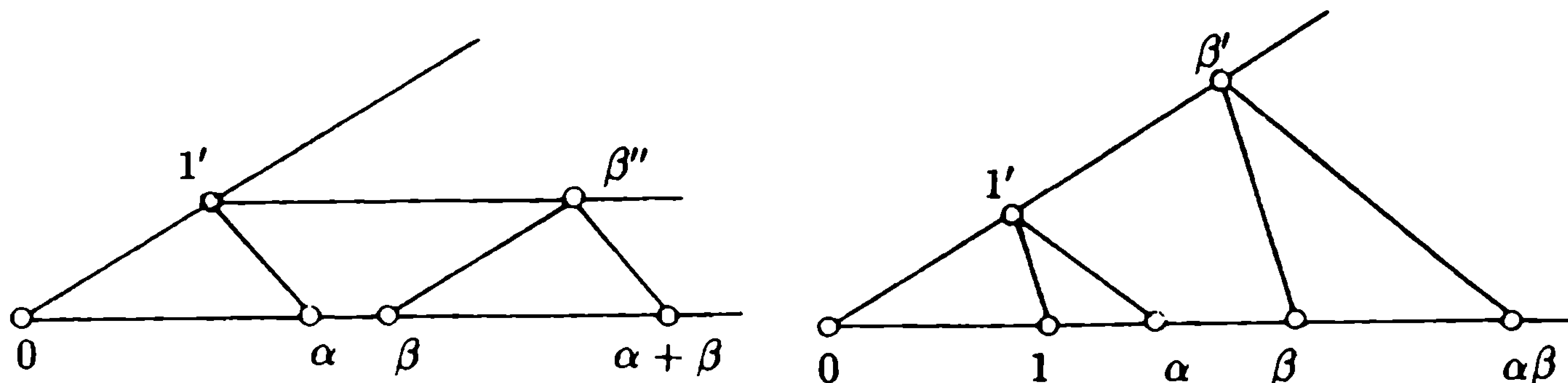
2. 在 $\mathcal{G}$的点的集合上，我们定义加法

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longmapsto \alpha + \beta \in \mathcal{G}$$

如下： $\alpha + \beta$是 $\mathcal{G}$与过$\beta'' \in \mathcal{G}''$的、且与 $\mathcal{G}_{\alpha 1'}$平行的直线的交点，我们也定义乘法

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longmapsto \alpha\beta \in \mathcal{G}$$

如下： $\alpha\beta$是 $\mathcal{G}$与过$\beta' \in \mathcal{G}'$的且与 $\mathcal{G}_{\alpha 1'}$平行的直线的交点.



注解9.3.5 如果$\tilde{A}$是K上的一个2维向量空间V上的仿射平面$\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$, 则$\{0, 1, 1'\}$正好是$\mathcal{A}$的在7.2.7的意义下的一个仿射参照系. 在那儿，它用$\{o, p_1, p_2\}$来标记的. $\{d_1 = p_1 - o, d_2 = p_2 - o\}$是$V$的一组基，过$0 = o$及$1 = p_1$的直线 $\mathcal{G}$上的点可写成形如$\alpha d_1 + o$, 其中$\alpha \in K$. 现在人们容易地看到，上述以$\alpha + \mathcal{B}$标记的点在此情形下可通过$(\alpha + \beta) d_1 + o$来给出，而且在那儿的$\alpha\beta$可用$\alpha\beta d_1 + o$给出.

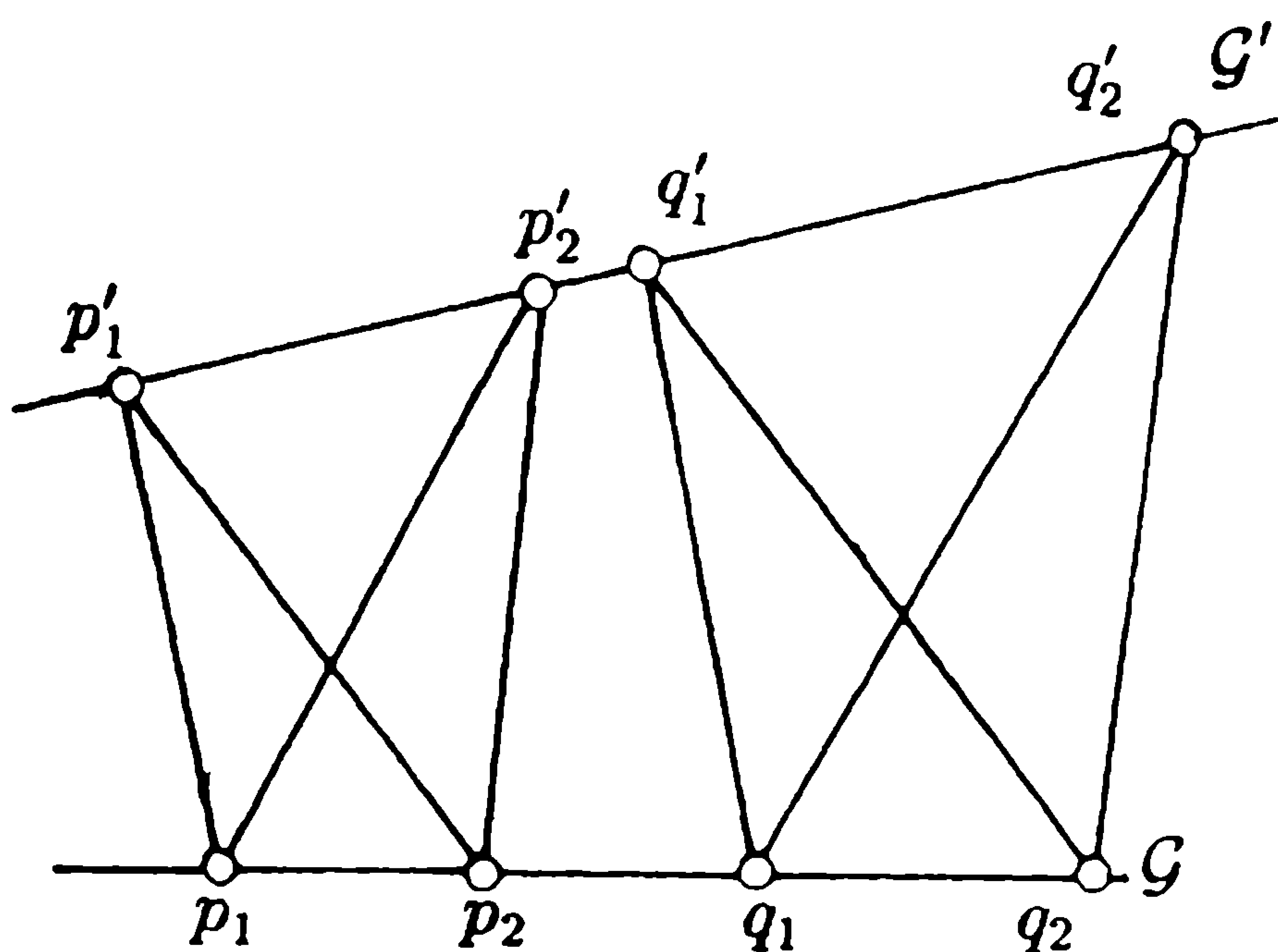
因为K是一个域，诸如对加法和乘法的结合律及对加法和对乘法的交换律这样的规则是成立的，因为我们总是限于交换域上. 进而分配律成立.

在一般仿射平面$\tilde{A}$的情形下，每一个这样的规则的有效性意味着，某一个基本定理是满足的. 我们首先来考察交换律.

引理9.3.6 设$\tilde{A}$是一个一般的仿射平面. 7.3.16中的仿射的Pappos-Pascal定理的有效性是等价于：对$\tilde{A}$的每一个仿射参照系，加法和乘法是交换的，即$\alpha+\beta=\beta+\alpha; \alpha\beta=\beta\alpha$.

证明: 选取$\{0,1,1'\}$. 从$\alpha+\beta=\beta+\alpha$开始，我们让7.3.16中的直线 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$分别与9.3.4.1中的平行直线 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}''$相对应，且把7.3.16中的点$\{p_1,p_2,p_3\}$和$\{p_3',p_2',p_1'\}$分别与9.3.4.1 中的点$\{\alpha, \beta,\alpha+\beta\}$和$\{1',\alpha'',\beta''\}$相对应. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$正好意味着过$p_2'$的与 (7.3.16中的) $\mathcal{G}_{p_2p_3'}$平行的直线与直线 $\mathcal{G}$相交于(7.3.16中的)点p_3，过α''的与 (9.3.4.2 中的) $\mathcal{G}_{\beta 1'}$平行的直线与直线 $\mathcal{G}$相交于 (9.3.4.2中的)点$\alpha+\beta$.

类似地，对于$\alpha\beta=\beta\alpha$, 我们将7.3.16中的直线 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$分别与9.3.4.2中的直线$\mathcal{G},\mathcal{G}'$相对应，且把7.3.16中的点$\{p_1,p_2,p_3\}$和$\{p_3',p_2', p_1'\}$分别与9.3.4.2中的点$\{\alpha,\beta,\alpha\beta\}$和$\{1',\alpha',\beta'\}$相对应. $\alpha\beta=\beta\alpha$意味着，过p_2'的与$\mathcal{G}_{p_2p_3'}$ (7.3.16) 相平行的直线与直线$\mathcal{G}$相交于p_3，过α'的与$\mathcal{G}_{\beta 1'}$ (9.3.4.2) 相平行的直线与直线$\mathcal{G}$相交于$\alpha\beta$. 因为这对每一个仿射参照系都应该成立，于是就得出了我们的结论.



我们欲证明，结合律等价于下列的基本定理.

定义9.3.7 所谓蝴蝶定理是指下列的关于$\tilde{A}$的一般仿射平面的陈述:

设 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$是不同的直线， p_1,p_2,q_1,q_2是在$\mathcal{G}$上，但不在 $\mathcal{G}'$上的点，且p_1',p_2',q_1',q_2'是在 $\mathcal{G}'$上，但不在 $\mathcal{G}$

上的点. 由

$$\mathcal{G}_{p_1p_1'} \parallel \mathcal{G}_{q_1q_1'};$$
$$\mathcal{G}_{p_1p_2'} \parallel \mathcal{G}_{q_1q_2'};$$
$$\mathcal{G}_{p_2p_1'} \parallel \mathcal{G}_{q_2q_1'}$$

可得出

$$\mathcal{G}_{p_2p_2'} \parallel \mathcal{G}_{q_2q_2'}.$$

引理9.3.8 设 $\tilde{A}$ 是一个一般的仿射平面，蝴蝶定理的有效性是等价于：对 $\tilde{A}$ 的所有仿射参照系，加法和乘法是可结合的，即 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ 及 $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$.

证明: 为简单起见，我们只对乘法进行讨论. 9.3.7中的直线 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ 相应于 9.3.4.1中具有相同标记的直线. 9.3.7中的点 $\{p_1,p_2,q_1,q_2\}$ 相应于9.3.4.2 中的点 $\{\beta,\alpha\beta,\beta\gamma,(\alpha\beta)\gamma\}$, 且点 $\{p_1',p_2',q_1',q_2'\}$ 相应于点 $\{1',\beta',\gamma',(\beta\gamma)'\}$. 在这样的对应下, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ 就意味着: 过 $(\beta\gamma)'(\sim q_2')$ 的、关于 $\mathcal{G}_{(\alpha\beta)\beta'} \parallel \mathcal{G}_{\alpha 1'}(\sim \mathcal{G}_{p_2p_2'})$ 的平行线与直线 $\mathcal{G}$ 相交于 $(\alpha\beta)\gamma(\sim q_2)$. □

注解9.3.9 由加法和乘法的定义可得出 $0+\alpha=\alpha+0=\alpha$ 和 $1\alpha=\alpha 1=\alpha$. 如我们所见，交换律和结合律相应于某种基本定理. 对分配律也同样成立. 现在人们能问: 在以这种方式出现的基本定理之间有怎样的相关性？ Hilbert和Hessenberg已经回答说: 由Pappos-Pascal定理可推出所有其他的基本定理. 为了证明，在 $\mathcal{G}$ 的点的集合上用上面所定义的加法和乘法定义了一个 (交换) 域 K 的结构，这是必需的. 因而不难验证，可把 $\tilde{A}$ 写成 $\mathcal{A}(V)$, 这里 V 是一个2维向量空间，在其上的域 K 已被唯一确定了 (至多差一个同构).

Hilbert也能证明，单由Desargues定理的有效性也可得出：上面所述的加法和乘法在集合 $\mathcal{G}$ 上定义了一个不必需是

交换的域 K 的结构，且由此可把 $\tilde{A}$ 表述成 $\mathcal{A}(V)$，这里 V 是 K 上的一个2维向量空间.

我们在这里不想逐一地对此进行说明. 我们宁可用一个起源于著者的关于两个基本定理的等价性来结束这个附录.

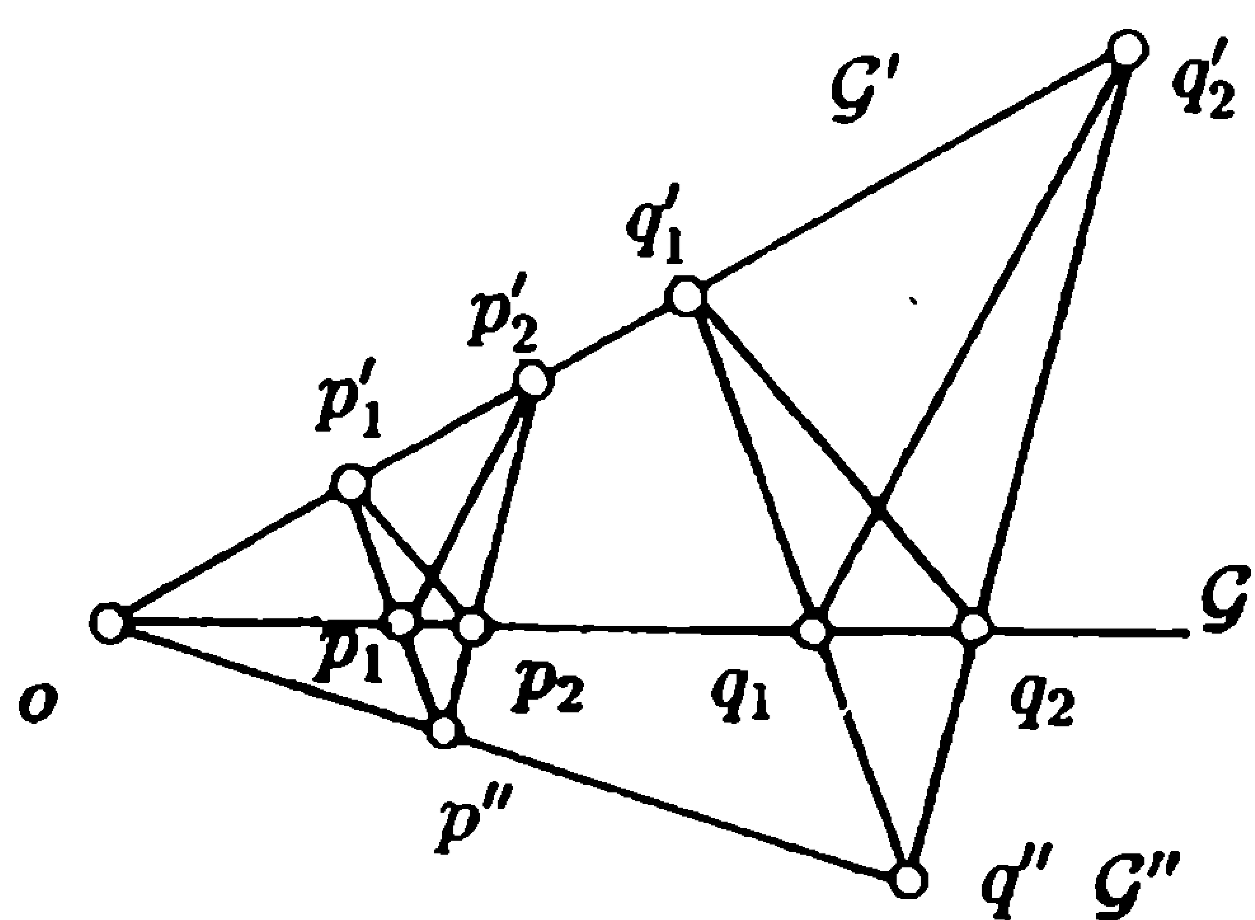
定理9.3.10 在一个一般的仿射平面 $\tilde{A}$ 中，Desargues 定理 (D) 和蝴蝶定理 (S) 是等价的.

基于9.3.9, 我们由此得到:

定理9.3.11 相应于结合律的基本定理的有效性的充要条件是一般的仿射平面 $\tilde{A}$ 可写成关于一个并不必需是交换域 K 上的仿射平面 $\mathcal{A}(V)$.

定理9.3.12 相应于交换律的基本定理的有效性的充要条件是一般的仿射平面 $\tilde{A}$ 可写成关于一个交换域 K 上的仿射平面 $\mathcal{A}(V)$.

9.3.10 的证明:



1. (D) 成立. 如果在 (S) 的假定下，$\mathcal{G}_{p_1p_1'} \parallel \mathcal{G}_{p_2p_2'}$ 和 $\mathcal{G}_{q_1q_1'} \parallel \mathcal{G}_{q_2q_2'}$，则 (S) 中的结论是显然的. 于是我们能假定 —— 如果必要可通过重新命名 —— $\mathcal{G}_{p_1p_1'}$ 和 $\mathcal{G}_{p_2p_2'}$ 有一个公共点 p''. 设 $\mathcal{G}''$ 为过 p'' 的直线，且 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 的公共点为 o，于是 $\mathcal{G}_{q_1q_1'}$ 和 $\mathcal{G}''$ 有一个公共点 q''. 由 (D)，并应用于直线 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$ 和点 $\{p_2, p_1', p''\}$, $\{q_2, q_1', q''\}$，于是得出

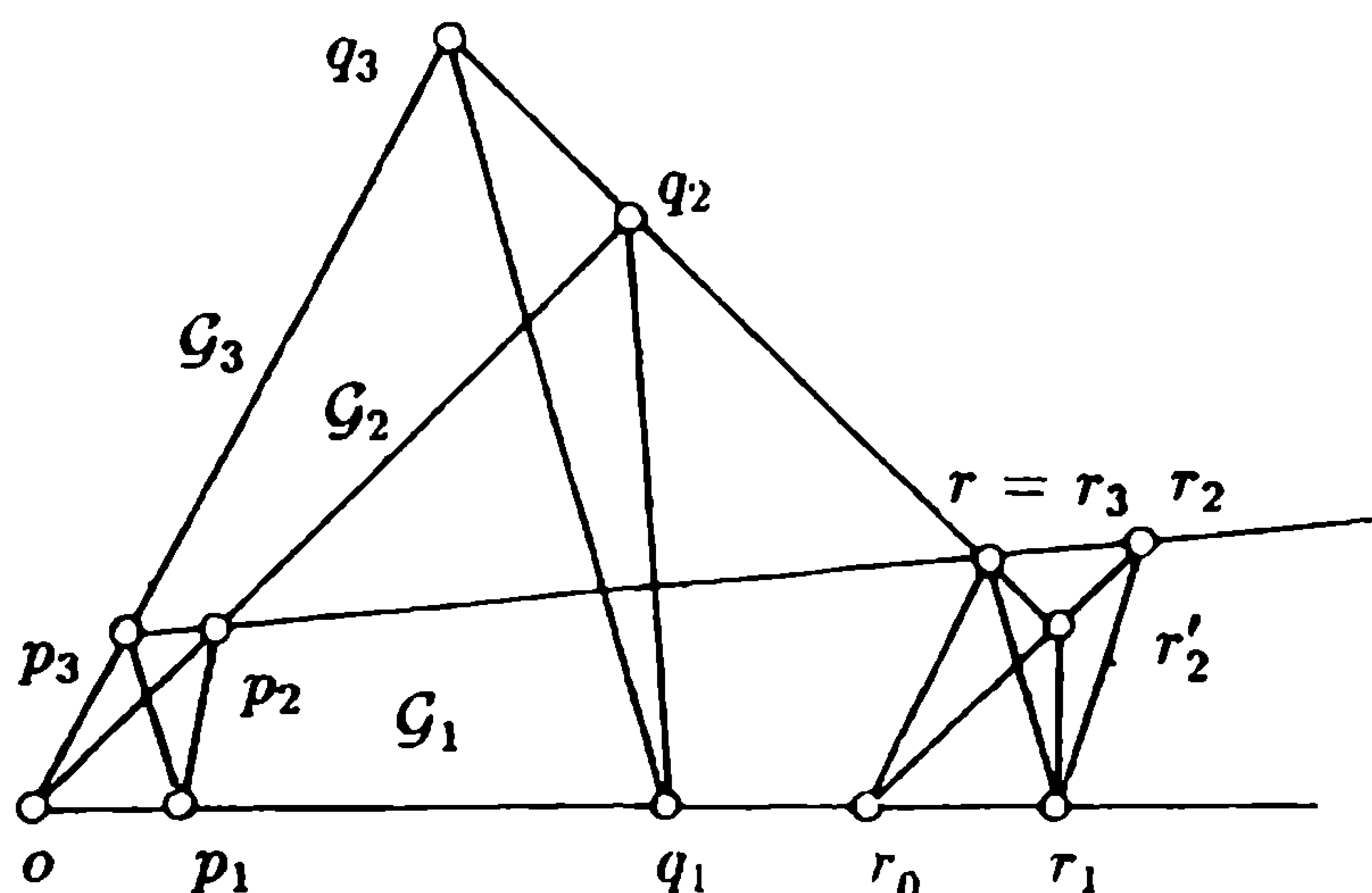
$$\mathcal{G}_{p_2p''} = \mathcal{G}_{p_2p_2'} \parallel \mathcal{G}_{q_2q''}.$$

由 (D)，并应用于 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$ 和点 $\{p_1, p_2', p''\}, \{q_1, q_2', q''\}$. 于是得出

$$\mathcal{G}_{p_2'p''} = \mathcal{G}_{p_2p_2'} \parallel \mathcal{G}_{q_2'q''}.$$

因此

$$\mathcal{G}_{q_2q''} = \mathcal{G}_{q_2'q''} = \mathcal{G}_{q_2q_2'} \parallel \mathcal{G}_{p_2p_2'}.$$



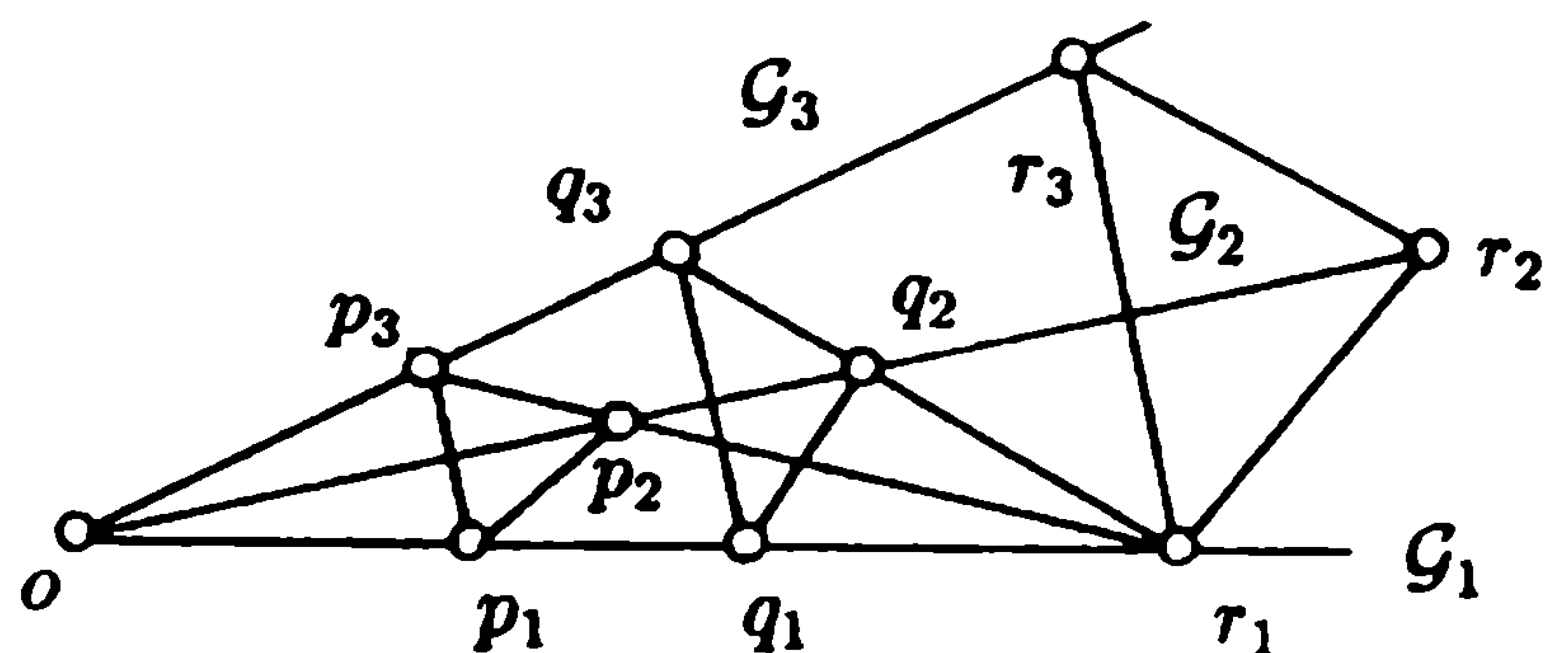
2. (S) 成立. 我们现在用形式化的等价形式来证明 (D): 假设 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ 是过 o 的三条不相同的直线. 设 p_i, q_i 是在 $\mathcal{G}_i$ 上, 但不在 $\mathcal{G}_j$ 上的不同的点, 这里 $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. $\mathcal{G}_{p_1p_3} \parallel \mathcal{G}_{q_1q_3}$, 且 $\mathcal{G}_{p_2p_3}$, $\mathcal{G}_{q_2q_3}$ 可能有一个公共点 $r = r_3$. 于是 $\mathcal{G}_{p_1p_2}$ 和 $\mathcal{G}_{q_1q_2}$ 不平行. 首先考虑 $r = r_3 \notin \mathcal{G}_1$ 的情形. 我们借助于 (S) 把四边形 $\{o, p_1, p_3, p_2\}$ 和 $\{o, q_1, q_3, q_2\}$ 分别 "搬动" 到四边形 $\{r_0, r_1, r_3, r_2\}$ 和 $\{r_0, r_1, r_3, r_2'\}$ 去. 即 r_0, r_1 属于 $\mathcal{G}_1$, 以及

$$\mathcal{G}_{r_0r_3} \parallel \mathcal{G}_{op_3} = \mathcal{G}_3;$$

$$\mathcal{G}_{r_1r_3} \parallel \mathcal{G}_{p_1p_3} \parallel \mathcal{G}_{q_1q_3};$$

$$\mathcal{G}_{r_0r_2} = \mathcal{G}_{r_0r_2'} \parallel \mathcal{G}_{op_2} = \mathcal{G}_{oq_2} = \mathcal{G}_2.$$

于是 $\mathcal{G}_{p_1p_2} \parallel \mathcal{G}_{r_1r_2}$ 和 $\mathcal{G}_{q_1q_2} \parallel \mathcal{G}_{r_1r_2'}$. 因为 $r_1 \notin \mathcal{G}_{r_0r_2'} = \mathcal{G}_{r_0r_2}$, 我们还只需要证明, $r_2 \neq r_2'$. 但因为 $\mathcal{G}_2 \neq \mathcal{G}_3$, 所以这就得自 $\mathcal{G}_{r_0r_2} = \mathcal{G}_{r_0r_2'} \neq \mathcal{G}_{r_0r_3}$.



剩下还要处理$r \in \mathcal{G}_1$的情形. 我们能假设$r \neq p_1$及$r \neq q_1$, 因为在这情形下, 结论是显然的. 将r改写为r_1, 并用$\mathcal{G}_{r_1r_2} \parallel \mathcal{G}_{q_1q_2}$, $\mathcal{G}_{r_1r_3} \parallel \mathcal{G}_{q_1q_3}$来确定$r_2 \in \mathcal{G}_2, r_3 \in \mathcal{G}_3$. 因为$\mathcal{G}_{q_2q_3}$和$\mathcal{G}_{r_2r_3}$不与$\mathcal{G}_1$相交, 所以得出$\mathcal{G}_{q_2q_3} \parallel \mathcal{G}_{r_2r_3}$. 如果$\mathcal{G}_{p_1p_2} \parallel \mathcal{G}_{q_1q_2}$, 则同样有$\mathcal{G}_{p_2p_3} \parallel \mathcal{G}_{r_2r_3}$, 于是得出$\mathcal{G}_{p_2p_3} \parallel \mathcal{G}_{q_2q_3}$, 因而与我们的假设矛盾. □

9.4 交比, v. Staudt定理

在7.3.7中我们对一条仿射直线上的三个不同的点给出了它们的单比. 这是一个仿射不变量, 即其值在仿射变换下是不变的. 这是因为我们在9.1.11中知道, 射影直线上的三个不同的点可用一个射影变换将它们变至这条直线上的任何三个其他不同的点. 于是为了定义一个非平凡的射影不变量, 需要直线上的四个点.

现在我们通过对射影直线上的四个不同的点来导入所谓的交比. 在4个点的置换群S_4下, 一般可得出六个不同值的交比. 在射影变换下, 交比不变, 在射影直射变换下, 仅差一个域同构.

调和四点列起了一个突出的作用. 它以自然的方式出现在一个完全四边形处. 作为 v. Staudt 基本定理的终结, 我们证明, 将调和四点列变至自身的射影直线的双射是一个射影变换, 至多只差一个域同构.

我们从K上的射影直线的模型开始进行讨论.

定义9.4.1 1. 我们将域K考虑为K上的仿射直线. K的射影扩张$\mathcal{P}_\infty(K)$是由唯一的一点所构成, 我们将它记为∞.

2. 将$\mathcal{P}(K^2)$与$K \cup \mathcal{P}_\infty(K) = K \cup \{\infty\}$按下法予以恒同: $\mathcal{P}(\{0\} \times K)$应当相应于点$\infty$, 仿射直线$\mathcal{P}(K \times K)\backslash\mathcal{P}(\{0\} \times K)$中的点, 借助于它们的特别的齐次坐标$(1, \alpha), \alpha \in K$, 相应于

点 $\alpha \in K$. 我们用坐标 $(0,1)$ 来描述非实质点 $\mathcal{P}(\{0\} \times K)$, 见 9.2.9.

3. 我们按下述的规定将域 K 的加法和乘法分段地扩张到 $K \cup \{\infty\}$ 上去:

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty, \qquad \text{对所有的}\alpha \in K,$$

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty,$$

$$\frac{\alpha}{0} = \infty, \qquad \text{对所有的}\alpha \in K\backslash\{0\},$$

$$\frac{\infty}{\infty} = 1.$$

定义9.4.2 设 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$ 是一条射影直线. 设 $\{p,q,s\}$ 是 $\mathcal{P}$ 的三个不同的点; 按照9.1.8.2, 它们构成了 $\mathcal{P}$ 的一个射影参照系 Q. 按照9.1.10, 由此可定义一个射影同构

$$\pi_Q : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}(K^2) \cong K \cup \{\infty\},$$

且满足 $\pi_Q(p) = 0, \pi_Q(q) = \infty, \pi_Q(s) = 1$.

对每一个 $r \in \mathcal{P}$, 定义交比 DV (p,q,r,s) 为元素 $\pi_Q(r) \in K \cup \{\infty\}$.

定理9.4.3 设 $\mathcal{P}$ 是一个射影空间.

1. DV (p,q,r,s) 是一个射影不变量. 即如果 p,q,r,s 是 $\mathcal{P}$ 中的一条直线 $\mathcal{G}$ 上的点, p,q,s 是两两不同的, 且 $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ 是一个射影变换, 则

$$\text{DV } (\pi(p), \pi(q), \pi(r), \pi(s)) = \text{ DV } (p,q,r,s).$$

2. 设 $\{p,q,r,s\}$ 和 $\{p',q',r',s'\}$ 分别是 $\mathcal{P}$ 的直线 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 上的点, p,q,s 和 p',q',s' 均分别为两两不同的. 则 DV $(p,q,r,s) =$ DV (p',q',r',s') 的充要条件是存在一个射影变换 $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, 使得它将 $\{p,q,r,s\}$ 变至 $\{p',q',r',s'\}$.

证明: 对 1.: 我们能将 $\{p,q,s\}$ 扩张成 $\mathcal{P}$ 的一个射影参照系 $Q=\{q_0,\cdots,q_n,e\}$, 使得 $q_0=p, q_n=q, e=s$. 对 $\pi_Q, \pi_{\pi(Q)}$, 如在 9.1.10 中那样, 成立 $\pi_Q=\pi_{\pi(Q)}\circ\pi$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{DV}\ (\pi(p),\pi(q),\pi(r),\pi(s))&=\pi_{\pi(Q)}\circ\pi(r)=\pi_Q(r)\\&=\ \mathrm{DV}\ (p,q,r,s).\end{aligned}$$

对 2.: 如在 1. 的证明中那样, 考虑将 $\{p,q,s\}$ 和 $\{p',q',s'\}$ 扩张到射影参照系 Q 和 Q'. 按照 9.1.10, 存在一个射影变换 $\pi:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$, 使得 $\pi(Q)=Q'$, 于是 $\pi_Q=\pi_{Q'}\circ\pi\circ\pi(r)=r'$ 是与 $\pi_Q(r)=\pi_{Q'}(r')$ 等价的. □

现在我们来编制从点的坐标表示来计算交比的方法.

命题 9.4.4 设 $\mathcal{P}=\mathcal{P}(V)$ 是一条射影直线.

1. 设 $Q=\{p,q,s\}$ 是 $\mathcal{P}$ 的射影参照系. 于是对 $\{p,q,r\}$ 存在形如 $\{x,y,x+y\}$ 的齐次坐标. 如果 $\alpha x+\beta y$ 是 r 的齐次坐标, 则 $\mathrm{DV}\ (p,q,r,s)=\beta{:}\,\alpha$, 这里如 $\alpha=0$, 则 $\beta{:}\,\alpha=\infty$. 如果 $r\neq q$, 则我们能用 $x+\delta y$ 来描述 r, 于是 $\mathrm{DV}\ (p,q,r,s)=\delta$.

2. 设 $\{b_0,b_1\}$ 是 V 的基, p,q,r,s 的齐次坐标是用

$$\alpha_0b_0+\alpha_1b_1,\beta_0b_0+\beta_1b_1,\gamma_0b_0+\gamma_1b_1,\delta_0b_0+\delta_1b_1$$

给出. 于是借助于 9.4.1.3 中的计算规则, 成立着:

$$\mathrm{DV}\ (p,q,s,r)=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_0&\gamma_0\\\alpha_1&\gamma_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_0&\delta_0\\\alpha_1&\delta_1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}\gamma_0&\beta_0\\\gamma_1&\beta_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\delta_0&\beta_0\\\delta_1&\beta_1\end{vmatrix}}.$$

这里 $|\ \ |$ 代表行列式.

证明:

$$\gamma_0b_0+\gamma_1b_1=\frac{\lambda}{\sigma}\sigma(\alpha_0b_0+\alpha_1b_1)+\frac{\mu}{\tau}\tau(\beta_0b_0+\beta_1b_1)$$

$$\delta_0 b_0 + \delta_1 b_1 = \sigma(\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1) + \tau(\beta_0 b_0 + \beta_1 b_1).$$

按照 9.4.2, 有 DV $(p,q,r,s) = \frac{\mu}{\tau} : \frac{\lambda}{\sigma}$. 从前述等式可得出下述的关于 $\lambda, \mu, \sigma, \tau$ 的方程组:

$$\alpha_0\lambda + \beta_0\mu = \gamma_0; \quad \alpha_0\sigma + \beta_0\tau = \delta_0,$$

$$\alpha_1\lambda + \beta_1\mu = \gamma_1; \quad \alpha_1\sigma + \beta_1\tau = \delta_1.$$

因为 p 和 q 是不同的, 所以 $\begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

于是我们能按照 Cramer 法则 4.5.7 来确定解 $\lambda, \mu, \sigma, \tau$, 并由此发现上述的表达式. □

系9.4.5 设 p, q, r, s 是一条射影直线上的四个点, p, q, s 是不同的. 我们将它们的齐次坐标表为

$$(1, \tau_0), (1, \tau_\infty), (1, \tau), (1, \tau_1).$$

于是成立

$$\text{DV } (p,q,r,s) = \frac{\tau - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} : \frac{\tau - \tau_\infty}{\tau_1 - \tau_\infty} = \frac{\tau - \tau_0}{\tau - \tau_\infty} : \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1 - \tau_\infty}.$$

这里我们允许 $\tau_0, \tau_\infty, \tau, \tau_1$ 取用 9.4.1.3 中所给出的计算规则所得的 $K \cup \{\infty\}$ 中的值.

证明: 这得自 9.4.4 中的公式的计算. □

注解9.4.6 现在我们来研究交比在其四个变量的置换下的情况. 我们也把 $\{p, q, r, s\}$ 换写为 $\{1, 2, 3, 4\}$. 在 3.5.9 中我们导入了这些元素的置换群 S_4.

按照 4.3.5, 每个 $\sigma \in S_4$ 可写成对换 (i, j) 的乘积. S_4 包含一个 Klein 四元群 V_4 作为其子群, 它是由元素 $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 所构成, 其中

$$\sigma_0 = \text{id}, \quad \sigma_1 = (0,1)(2,3),$$

$$\sigma_2 = (0,2)(1,3), \quad \sigma_3 = (0,3)(1,2).$$

这正好是$\{1,2,3,4\}$的那些置换，它除了恒等变换外，把一个对换偶换至另一个对换偶．因为$\sigma\cdot(i,j)\cdot\sigma^{-1} = (\sigma(i),\sigma(j))$，$V_4$是$S_4$的一个不变子群．

定理9.4.7 设$\{p,q,r,s\}$是射影直线$\mathcal{P}$上的四点，p,q,s两两不同．令 DV $(p,q,r,s) = \delta \in K\cup\{\infty\}$．如果$\sigma\in S_4$，则 DV $(\sigma(p),\sigma(q),\sigma(r),\sigma(s))$以下列元素

$$\delta, \frac{1}{\delta}, 1-\delta, \frac{1}{1-\delta}, \frac{\delta}{\delta-1}, \frac{\delta-1}{\delta} \tag{9.1}$$

之一作为其值．即 DV $(\sigma(p),\sigma(q),\sigma(r),\sigma(s))$仅依赖于

$$\delta = \text{ DV } (p,q,r,s) \quad 及 \quad \sigma\in S_4.$$

于是能将 DV $(\sigma(p),\sigma(q),\sigma(r),\sigma(s))$写成形如$\sigma(\delta)$．

对$\sigma\in V_4$，有$\sigma(\delta)=\delta$．令$\{\sigma\in S_4;\sigma(1)=1\}=S_3$．则$\{\sigma(\delta);\sigma\in S_4\}$给出了 (9.1)中的元素．因为每个$\sigma\in S_4$可唯一地写成$\sigma=\nu\sigma'$，这里$\nu\in V_4, \sigma'\in S_3$，于是有$S_4/V_4=S_3$．

特别地，对S_4的生成元$\tau_1=(1,2), \tau_2=(2,3), \tau_3=(3,4)$，成立着：

$$\tau_1(\delta)=\delta^{-1}; \quad \tau_2(\delta)=1-\delta; \quad \tau_3(\delta)=\delta^{-1}.$$

补充9.4.8 在$\delta\in K\backslash\{0,1\}$的情形，9.4.7中的 (9.1)的六个值全为零，除了下列的例外：

1. 当$1+1+1=0$和$\delta=-1$时，则所有值均等于δ．

2. 当$1+1\neq 0, 1+1+1\neq 0$和$\delta=-1$时，则 (9.1)由$\{-1,2,\frac{1}{2}\}$所构成．当$\delta^2-\delta+1=0$时，则 (9.1)由$\{\delta,-\delta^2\}$构成．

3. 当 K 由 4 个元素所构成时，则 (9.1) 由 $\{\delta, -\delta^2\}$ 所构成.

证明: 由 9.4.5 我们看出：对 $\nu \in V_4$, 有 $\nu(\delta) = \delta$. 于是只需去确定 $\sigma \in S_3$ 的 $\sigma(\delta)$, 即 $\sigma(p) = p$. 由 9.4.5 得出：

$$\begin{aligned} &\text{对 } \tau_1 = (1,2): && \tau_1(\delta) = \delta^{-1}; \\ &\text{对 } \tau_2 = (2,3): && \tau_2(\delta) = 1-\delta; \\ &\text{对 } \tau_3 = (3,4): && \tau_3(\delta) = \delta^{-1}. \end{aligned}$$

利用复合，我们得到

$$(1-\delta)^{-1};\ 1-(1-\delta)^{-1} = \frac{\delta}{1-\delta};\ (1-(1-\delta)^{-1})^{-1} = \frac{\delta-1}{\delta}.$$

此补充可用验算来证实. 譬如说，如果 $\delta^2 - \delta + 1 = 0$, 则

$$\delta^{-1} = -\delta^2,\ 1-\delta = -\delta^2,\ (1-\delta)^{-1} = \delta,\ \delta(1-\delta)^{-1} = \delta^2.$$

□

“交比”的名词阐述了它与在 7.3.7 中所导入的对一条仿射直线上三点的单比之间的联系.

引理9.4.9 1. 设 p, q, r, s 是仿射直线 $\mathcal{A}$ 上的点， p, q, s 是不同的. 如果我们把它们看成是射影扩张 $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \{\infty\}$ 的点，则成立

$$\mathrm{DV}\ (p,q,r,s) = \frac{\mathrm{TV}\ (r,s,p)}{\mathrm{TV}\ (r,s,q)}.$$

2. 设 p, q, r 是仿射直线 $\mathcal{A}$ 的点， $q \neq r$. 令 ∞ 是它的非实质点. 则成立

$$\mathrm{DV}\ (p,q,r,\infty) = \mathrm{TV}\ (p,q,r).$$

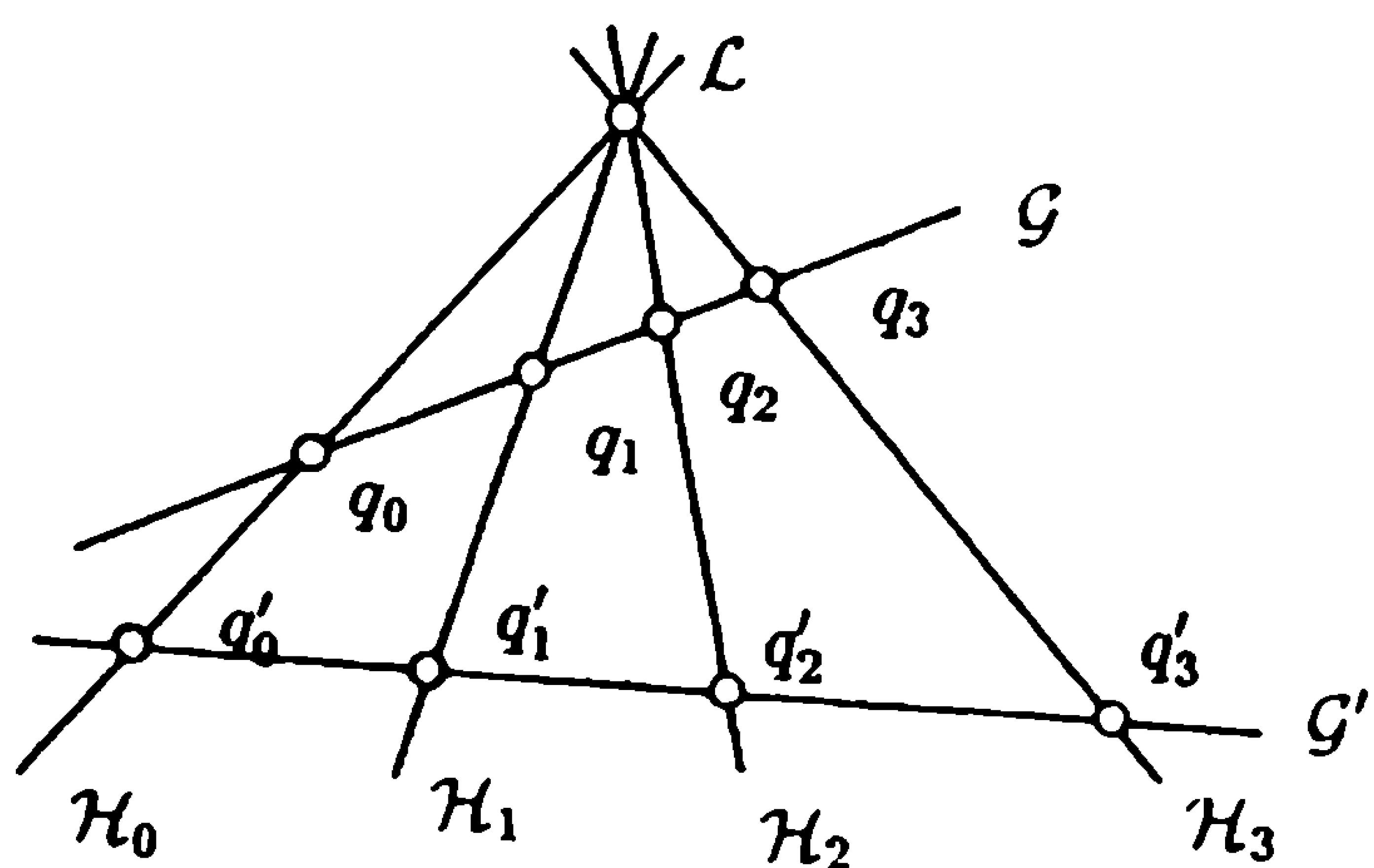
证明: 对1.: 如在9.4.5中那样, 我们用坐标$(1,\tau_0)$, $(1,\tau_\infty)$, $(1,\tau)$, $(1,\tau_1)$来表出p,q,r,s. 于是

$$\text{TV }(r,s,p)=\frac{\tau-\tau_0}{\tau_1-\tau_0};\quad \text{TV }(r,s,q)=\frac{\tau_0-\tau_\infty}{\tau_1-\tau_\infty}.$$

结论得自9.4.5.

对2.: 利用1.的证明中的坐标, 有 $\text{TV }(p,q,r)=\dfrac{\tau_0-r}{\tau_\infty-r}$. 在9.4.5中令$\tau_1=\infty$. □

下列命题给出了对交比性质的一个更进一步的理解.



引理9.4.10 设$\mathcal{P}$是一个维数≥ 2的射影空间, $\mathcal{H}_i, i=0,1,2,3$, 是四个超平面,它们的交集$\cap_i\mathcal{H}_i$包含了一个余维数为2的子空间$\mathcal{L}$. 设$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_3$是两两不同的, 且使得$\cap_i\mathcal{H}_i=\mathcal{L}$. 设$\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$是$\mathcal{P}$的直线, 且与$\mathcal{L}$不相交. 于是

$$\mathcal{G}\cap\mathcal{H}_i=\{q_i\},\qquad \mathcal{G}'\cap\mathcal{H}_i=\{q_i'\},\ i=0,1,2,3$$

及

$$\text{DV }(q_0,q_1,q_2,q_3)=\text{ DV }(q_0',q_1',q_2',q_3').$$

证明: 考察仿射空间$\mathcal{A}=\mathcal{P}\backslash\mathcal{H}_3$. 在保留对从属于$\mathcal{A}$的部分的记号之下, 则有$\mathcal{H}_0\|\mathcal{H}_1\|\mathcal{H}_2$及$\mathcal{H}_0\neq\mathcal{H}_1$. 按照9.4.9.2, 我们的结论可表成形如 $\text{TV }(q_0,q_1,q_2)=\text{ TV }(q_0',q_1',q_2')$. 现在这得自7.3.10, 在这里我们选线性函数$\lambda:\mathcal{A}\longrightarrow K$, 使得$\lambda|_{\mathcal{H}_0}=$常数. □

如我们在9.4.3中已经指出的那样, 交比在射影变换下是不变的. 我们现在来研究交比在射影直射变换下的情形, 见

9.2.13. $(^-)$表示对一个这样的直射变换所从属的基域K的自同构.

定理9.4.11 1. 设$\bar{\pi}: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$是一个射影直射变换, $\dim \mathcal{P} \geq 2$, 如果$\{p,q,r,s\}$是一条直线上的点, 且$\{p,q,s\}$是两两不同的, 于是成立

$$\mathrm{DV}\ (\bar{\pi}(p), \bar{\pi}(q), \bar{\pi}(r), \bar{\pi}(s)) = \overline{\mathrm{DV}\ (p,q,r,s)}.$$

2. 射影直射变换是一个射影变换的充分必要条件是它使交比不变.

证明: 对1.: 考虑将$\{p,q,s\}$扩张成$\mathcal{P}$的一个射影参照系$Q = \{p_0, \cdots, p_n, e\}$, 使得$\{p,q,s\} = \{p_0, p_n, e\}$. 由 9.4.3 我们知道, 交比在$\mathcal{P}$的射影变换下是不变的. 按照 9.2.13, 我们能够把$\bar{\pi}$写成形如$\pi \circ (^-)$, 这里$(^-)$使参照系Q不变. 我们能假设$r \neq q$. 按照 9.4.4.1, 于是对$\{p,q,r,s\}$存在着形如$\{x, y, x+\delta y, x+y\}$的坐标, 于是$\delta = \mathrm{DV}\ (p,q,r,s)$. 在$(^-)$下, $x+\delta y$变成$x+\bar{\delta}y$. 于是, 利用$(^-)p = \bar{p}$等等, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{DV}\ (\bar{\pi}(p), \bar{\pi}(q), \bar{\pi}(r), \bar{\pi}(s)) &= \mathrm{DV}\ (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}) \\ &= \bar{\delta} = \overline{\mathrm{DV}\ (p,q,r,s)}.\end{aligned}$$

对2.: 因为当r在过p,q,s的直线上变动时, $\mathrm{DV}\ (p,q,r,s)$可取到K中所有的值, 这意味着交比的不变性: 对所有的$\delta \in K$, 有$\bar{\delta} = \delta$. □

我们用几何上特别奇妙的四点列来结束本节. 为此我们必须假设, 对域K, 成立着$-1 \neq 1$. 对本节的其余部分也如此.

定义9.4.12 一条射影直线上四个不同的点p,q,r,s称为是处在调和位置或简单地说是调和的, 如果$\mathrm{DV}\ (p,q,r,s) = -1$. 我们也说: (r,s)被(p,q)调和分割.

在调和四点列的意义下的第一个认识是

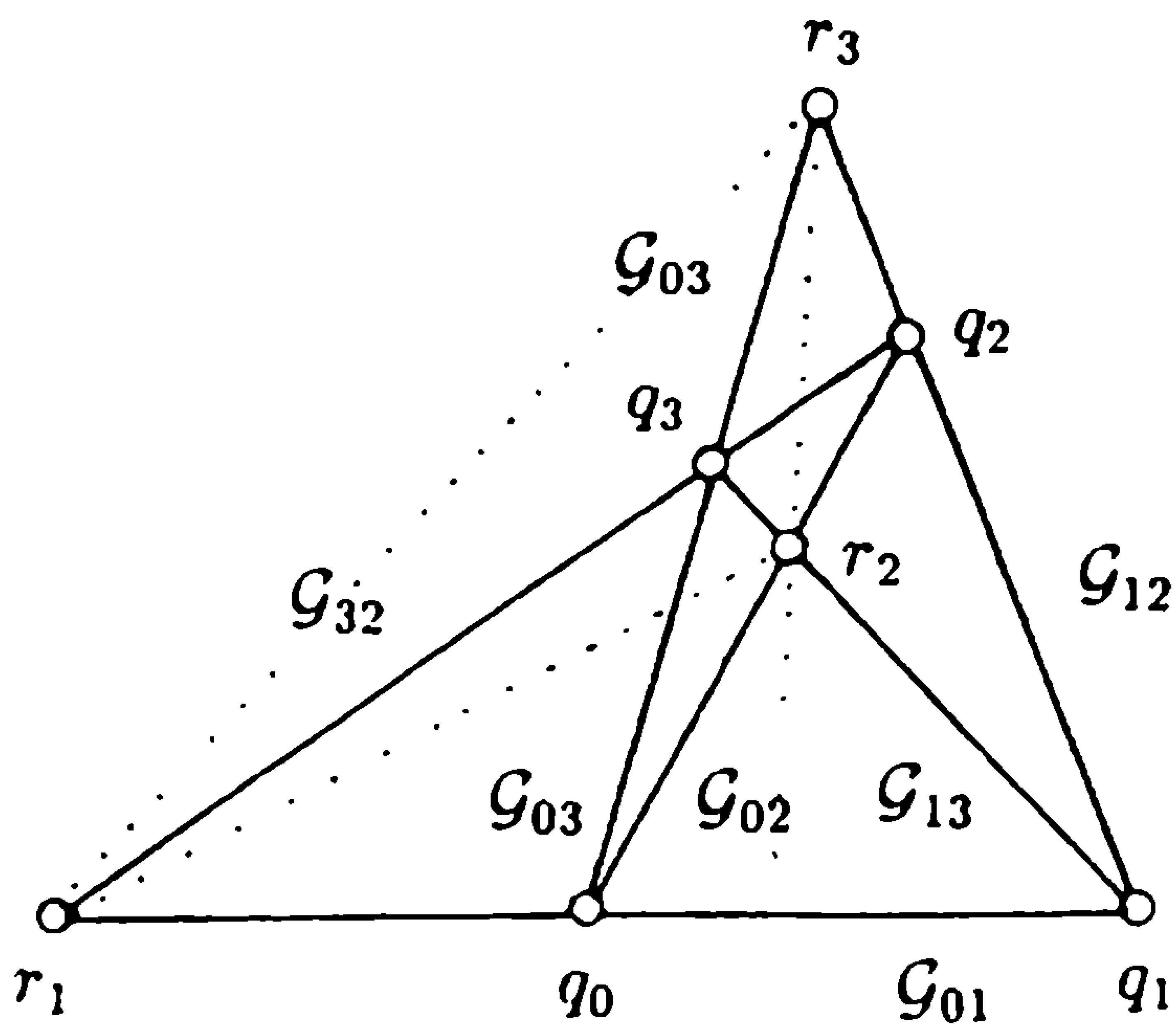
命题9.4.13 设 p, q, r, s 是一条射影直线 $\mathcal{P}$ 上的四个不同的点. 考虑仿射直线 $\mathcal{A} = \mathcal{P}\backslash\{s\}$. 这四点是调和的充要条件为，在 $\mathcal{A}$ 上 s 是 p 和 q 的中点.

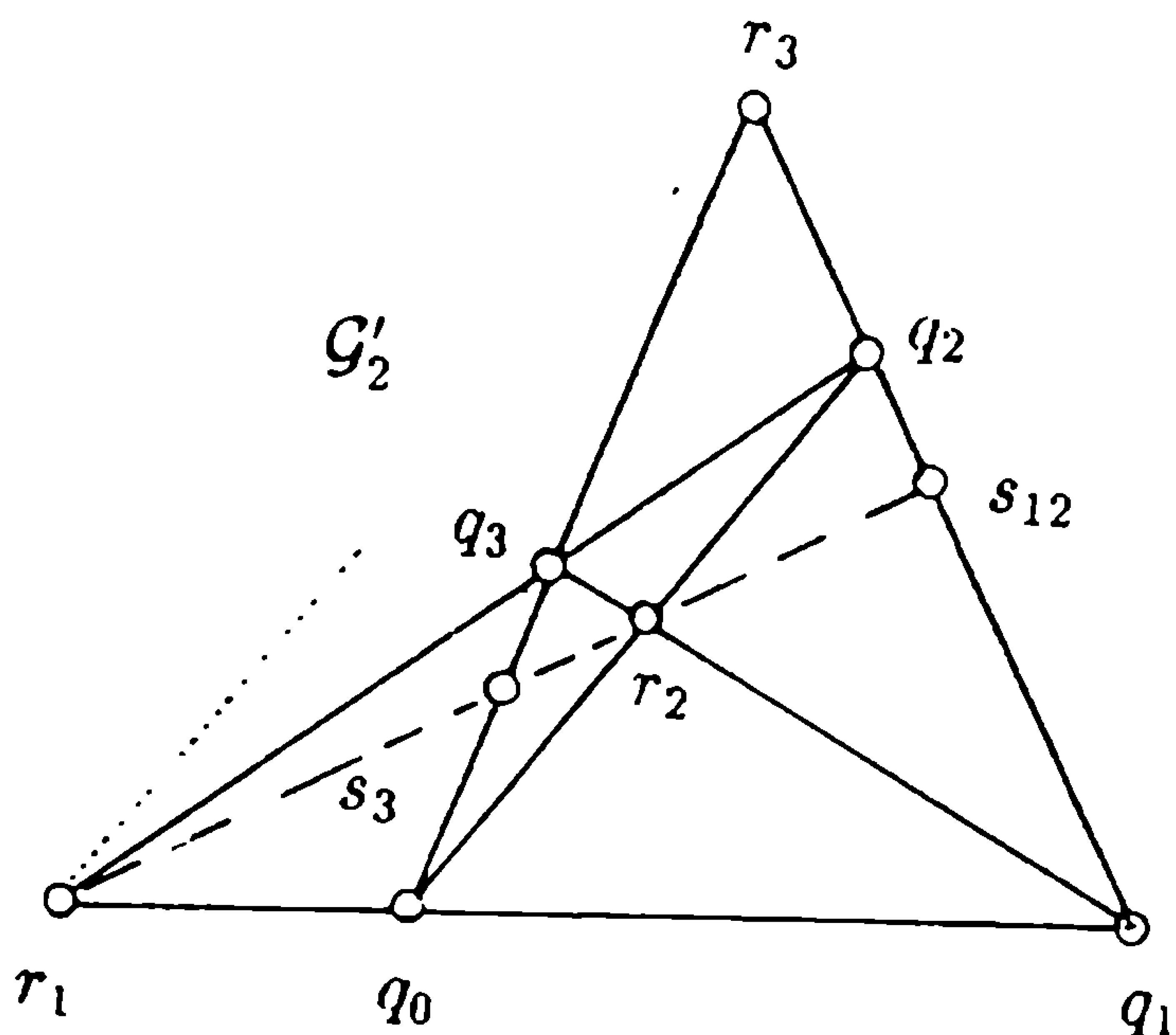
证明: 按照 9.4.9.2, $\text{DV}\ (p, q, r, s) = \text{TV}\ (p, q, r) = -1$, 即 $(p - r) = -(q - r)$ 或者 $r = \dfrac{p+q}{2}$. □

命题9.4.14 设 p 是 $\mathcal{P}$ 中的一个点, $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{P}$ 中的一个超平面, $p \notin \mathcal{H}$. 于是按下面所定义的镜射或对合 $\sigma(p, \mathcal{H}) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 定义了一个不是 id 的射影变换, 且 $\sigma \circ \sigma = \text{id} : \sigma|\{p\} \cup \mathcal{H} = \text{id}$. 对 $r \notin \{p\} \cup \mathcal{H}$, 令 $\mathcal{G}_{pr} \cap \mathcal{H} = \{q\}$. 用 $\text{DV}\ (p, q, r, \sigma(r)) = -1$ 定义 $\sigma(r) \in \mathcal{G}_{pr}$.

证明: 考虑 $\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{H}$. 于是 $\sigma|\mathcal{A}$ 是关于 p 的镜面反射: $r \mapsto (p - r) + p$. □

定义9.4.15 设 $\mathcal{P}$ 是一个射影平面. 所谓一个完全四边形是指四个点 $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, 它们构成了一个射影参照系, 且连同它们的六条连接直线 $\mathcal{G}_{q_iq_j}$ =(简记为) $\mathcal{G}_{ij}$. 三对对边 $\{\mathcal{G}_{01}, \mathcal{G}_{23}\}$, $\{\mathcal{G}_{02}, \mathcal{G}_{13}\}$, $\{\mathcal{G}_{03}, \mathcal{G}_{12}\}$ 分别交于一点, 且用 $\{r_1, r_2, r_3\}$ 来标记. 这些就构成了完全四边形的对边三角形.





定理 9.4.16 在一个完全四边形中，对边三角形的每两个顶点（相当于完全四边形的两对对边的交点）的连线被剩下的一对对边交于两点，则两顶点被这两个交点调和分割. 即如果我们用 $\{i,j,k\}$ 来记 $\{1,2,3\}$ 的循环置换，且置 $\mathcal{G}_{r_ir_j}=\mathcal{G}'_k$，则连同 $\mathcal{G}_{ij}\cap\mathcal{G}'_k=\{s_{ij}\}$，$\mathcal{G}_{0k}\cap\mathcal{G}'_k=\{s_k\}$，成立：

$$\mathrm{DV}\ (r_i,r_j,s_k,s_{ij})=-1.$$

证明：由对称性，只需考虑 r_1,r_2,s_3,s_{12}. $\mathcal{P}\setminus\mathcal{G}'_2$ 是一个仿射平面 $\mathcal{A}$. 在其中我们对直线的落在 $\mathcal{A}$ 中的部分保留迄今所用的记号，我们有

$$\mathcal{G}_{03}\|\mathcal{G}_{12}\|\mathcal{G}'_1;\quad \mathcal{G}_{01}\|\mathcal{G}_{23}\|\mathcal{G}'_3.$$

即 $\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$ 构成了一个平行四边形：

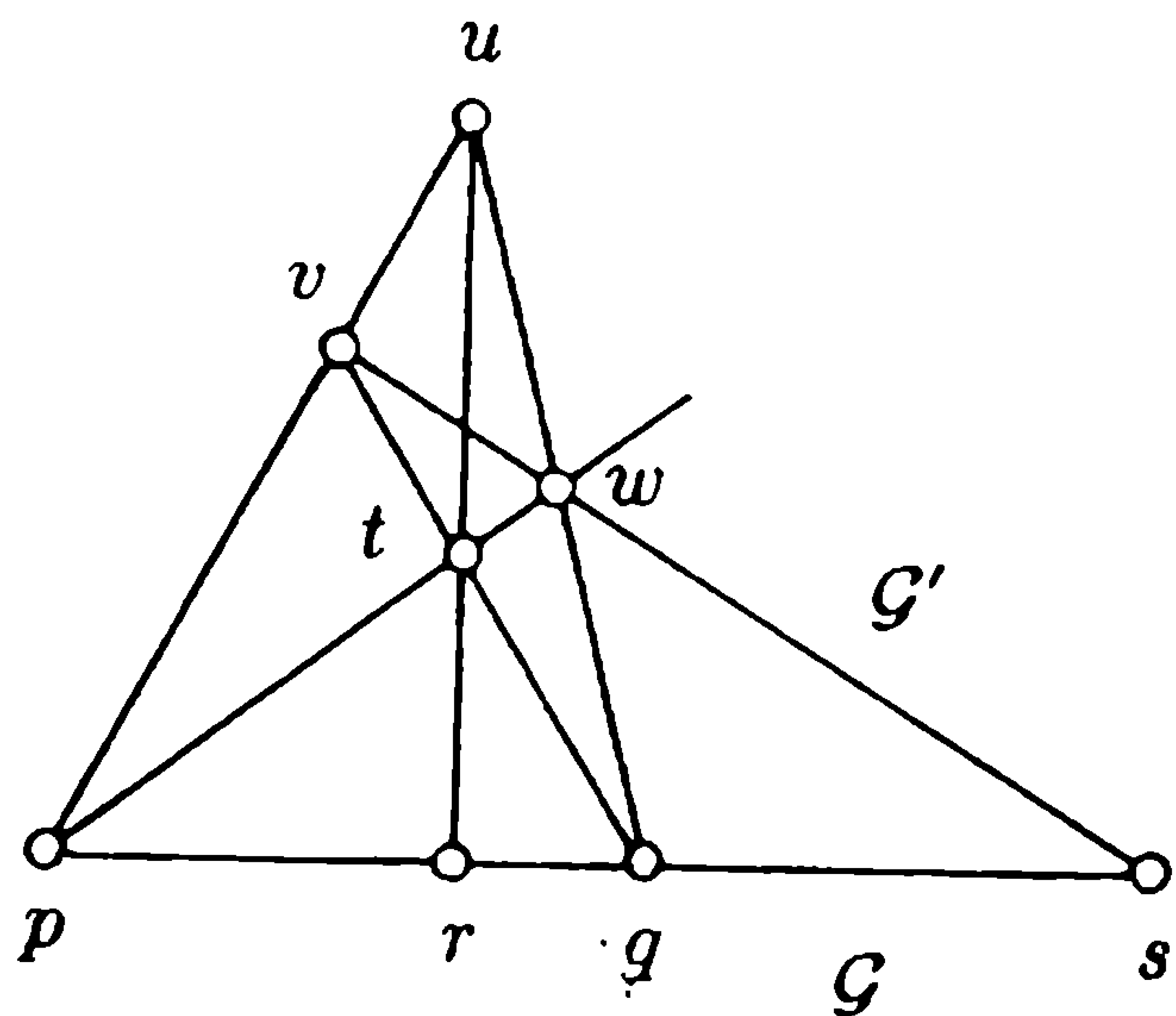
$$q_1-q_0=q_2-q_3;\quad q_3-q_0=q_2-q_1,$$

$$r_2=\frac{q_1+q_3}{2}=\frac{q_2+q_0}{2};\quad s_3=\frac{q_0+q_3}{2};\quad s_{12}=\frac{q_1+q_2}{2}.$$

于是

$$\frac{s_3+s_{12}}{2}=\frac{q_0}{4}+\frac{q_3}{4}+\frac{q_1}{4}+\frac{q_2}{4}=\frac{r_2}{2}+\frac{r_2}{2}=r_2.$$

下列命题给出了点 r 的一个简单的构造，使得在给定了 p,q,s 后，$\{p,q,r,s\}$ 处于调和位置.



命题 9.4.17 设 p,q,r,s 是在射影平面 $\mathcal{P}$ 中的一条射影直线 $\mathcal{G}$ 上，p,q,s 是两两不同的. 选 $u\in\mathcal{G}$ 及一条过 s 的直线 $\mathcal{G}'\neq\mathcal{G}$，它不通过 u. 设 v 和 w 分别是 $\mathcal{G}'$ 与 $\mathcal{G}_{up}$ 和 $\mathcal{G}_{uq}$ 的交点. 于是，$\mathrm{DV}\ (p,q,r,s)=-1$ 的充要条件是 $\mathcal{G}_{ut}$ 与直线 $\mathcal{G}$ 交于点 r.

证明: 考虑具有顶点p,q,w,v的完全四边形. 按照9.4.16, 四条直线 $\mathcal{G}_{up}$, $\mathcal{G}_{ut}$, $\mathcal{G}_{uq}$, $\mathcal{G}_{us}$于直线 $\mathcal{G}_{st}$交于处在调和位置下的四点. 现在从9.4.10就可得出结论. □

注:

1. 我们也已能通过对仿射平面$\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{G}_{us}$的考察来证明这个结论. p,q,w,v是$\mathcal{A}$中的一个平行四边形, 见9.4.16的证明.

2. 人们也容易地看出, 9.4.17能从Ceva定理7.3.14中得出: 将p,q,u考虑为仿射平面中的一个三角形, 于是, s是一个非实质点.

在9.2.13中我们已经描述了维数≥ 2的空间$\mathcal{P}$的射影直射变换. 当 $\dim \mathcal{P} = 1$时, 于是显然在那里定义的意义下每个双射是一个射影直射变换. 然而, 如果我们要求如在9.4.11.1意义下那样, 一条射影直线$\mathcal{P}$的双射确定了交比 (至多差一个域同构), 则这样一个双射又呈形如$\pi \circ (^-)$, 这里π是一个射影变换, 且$(^-)$用一个域同构给出. 甚至这在更弱的假设下也成立: 调和四点列被变为调和四点列, 这就是所谓的 v. Staudt 基本定理.

定理9.4.18 设$\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$是射影直线$\mathcal{P}$的一个双射, 它把调和四点列变至同样的四点列, 于是π形如$\pi = \pi \circ (^-)$, 这里$(^-)$使一个射影参照系固定不变, 且对坐标的作用就是一个域同构.

证明: 我们能采用$\mathcal{P}$的模型$K \cup \{\infty\}$, 且通过应用一个射影变换得出: $\bar{\pi}$ 使点$0,1,\infty$固定. 我们简单地用$\bar{\alpha}$来替代$\bar{\pi}(\alpha)$, $\alpha \in K$.

首先由假设可得出$\overline{\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\bar{\alpha}}{2} + \frac{\bar{\beta}}{2}$. 于是有$\overline{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{2}$, 且由此得到$\overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\overline{-\alpha} = -\bar{\alpha}$. 利用 9.4.5, 人们可验证: $\{1, \alpha^2, -\alpha, \alpha\}$ 是一个调和四点列. 因为$\bar{1} = 1$, $\overline{-\alpha} = -\bar{\alpha}$, 所以

得到$\overline{\alpha^2} = -\bar{\alpha}^2$, 于是从$\overline{(\alpha+\beta)^2} = \overline{\alpha+\beta}^2$也得到$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$.

9.5 二次型和配极

V上的射影空间$\mathcal{P}(V)$的几何学是V的线性子空间的几何学. 在本节中我们在V上导入一个实质的结构, 即一个在 7.4.1 意义下的对称双线性形式ψ. 在这里我们本质上限于讨论ψ是不退化的情形.

于是对V的每一个子空间U, 对应于子空间$U^{\perp}$, 它与U关于ψ是正交的. 称用ψ在$\mathcal{P}(V)$的子空间上所诱导的对合双射为配极. 我们稍迟也将对实射影空间进行进一步的研究.

配极仅与对称双线性形式的空间中用ψ所生成的1维子空间$[\psi]$有关. 所谓一个二次型$\mathcal{Q}u$是指$\mathcal{P}(V)$中零点集$\{\psi = 0\}$的象.

很容易对二次型导出一个标准形式, 它在$K = \mathbf{R}$或$K = \mathbf{C}$的情形下也是被唯一确定的. 最后我们来研究这样的问题: 在$\mathcal{P}$上的一个二次型$\mathcal{Q}u$能否被限制到仿射空间部分$\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_\infty$上, 这里$\mathcal{P}_\infty$是$\mathcal{P}$的一个射影超平面. 答案本质上是依赖于$\mathcal{P}_\infty$是否切于$\mathcal{Q}u$.

所考察的射影空间具有维数≥ 1. 而且一讲到关于对称双线性形式, 我们就应当假设基域K要满足$1+1 \neq 0$.

我们从射影超平面的描述开始.

定理9.5.1 设$\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$是$V$上的射影空间. $\mathcal{P}$的超平面$\mathcal{H}$双方一一地对应于V的对偶空间V^*的1维子空间. 且进而成立

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}(U) \longleftrightarrow \{l \in V^*, \quad 且 \quad \ker l = U\}.$$

证明: 超平面$\mathcal{H}$对应于V的一个余维数为1的子空间U. 满足$\ker l = U$的$l \in V^*$的集合是V^*的1维子空间. □

在 7.4.1 中我们已经导入了对称双线性形式 ψ 的概念. 我们现在总是假设 ψ 是非退化的. 于是我们能将在 6.1 中对数量积 $<\ ,\ >$ 所导入的正交性的概念予以推广.

定义 9.5.2 设 ψ 是 V 上的一个非退化的对称双线性形式. 我们也称这样的形式为本性的.

1. 对 $A \subset V$, 用

$$A^{\perp} = \{x \in V;\quad \psi(x,y) = 0,\quad \text{对所有}\quad y \in A\}$$

定义正交于 A 的子集 $A^{\perp}$. 于是用 7.4.1.3 中的记号, 有

$$A^{\perp} = \bigcap_{y \in A} \ker\ \sigma_{\psi}(y).$$

2. V 中的两个子集 A 和 B 称为是正交的, 如对所有 $(x,y) \in A \times B$, 有 $\psi(x,y) = 0$, 且记为 $A \perp B$ 或者 $B \perp A$. 我们也将它写成

$$\psi(A,B) = \psi(B,A) = 0.$$

注解 9.5.3 1. $A^{\perp}$ 总是 V 的一个线性子空间, 见 6.1.12.

2. 对记号 $A^{\perp}$, 我们并没有注明作为其基础的形式 ψ. 自然地, $A^{\perp}$ 一般来说是依赖于形式 ψ 的. 对此依赖性的准确的介绍, 可参见 9.5.7.

引理 9.5.4 设 ψ 是 V 上的一个本性的对称双线性形式, 且 $\dim V = n$. 设 U, U' 是 V 的子空间. 于是成立:

1. $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$, 即 $\operatorname{codim} U^{\perp} = \dim U$.
2. $U^{\perp\perp} = U$.
3. $U \subset U' \implies U'^{\perp} \subset U^{\perp}$.
4. $(U + U')^{\perp} = U^{\perp} \cap U'^{\perp}$.
5. $(U \cap U')^{\perp} = U^{\perp} + U'^{\perp}$.

6. 存在 V 的一组基 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$, 使得对 $U_i=[d_i]$, $1\le i\le n$, 成立: $U_i+U_i^{\perp}=V$.

证明: 对1.: 对 $\dim U=0$, 有 $U^{\perp}=V$. 现在设 $\dim U=k\ge 1$. 选取 U 的一组基 $\{b_1,\cdots,b_k\}$, 并考察线性映射

$$f=\sigma_{\psi}(b_1)\times\cdots\times\sigma_{\psi}(b_k):V\to K^k.$$

于是 $\ker f=U^{\perp}$, $\operatorname{im} f=K^k$. 因此按照2.6.7, 有 $\dim U^{\perp}+\dim K^k=\dim V$.

对2.: $\psi(U,U^{\perp})=\psi(U^{\perp},U)=0$ 蕴含 $U\subset U^{\perp\perp}$. 这是因为由1., $\dim U^{\perp\perp}=\dim U$, 于是得出 $U=U^{\perp\perp}$.

对3.: $\psi(x,U')=0\Longrightarrow\psi(x,U)=0$.

对4.: $\psi(x,U)=\psi(x,U')=0\Longrightarrow\psi(x,U+U')=0$. 所以 $\psi(x,U)\ne 0$ 或者 $\psi(x,U')\ne 0$ 蕴含 $\psi(x,U+U')\ne 0$.

对5.: 这得自4.及2.

对6.: 因为 ψ 是本性的, 由7.4.2, 存在基 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$, 使得 $G_D(\psi)=(\alpha_i\delta_{ij})$, 这里对 $1\le i\le n$, 有 $\alpha_i\ne 0$. □

注解9.5.5 在数量积的情形, 总有 $U+U^{\perp}=V$. 可是在我们的情形, 这不一定成立, 即有可能 $U\cap U^{\perp}\ne\{0\}$. $U\cap U^{\perp}$ 是限制在子空间 U 上的对称双线性形式 $\psi|\ U$ 的零空间, 而 $\psi|\ U$ 可能是退化的. 例如, 形式 $\psi(x,x)=\xi_1^2-\xi_2^2$ 是定义在 K^2 上的, 如果将它限制在子空间 $U=[(1,1)]$ 上, 那就恒为0了.

对把映 V 的子空间集合 $\mathcal{U}(V)$ 映至其自身的、且满足 $\perp\circ\perp=\mathrm{id}$ 的映射

$$\perp:\mathcal{U}(V)\longrightarrow\mathcal{U}(V);\quad U\longmapsto U^{\perp},$$

如果作为其基础的形式 ψ 相差 K 中的一个因子 $\alpha\ne 0$, 则映射 $\perp$ 显然不受影响. 我们注意:

命题9.5.6 设 V 是一个子空间, $\dim V=n$. 用 $L_s(V)$ 表示 V 上的对称双线性形式的集合. $L_s(V)$ 是 $L(V\times V;K)=$

$(V \times V)^*$ 中的一个维数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的子空间.

证明: 容易验证子空间判据 2.1.5. 如 $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ 是 V 的一组基, 则满足

$$\psi_{ij}(b_i, b_j) = \psi_{ij}(b_j, b_i) = 1,$$

$$\psi_{ij}(b_k, b_l) = 0, \quad 对\{b_k, b_l\} \neq \{b_i, b_j\}$$

的 $\{\psi_{ij} = \psi_{ji}, 1 \leq i, j \leq n\}$ 构成了 $L_s(V)$ 的一组基. □

于是我们现在来证明:

引理 9.5.7 设 ψ, ψ' 是 V 上的本性对称双线性形式. 其从属的双射

$$\perp: \mathcal{U}(V) \longrightarrow \mathcal{U}(V); \quad U \longmapsto U^{\perp}$$

$$\perp': \mathcal{U}(V) \longmapsto \mathcal{U}(V); \quad U \longmapsto U^{\perp'}$$

是一致的充要条件是存在 K 中的一个 $\alpha \neq 0$, 使得 $\psi' = \alpha\psi$. 即 ψ 和 ψ' 生成了 $L_s(V)$ 的同样的 1 维子空间.

证明: 显然由 $\psi' = \alpha\psi$ 可得到 $\perp' = \perp$. 反过来, 对 $\dim V = 1$ 的情形, 结论是显然的, 因为 $\dim L_s(V) = 1$. 如在 9.1.6 的证明中那样, 现在来考察 V 中的线性无关元素 $\{x, x'\}$. 于是存在 K 中的 $\alpha, \alpha', \beta \neq 0$ (它们仅与 $[x], [x'], [x+x']$ 有关), 使得

$$\sigma_\psi(x) = \alpha\sigma_{\psi'}(x);$$

$$\sigma_\psi(x') = \alpha'\sigma_{\psi'}(x');$$

$$\sigma_\psi(x+x') = \beta\sigma_{\psi'}(x+x').$$

于是

$$\alpha\sigma_{\psi'}(x) + \alpha'\sigma_{\psi'}(x') = \beta\sigma_{\psi'}(x) + \beta\sigma_{\psi'}(x'),$$

即 $\alpha = \alpha' = \beta$. □

我们现在来把前面的结果推广到V上的射影空间$\mathcal{P}(V)$上去.

定理9.5.8 设V是一个向量空间, $\dim V = n+1$, ψ是一个本性的对称双线性形式. 于是在$\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$的射影子空间的集合$\mathcal{U}(\mathcal{P})$上可定义一个配极

$$\perp: \mathcal{U}(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{P}); \quad \mathcal{L} \longmapsto \mathcal{L}^{\perp}$$

如果$\mathcal{L} = \mathcal{P}(U)$, 则$\mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{P}(U^{\perp})$. $\perp$是一个具有下列性质的双射:

1. $\dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{L}^{\perp} = \dim \mathcal{P} - 1$.
2. $\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}$,即$\perp$是一个对合.
3. $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \Longrightarrow \mathcal{L}'^{\perp} \subset \mathcal{L}^{\perp}$.
4. $(\mathcal{L} + \mathcal{L}')^{\perp} = \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{L}'^{\perp}$.
5. $(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}')^{\perp} = \mathcal{L}^{\perp} + \mathcal{L}'^{\perp}$.
6. 存在着$\mathcal{P}$的一个射影参照系$Q = \{p_0, \cdots, p_n, e\}$, 使得$\{p_i\} \notin \{p_i\}^{\perp}$, 即对$1 \le i \le n$, 有$\{p_i\} + \{p_i\}^{\perp} = \mathcal{P}$. 这里$\mathcal{L} + \mathcal{M}$代表由$\mathcal{L}$和$\mathcal{M}$所生成的子空间, 即它是所有包含$\mathcal{L}$和$\mathcal{M}$的子空间的交集.

配极仅依赖于L_s中的1维子空间$[\psi]$.

证明: 这得自9.5.4, 9.5.7及$\dim \mathcal{P}(U) = \dim U - 1$. □

注解9.5.9 我们已经借助于一个本性形式$\psi \in L_s(V)$去定义了配极. 一般地, 人们能把它理解成一个从$\mathcal{U}(\mathcal{P})$到其自身的、满足9.5.8中性质1到6的双射. 有这样的问题: 这样的配极是否总是由本性形式用上述的方式诱导出来的?

如果我们把对称双线性形式换成一般的$(^{-})$-对称双线性形式, 那么答案是正确的, 这里$(^{-}): K \to K$是K的一个对合自同构, 而且需要将$\psi(y,x) = \psi(x,y)$换成$\psi(y,x) = \overline{\psi(x,y)}$. 在6.1.11中所定义的基域为$\mathbf{C}$的向量空间上的数量积表示了

这种 $(^-)$-双线性形式的一个例子. 我们能将这种看法作为我们开始进行讨论的基础.

定义 9.5.10 所谓 $\mathcal{P}=\mathcal{P}(V)$ 上的一个 (本性的) 二次型 $\mathcal{Q}u=\mathcal{Q}u(\psi)$ 是指 V 上的一个本性对称双线性形式 ψ 的零点集 $\{\psi=0\}$ 的象.

注解 9.5.11 1. 显然对每个 $\alpha\neq 0$, 有 $\mathcal{Q}u(\psi)=\mathcal{Q}u(\alpha\psi)$.

2. $p\in\mathcal{Q}u(\psi)$ 意味着 $\{p\}\subset\{p\}^{\perp}$, 或者简记为: $p\in p^{\perp}$.

3. 由 $\psi(x,x)=0$ 可得出: 对每个 $\alpha\in K$, 有 $\psi(\alpha x,\alpha x)=0$. 今后也称 $\{\psi(x,x)=0\}$ 为 V 中的锥. $\{\psi(x,x)=0\}$ 可能仅由 $0\in V$ 构成. 在这种情形下, 自然有 $\mathcal{Q}u(\psi)=\emptyset$.

例 9.5.12 设 $A=(\alpha_{ij}), 0\leq i,j\leq n$, 是一个对称的 $(n+1,n+1)$-矩阵, 于是 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$. 借助于

$$(x,y)\in K^{n+1}\times K^{n+1}\longmapsto xA\ {}^t y=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\xi_i\eta_j\in K,$$

A 能视为 $L_s(K^{n+1})$ 中的元素. $\det A\neq 0$ 意味着上述形式是本性的.

对一般情形这是典型的, 因为当选取了 V 中的一组基 B 后, 由其所确定的 ψ 的基本矩阵为 $A=G_B(\psi)$ (见 7.4.3), 于是 $\psi(x,y)$ 是用 $\Phi_B(x)\,A\,{}^t\Phi_B(x)$ 来给出的.

设 $U\neq\{0\}$ 是 K^{n+1} 的一个子空间, $\{b_0,\cdots,b_l\}$ 是一组基, 其中 $b_i=(\beta_{i0},\cdots,\beta_{in})$, 于是 $U^{\perp}$ 中的元素 $x=(\xi_0,\cdots,\xi_n)$ 是由齐次 $(l+1,n+1)$-线性方程组

$$\sum_{k,j}\beta_{ik}\alpha_{kj}\xi_j=0,\quad i=0,\cdots,l$$

的解给出. 这个方程组的秩是 $l+1$. 于是方程组的解空间的维数为 $(n+1)-(l+1)=n-l$, 见 2.6.7.

射影二次型的标准形的导出是特别简单的:

定理9.5.13 设 Qu 是 $\mathcal{P}=\mathcal{P}(V)$ 中的一个本性的二次型， $\dim V=n+1\geq 2$. 于是 V 具有一组基 $D=\{d_0,\cdots,d_n\}$, 使得在 $\Phi_D:V\longrightarrow K^{n+1}$ 下二次型 Qu 可用

$$\{\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\xi_i^2=0\},\quad \alpha_i\neq 0,\ 0\leq i\leq n$$

来描述. 这里 α_i 可相差一个任意的因子 $\alpha\neq 0$.

当 $K=\mathbf{C}$ 时，能做到对所有 i, 有 $\alpha_i=1$. 当 $K=\mathbf{R}$ 时，存在一个确定的 $p(\geq n+1-p)$, 使得对 $i\leq p$, 有 $\alpha_i=1$, 对 $i>p$, 有 $\alpha_i=-1$.

证明: 这可直接地得自7.4.2及 $\operatorname{rg}\psi=n+1$. 当 $K=\mathbf{R}$ 时， p 的唯一确定性得自6.5.11. □

注: 显然7.4.2也给出了非本性的二次型的标准表示. 在这里我们将一个对称双线性形式 $\psi\neq 0$ 的零点集 $\{\psi(x,x)=0\}$ 在 $\mathcal{P}(V)$ 中的象理解成也许不具有最大秩数.

例9.5.14 1. 对实射影平面, 存在着下列二次型方程:

$$x^2+y^2+z^2=0\ :\qquad Qu=\emptyset;$$

$$x^2+y^2-z^2=0\ :\qquad Qu\text{是圆型}.$$

2. 对实射影空间，存在着二次型方程:

$$x^2+y^2+z^2+t^2=0\ :\qquad Qu=\emptyset;$$

$$x^2+y^2+z^2-t^2=0\ :\qquad Qu\text{是球面型};$$

$$x^2+y^2-z^2-t^2=0\ :\qquad Qu\text{是单叶双曲面型}.$$

也可参见9.5.16, 在那里我们研究了射影二次型与仿射二次型之间的联系.

定义9.5.15 设 Qu 是一个用形式 ψ 定义的二次型. Qu 在点 $q\in Qu$ 处的切超平面 T_qQu 定义为 $\{q\}^{\perp}$. 即 T_qQu 是配极于 $\{q\}$ 的空间.

命题9.5.16 设ψ是V上的一个本性对称双线性形式. 用$\perp$来记在$\mathcal{P}=\mathcal{P}(V)$上由此所定义的配极，用$\mathcal{Q}u$来记由$\psi$所确定的二次型.

1. $\mathcal{Q}u$是由满足$q\in\{q\}^{\perp}$的$q\in\mathcal{P}$所构成.

2. 设$q=\mathcal{P}(U)\in\mathcal{Q}u$. 于是$U\subset U^{\perp}$. $\psi|\,U^{\perp}$是退化的，$\psi|\,U^{\perp}$的零空间是U.

证明: 对1.: 见9.5.11.

对2.: $U=U^{\perp\perp}\subset U^{\perp}$意味着$U\cap U^{\perp}$是$\psi|\,U^{\perp}$的零空间，见定义7.4.1.3.

我们以研究射影空间$\mathcal{P}$和仿射空间$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}$中的二次型之间的联系来结束本节. 下述考虑对非本性的二次型也可进行.

定理9.5.17 设$\mathcal{P}=\mathcal{P}(V')$是一个$n$维射影空间. 考察$\mathcal{P}$中的一个超平面$\mathcal{P}_\infty=\mathcal{P}(V)$以及由此所确定的仿射空间$\mathcal{A}=\mathcal{P}\backslash\mathcal{P}_\infty$. 于是$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})=\mathcal{P}_\infty$.

设在V'上给出了一个本性的双线性形式ψ. 用$\perp$来标记由此所定义的配极，用$\mathcal{Q}u$来记所从属的二次型.

1. 如果$\mathcal{P}_\infty$不是$\mathcal{Q}u$的切超平面，则$\mathcal{Q}u\cap\mathcal{A}$是一个7.4.10中的$A1$型的秩为$n$的二次型. 精确地说，存在着一个射影参照系$Q=\{q_0,\cdots,q_n,e\}$，其中$q_0\in\mathcal{A}$，对$i>0$，$q_i\in\mathcal{P}_\infty$，使得在$V'$的从属的基$D=\{d_0,\cdots,d_n\}$下，二次型$\mathcal{Q}u$的方程可用

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i^2=\xi_0^2,\qquad \text{对所有的}\alpha_i\neq 0$$

给出. $\mathcal{A}$中的点有坐标$(1,\xi_1,\cdots,\xi_n)$.

2. 如果$\mathcal{P}_\infty$是$\mathcal{Q}u$的切超平面，则$\mathcal{Q}u\cap\mathcal{A}$是一个7.4.10中的$B$型的秩为$n-1$的二次型. 精确地说，存在着$\mathcal{P}$的一个射影参照系$Q=\{q_0,\cdots,q_n,e\}$，其中$q_0\in\mathcal{A},q_i\in\mathcal{P}_\infty$，对$1\leq i\leq n$，使得在$V'$的从属的基$D=\{d_0,\cdots,d_n\}$下，二次型$\mathcal{Q}u$的方程可

用

$$\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\xi_i^2=2\xi_0\xi_n,\quad 对所有的\alpha_i\neq 0$$

给出. 对 $\mathcal{Q}u\cap\mathcal{A}$ 中的点, 我们能令 $\xi_0=1$.

3. 对 $K=\mathbf{C}$ 或 $K=\mathbf{R}$ 的情形, 还能对 α_i 做出如 7.4.10 中的特别的假设.

证明: 对 1, 这时 $\psi|\ V$ 是非退化的, 于是 $V'=V+V^{\perp}$. $\psi|_V$ 定义了一个二次型, 即 $\mathcal{Q}u_\infty=\mathcal{Q}u\cap\mathcal{P}_\infty$. 按照 9.5.13, 存在 V 的一组基 $D=\{d_1,\cdots,d_n\}$, 使得 $\psi(d_i,d_j)=\beta_i\delta_{ij}$. 设 d_0 是 $V^\perp$ 的基. $\psi(d_0,d_0)\neq 0$. 我们用 $-\dfrac{1}{\psi(d_0,d_0)}\psi$ 来替代 ψ, 这样就得出结论.

对 2, 这时 $V^\perp\subset V$. 按照 9.5.16, $V^\perp$ 是 $\psi|\ V$ 的零空间, $\dim V^\perp=1$. 设 W 是 $V^\perp$ 在 V 中的补. 于是存在 W 的一组基 $\{d_1,\cdots,d_{n-1}\}$, 使得 $\psi(d_i,d_j)=\alpha_i\delta_{ij}$, 其中 $\alpha_i\neq 0$, $(1\leq i,j\leq n-1)$. 考察2维空间 $W^\perp$. $V'=W+W^\perp$ 和 $V^\perp\subset W^\perp$. 设 d_n 是 $V^\perp\subset V$ 的基. 于是存在 $W^\perp$ 的一组基 $\{d_0,d_n\}$, 使得 $\psi(d_0,d_n)=-1,\psi(d_0,d_0)=0$. 因为 ψ 是非退化的, 且 $V^{\perp\perp}=V$, 所以总存在一个 $d_0'\in V'\backslash V$, 使得 $\psi(d_0',d_n)=-1$. 现在令 $d_0=d_0'+\beta d_n$, 其中 $\beta=\dfrac{\psi(d_0',d_0')}{2}$. □

补充9.5.18 设 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(V)$ 是一个 n 维仿射空间, $\mathcal{P}=\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 是其射影扩张.

1. $\mathcal{A}$ 中的满足 $r=n$ 的 7.4.10 中 $A1$ 型的二次型 $\mathcal{Q}u_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{P}$ 上唯一地确定了一个二次型 $\mathcal{Q}u$, 且满足 $\mathcal{Q}u\cap\mathcal{A}=\mathcal{Q}u_{\mathcal{A}}$. 而 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$ 不切于 $\mathcal{Q}u$.

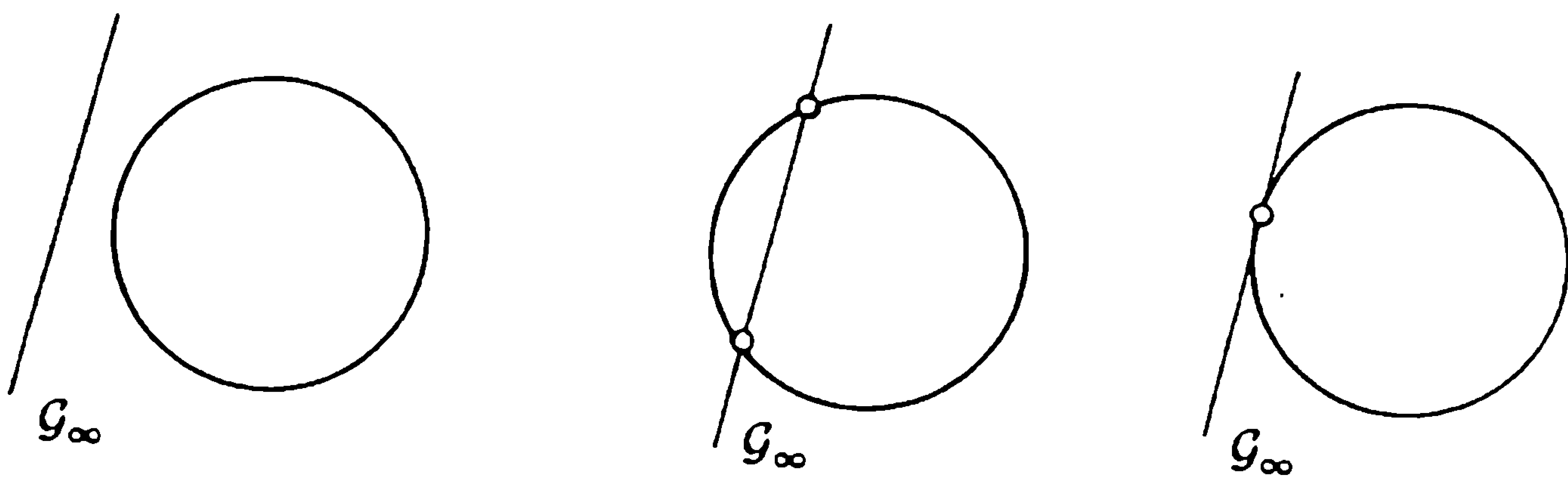
精确地说, 如果 $\mathcal{Q}u_{\mathcal{A}}$ 在一个仿射参照系 P 下用 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i^2=1$ 给出, 则 $\mathcal{Q}u$ 在按照 9.2.9 由此仿射参照系所确定的射影参照系 Q 下的方程为 $-\xi_0^2+\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i^2=0$.

2. $\mathcal{A}$中的满足$r=n-1$的7.4.10中B型的二次型$\mathcal{Q}u_{\mathcal{A}}$在$\mathcal{P}$上唯一地确定了一个二次型$\mathcal{Q}u$, 且满足$\mathcal{Q}u\cap\mathcal{A}=\mathcal{Q}u_{\mathcal{A}}$.

精确地说，如$\mathcal{Q}u_{\mathcal{A}}$在一个仿射参照系$P$下用$\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\xi_i^2=2\xi_n$给出，则$\mathcal{Q}u$在由此仿射参照系所确定的射影参照系$Q$下的方程为$-2\xi_0\xi_n+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\xi_i^2=0$.

证明: 这得自关于P的仿射坐标$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$与关于Q的射影坐标$(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)$之间的关系，见9.2.9.

例9.5.19 考察实射影平面$\mathcal{P}$. 由9.5.14.1, 二次型$\mathcal{Q}u\neq\emptyset$仅存在唯一的一种类型；它可用$x'^2+y'^2-z'^2=0$来描述.



现设 $\mathcal{G}=\mathcal{P}_\infty$是$\mathcal{P}$中的一条直线. 设$\mathcal{A}=\mathcal{P}\backslash\mathcal{P}_\infty$是由此所确定的仿射平面. 如果 $\mathcal{G}=\mathcal{P}_\infty$不切于$\mathcal{Q}u$, 将一个坐标用1代入，则定义了$\mathcal{Q}u\cap\mathcal{A}$: 对$z'=1,x'=x,y'=y$, 我们得到了$x^2+y^2=1$, 即一个圆.

对$y'=1,x'=y,z'=x$, 我们得到了$x^2-y^2=1$, 即一条双曲线.

如果 $\mathcal{G}=\mathcal{P}_\infty$切于$\mathcal{Q}u$, 则令

$$x'=x,\quad -\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}=y,\quad \frac{y'-z'}{\sqrt{2}}=1.$$

于是我们得到$x^2=2y$, 即一条抛物线.

我们能解释如下：视$\mathbf{R}^3$为仿射空间，并考察其中的锥面$x'^2+y'^2-z'^2=0$. 将仿射平面表为$\mathbf{R}^3$中不通过$0\in\mathbf{R}^3$的平面. 平面中的仿射二次型得自此平面与锥面的交集.

将它与8.6.14作比较，我们在那里已导入了欧氏平面中二次型的类似结果. 因为存在着比仿射二次型更多的欧氏类型，所以在那里的推导自然要花费更多的精力.

例9.5.20 按照9.5.14.2, 对实3维射影空间$\mathcal{P}$中的非退化二次型，存在着两种类型：

(I) $x'^2+y'^2+z'^2-t'^2=0$;

(II) $x'^2+y'^2-z'^2-t'^2=0$.

我们首先考察类型 (I). 设$\mathcal{P}_\infty$是一个平面，它不与$\mathcal{Q}u$相切. 我们将一个坐标用1代入，就定义了$\mathcal{A}=\mathcal{P}\backslash\mathcal{P}_\infty$中的一个二次型$\mathcal{Q}u\cap\mathcal{A}$. 存在着两种情形：

$$x'=x,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=1,$$

$$\text{于是 } x^2+y^2+z^2=1\ :\ \text{球面}.$$

$$x'=y,\ y'=z,\ t'=x,\ z'=1,$$

$$\text{于是 } x^2-y^2-z^2=1\ :\ \text{双叶双曲面}.$$

如果$\mathcal{P}_\infty$切于$\mathcal{Q}u$, 则令

$$x'=x,\ y'=y,\ -\frac{z'+t'}{\sqrt{2}}=z,\ \frac{z'-t'}{\sqrt{2}}=1,$$

$$\text{于是 } x^2+y^2=2z\ :\ \text{椭圆抛物面}.$$

对 (II) 型，我们可类似地得到：如果$\mathcal{P}_\infty$不切于$\mathcal{Q}u$, 则

$$x^2+y^2-z^2=1 \qquad \text{单叶双曲面}.$$

如果$\mathcal{P}_\infty$切于$\mathcal{Q}u$, 则

$$x^2-y^2=2z\ :\ \text{双曲抛物面}.$$

引理9.5.21 设$\mathcal{Q}u$是射影直线$\mathcal{G}$上的一个二次型，它由两个不同的点r和s所组成. 设$p\in\mathcal{G}$与r和s是不同的. 于是如果p是配极于q的点，则有 DV $(p,q,r,s)=-1$.

注: 在射影直线上，二次型或者是空集，或者是由一点或两点所组成.

证明: 因为$\{p,q,s\}$是一个射影参照系，所以我们能用形如$\{x,y,x+y\}$的齐次坐标来描述$\{p,q,s\}$. 于是$\mathcal{Q}u$可用ψ按下面的方法表出:

$$\psi(x,x)=\psi(y,y)=\psi(x,y)=0,$$

于是

$$0=\psi(x+y,x+y)=\psi(x-y,x-y).$$

即$x-y$是配极于$x+y$的点. 现在可应用9.4.4.1. □

用此方法可得出

定理9.5.22 设$\mathcal{Q}u$是射影空间$\mathcal{P}$中的一个本性的二次型. 考察$p\notin\mathcal{Q}u$以及与其相配极的超平面$\{p\}^{\perp}=\mathcal{H}$. $p\notin\mathcal{H}$. 于是关于偶$(p,\mathcal{H})$的镜射$\sigma=\sigma(p,\mathcal{H})$将二次型$\mathcal{Q}u$映至自身.

证明: 考察一条过p的直线$\mathcal{G}$. 有$\mathcal{G}\cap\mathcal{Q}u=\{r,s\},r\neq s$. 于是$\{r,s\}$是$\mathcal{G}$上的所诱导的二次型. 设$\mathcal{G}\cap\mathcal{H}=\{q\}$. 于是$q$是$\mathcal{G}$上的与$p$相配极的点. 按照9.5.21, DV $(p,q,r,s)=-1$, 于是按照9.4.14, $\sigma(r)=s$. 如果$\mathcal{Q}u\cap\mathcal{G}=\{q\}$, 则$\mathcal{G}\subset T_q\mathcal{Q}u$, 见9.5.15. 于是$q\in\mathcal{H},\sigma(q)=q$. □

注解9.5.23 借助于9.5.22, 配极于$p\notin\mathcal{Q}u$的点$q\in\{p\}^{\perp}$可按下述方法去构造: 如果q总位于过p的，且与$\mathcal{Q}u$相交一条直线$\mathcal{G}$上，那么:

如果$\mathcal{G}\cap\mathcal{Q}u=\{q\}$, 则$q\in\{p\}^{\perp}$. 如果$\mathcal{G}\cap\mathcal{Q}u=\{r,s\},r\neq s$, 则$q\in\{p\}^{\perp}$是关于$r,s,p$的第四调和点. 这可按照9.5.17, 借助于完全四边形来确定 —— 注意，我们现在用$\{r,s,p,q\}$来记9.5.17中的$\{p,q,r,s\}$.

习题

1. n维向量空间V上的射影空间$\mathcal{P}(V)$能被解释为$V\backslash\{0\}$上关于下述等价关系$\sim$的等价类的集合： $x \sim y$, 如果存在一个$\lambda \in K$, 使得$x = \lambda y$. 于是由典范射影$p: V\backslash\{0\} \to \mathcal{P}(V)$, 在$\mathcal{P}(V)$上就诱导了一个拓扑 ($U \subset \mathcal{P}(V)$是开的，如果$p^{-1}(U)$是开的). 证明： $\mathcal{P}(\mathrm{V})$是紧致的、连通的.

2. 射影空间$\mathcal{P}(\mathbf{C}^2)$是同胚于2-球面$S^2 = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3$. 对此可利用映射

$$H: S^3 \longrightarrow S^2; \qquad H(z,w) = (2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2),$$

$$p: S^3 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{C}^2); \quad p(z) = [z],$$

并证明：由 $p(x) = p(y)$可得出$H(x) = H(y)$.

3. 确定具有两个元素的域$\mathbf{Z}_2$上的射影平面$\mathcal{P}(\mathbf{Z}_2^3)$的点的个数和直线的条数. 在$\mathbf{R}^2$中给出一个表示$\mathcal{P}(\mathbf{Z}_2^3)$中的点和直线的构图.

4. 设p,q,r,s,t是射影直线上五个不同的点. 则成立

$$\mathrm{DV}\ (p,q,s,t)\ \mathrm{DV}\ (q,r,s,t)\ \mathrm{DV}\ (r,p,s,t) = 1.$$

5. 设f是射影直线中的一个射影变换，它有两个不同的不动点p,q (即$p \neq q$, $f(p) = p, f(q) = q$). 证明：满足

$$k = \ \mathrm{DV}\ (p,q,r,f(r))$$

的集合$\{k, \frac{1}{k}\}$仅与f有关，而与r无关. 如果用矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 来表示f, 则 $\{k, \frac{1}{k}\}$是方程

$$(ad-bc)x^2 - (a^2+2bc+d^2)x + (ad-bc) = 0$$

的根.

6. 射影直线中的射影变换 f 是一个对合，如果 $f^2 = \mathrm{id}$，但 $f \neq \mathrm{id}$. 如果用矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 来表示这样的射影变换，则其迹 $a + d = 0$.

7. 设 Qu 是射影空间 $\mathcal{P}(V)$ 中的一个二次型. 如果 $\mathcal{P}(V)$ 中的两点 $p \neq q$ 关于 Qu 是配极的，而且如果通过 p 和 q 的射影直线与 Qu 的交集正好是两个不同的点 r, s, 则点 p, q 被 r, s 调和分割. 反过来也成立吗？

8. 对实射影平面中的五个不同的点 $p_i, i = 1, \cdots, 5$, 存在着一个二次型 Qu, 使得 $p_i \in Qu, i = 1, \cdots, 5$.

9. 设 Qu 是射影平面中的一个二次型， p, q, r, s, t, u 是 Qu 上的点. 则点 $\mathcal{G}_{pq} \cap \mathcal{G}_{st}$, $\mathcal{G}_{qr} \cap \mathcal{G}_{tu}$, $\mathcal{G}_{rs} \cap \mathcal{G}_{up}$ 是共线的.

第 10 章

非欧几何

10.1 双曲空间

与欧氏空间相对照，存在着两种所谓的非欧几何：双曲几何和椭圆几何.

在本节中我们来定义双曲空间. 定义的出发点是一个形如 $V' = \mathbf{R} \times V$ 的向量空间，在这里 V 是一个带有数量积 $\langle\ ,\ \rangle$ 的欧氏空间. 由此，用 $\langle\ ,\ \rangle_L|\ \mathbf{R} =$ 负的典范数量积及 $\langle\ ,\ \rangle_L|\ V = \langle\ ,\ \rangle$ 在 V' 上就定义了 Lorentz 形式 $\langle\ ,\ \rangle_L$.

在 V' 中考虑正的开圆锥 $P = \{(\xi, x); |x| < \xi\}$. $GL(V')$ 中的使 $\langle\ ,\ \rangle_L$ 不变，并使 P 变至自身的子群被称为是 Lorentz 群 $LO(V')$. 定义 V' 上的双曲空间 $\mathcal{H}yp = \mathcal{H}yp(V')$ 为子集 $\mathcal{P}(P) \subset \mathcal{P}(V')$. 它的子空间是 $\mathcal{P}(V')$ 的从属于 $\mathcal{P}(P)$ 的子空间.

在双曲空间 $\mathcal{H}yp$ 上定义了一个距离，该距离在 Lorentz 群在射影群 $\mathcal{P}(GL(V')) = Pro(\mathcal{P}(V'))$ 中的象 $\mathcal{P}(LO(V'))$ 的作用下是不变的. 于是我们将 $Pro(\mathcal{P}(V'))$ 的这个子群称为双曲运动群 $Bew(\mathcal{H}yp)$. 它具有许多与欧氏空间的运动群 $Bew(\mathcal{E}u)$ 共同的性质.

定义 10.1.1 1. 设 $V = \{V, \langle\ ,\ \rangle\}$ 是一个维数 ≥ 1 的欧氏向量空间. 令 $\mathbf{R} \times V = V'$. 我们也把 $\mathbf{R} \times V$ 中的元素 (ξ, x) 写成形如 $\tilde{x}$.

2. 在 V' 上我们用

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_L = \langle (\xi, x), (\eta, y) \rangle_L = -\xi\eta + \langle x, y \rangle$$

来定义 Lorentz 形式. 显然这是 V' 上的一个非退化的对称双线性形式.

3. 用$\{|x|<\xi\}$定义子集$P\subset V'$. 定义$-P$为$-\tilde{x}$的集合，这里$\tilde{x}\in P$.

4. 把形式$\langle\ ,\ \rangle_L$的零空间$\{\langle,\rangle_L=0\}$记为K_L'.

5. 如U'是V'的一个子空间，则我们用$U'^{\perp}$来记U'关于$\langle\ ,\ \rangle_L$的正交子空间.

6. 所谓V'的一组ON-基是指形如$\widetilde{D}=\{\widetilde{d}_0,\widetilde{d}_1,\cdots,\widetilde{d}_n\}$的一组基，这里$\widetilde{d}_0\in P$; $\langle\widetilde{d}_i,\widetilde{d}_j\rangle_L=\varepsilon_i\delta_{ij}$, $\varepsilon_0=-1$, $\varepsilon_i=+1$, $(i>0)$.

注解10.1.2 1. P是一个正区域，即对P中的$\widetilde{x},\widetilde{y}$以及$\alpha,\beta>0$, 有$\alpha\widetilde{x}+\beta\widetilde{y}\in P$. $P\neq\emptyset$, 它在V'是开的，且带有欧氏数量积$\langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle=\xi^2+\langle x,x\rangle$.

2. 零空间K_L'是锥型的，即对$\widetilde{x}\in K_L'$, 也成立$\alpha\widetilde{x}\in K_L'$, 这里$\alpha\in R$, 亦见9.5.11.3.

3. 在10.1.1.6中，我们让ON-基的指标集合从 0而不是从1开始. 相应于此，今后对向量的分量的指标和矩阵元素的指标偶也从 0开始，除非我们已经明确地说出例外的情形.

命题10.1.3 设$U'\subset V'$是一个满足$U'\cap P\neq\emptyset$的子空间.、于是$\langle,\rangle_L|\ U'$是U'上的一个Lorentz形式. 特别地，$U'+U'^{\perp}=V'$; $\langle\ ,\ \rangle_L|\ U'^{\perp}$是正定的.

证明: 按假设，存在一个$\widetilde{d}\in U'\cap P$, 它满足$\langle\widetilde{d},\widetilde{d}\rangle_L=-1$. 于是$[\widetilde{d}]+[\widetilde{d}]^{\perp}=V'$. 由6.5.11得出，$\langle\ ,\ \rangle_L|\ [\widetilde{d}]^{\perp}$是正定的. 利用$U'=[\widetilde{d}]+[\widetilde{d}]^{\perp}\cap U'$, 结论就可得出. □

命题10.1.4 设$\widetilde{y}\neq 0$取自K_L', 则$[\widetilde{y}]\cap P=\emptyset$.

证明: 记$\widetilde{y}=(\eta,y)$, 且$\pm\eta=|y|\neq 0$. 于是

$$|\alpha y|\geq\alpha\eta,\qquad \text{对所有 }\alpha\in R.$$

由此可得出结论. □

与6.1.8相对照，有:

引理10.1.5 设$\widetilde{B}=\{\widetilde{b}_0,\widetilde{b}_1,\cdots,\widetilde{b}_n\}$是$V'$的一组基，且满足$\widetilde{b}_0\in P$. 于是正好存在一组ON-基$\widetilde{D}=\{\widetilde{d}_0,\widetilde{d}_1,\cdots,\widetilde{d}_n\}$, 使

得

$$\widetilde{d}_k = \sum_{j \le k} \alpha_{jk} \widetilde{b}_j \qquad \text{和} \qquad \alpha_{kk} \ge 0.$$

特别地，对每个 k, 有 $[\widetilde{d}_0, \cdots, \widetilde{d}_k] = [\widetilde{b}_0, \cdots, \widetilde{b}_k]$.

证明: $\widetilde{d}_0$ 被确定为 $\dfrac{\widetilde{b}_0}{\sqrt{-\langle \widetilde{b}_0, \widetilde{b}_0 \rangle_L}}$. 按照10.1.3, $\langle\ ,\ \rangle_L | [\widetilde{d}_0]^\perp$ 是正定的. 于是我们能像6.1.8的证明那样继续进行. □

引理 10.1.6 满足

$$\langle f(\widetilde{x}), f(\widetilde{y}) \rangle_L = \langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle_L, \qquad \text{对所有 } (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in V' \times V' \qquad (10.1)$$

及 $f(P) \subset P$ 的 $f \in GL(V')$ 的集合是一般线性群 $GL(V')$ 的一个子群 $LO(V')$, 称为 Lorentz 群.

证明: 子群判据显然是满足的. □

注: 满足 (10.1) 的 $f \in GL(V')$ 所构成的子群也是 $\langle\ ,\ \rangle_L$ 不变的, 也称为关于 $\langle\ ,\ \rangle_L$ 的正交群. 于是人们把它记为譬如说 $\boldsymbol{O}(\mathbf{R}, V)$. 我们让它保持原状, 然而在我们上述的命名的情况下, 涉及群处理时还附加了遵守关系 $|x| < \xi$.

Lorentz 群具有一系列类似于正交群所具有的性质. 我们先证明:

定理 10.1.7 考察 $\langle V', \langle\ ,\ \rangle_L \rangle$, $\dim V' = n + 1$.

1. $f \in LO(V')$ 将一组ON-基变为一组ON-基. 对每两组ON-基 $\widetilde{D}$ 和 $\widetilde{D}'$, 正好存在一个 $f \in LO(V')$, 使得 $f(\widetilde{D}) = \widetilde{D}'$.

2. 关于ON-基 $\widetilde{D} = \{\widetilde{d}_0, \widetilde{d}_1, \cdots, \widetilde{d}_n\}$, 基本矩阵 $(\langle \widetilde{d}_i, \widetilde{d}_j \rangle_L)$ 具有形状

$$E_{1,n} = (\varepsilon_i \delta_{ij}), \text{这里}\ \varepsilon_0 = -1, \varepsilon_i = +1 \quad (i > 0).$$

由此, 元素 $f \in LO(V')$ 的矩阵表示 $A = \Phi_{\widetilde{D}} \circ f \circ \Phi_{\widetilde{D}}^{-1}$ 用性质

$$A E_{1,n} {}^t A = E_{1,n}, \qquad \alpha_{00} > 0$$

标明. 特别地, 对$f\in LO(V')$, 有$\det f=\pm1$. 定义特殊Lorentz群$SLO(V')$为$\{f\in LO(V');\det f=1\}$.

3. 对$\widetilde{x}\in P$, 我们用$LO(V')_{\widetilde{x}}$来标记集合

$$\{f\in LO(V');f(\widetilde{x})=\widetilde{x}\}.$$

$LO(V')_{\widetilde{x}}$是$LO(V')$的一个子群，且对$\alpha>0$，有$LO(V')_{\alpha\widetilde{x}}=LO(V')_{\widetilde{x}}$. $LO(V')_{\widetilde{x}}$是共轭于群$LO(V')_{(1,0)}$, 它典范同构于$\boldsymbol{O}(V)$.

证明: 对1.: 这能如同8.1.10那样被证明.

对2.: 基本矩阵的形态得自定义10.1.1.6. 其余部分如同6.4.16的证明那样被证得.

对3.: 对$LO(V')_{\widetilde{x}}$的子群判据的有效性是显然的. 如果$\widetilde{x}$, $\widetilde{x}'$是P中的两个元素，则由1., 存在一个$g\in LO(V')$, 使得$g(\widetilde{x})=\alpha\widetilde{x}'$, $\alpha>0$. 由此， $f(\widetilde{x})=\widetilde{x}$是等价于$gfg^{-1}(\widetilde{x}')=\widetilde{x}'$.

最后，满足$f((1,0))=(1,0)$的$f\in LO(V')$完全由$f|_{\{0\}\times V}$所确定，且对$(x,y)\in V\times V$, 有$\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$.

我们通过对照8.1.19来补充10.1.7.

引理10.1.8 1. 设$U'\subset V'$是子空间， $U'\cap P\neq\emptyset$. 于是关于U'的镜射$s=s_{U'}$定义为$s|_{U'}=\mathrm{id}_{U'}$; $s|_{U'^{\perp}}=-\mathrm{id}_{U'^{\perp}}$, $s_{U'}\in LO(V')$.

2. 特别当 $\operatorname{codim} U'=1$, 于是 $\dim U'^{\perp}=1$时，则所谓超平面镜射$s_{U'}$允许有下列表示：选$\widetilde{d}\in U'^{\perp}$使得$\langle\widetilde{d},\widetilde{d}\rangle_L=1$. 于是

$$s_{U'}(\widetilde{x})=\widetilde{x}-2\langle\widetilde{x},\widetilde{d}\rangle_L\widetilde{d}.$$

3. 每个$f\in LO(V')$可表示为个数$\le n+1$个超平面镜射的乘积. 对$SLO(V')$中的元素，这些镜射的个数是偶数，这里$n+1=\dim V'$.

证明: 对1.: 按照10.1.3, 由$U'\cap P\neq\emptyset$得出： $U'+U'^{\perp}=V'$及$\langle\ ,\ \rangle_L|\ U'^{\perp}$是正定的. 由此人们断定$s_{U'}\in LO(V')$.

对 2.: 人们可验证 $s_{U'}(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \iff \langle \widetilde{x}, \widetilde{d} \rangle_L = 0$, $s_{U'}(\widetilde{d}) = -\widetilde{d}$.

对 3.: 我们按 8.1.9 中的证明那样进行. 因为我们能假设 $f \neq \mathrm{id}_{V'}$, 所以存在 $\widetilde{d} \in P$ 使得 $f(\widetilde{d}) \neq d$. 由于 $(f(\widetilde{d}) - \widetilde{d}) \perp (f(\widetilde{d}) + \widetilde{d})$ 及 $f(\widetilde{d}) + \widetilde{d} \in P$, 所以从 10.1.4 可得出 $f(\widetilde{d}) - \widetilde{d} \notin K'_L$. 即 $[f(\widetilde{d}) - \widetilde{d}]^{\perp}$ 是 V' 中的一个与 P 相交的超平面. 关于这个超平面的镜射 s, 我们发现 $s \cdot f(\widetilde{d}) = \widetilde{d}$. 在 $s \cdot f|\ [\widetilde{d}]$ 上我们能应用 8.1.19. 因为超平面镜射有行列式为 -1, 所以最后的结论亦可得出. □

现在我们进入了本节的实质内容.

定义 10.1.9 如在 10.1.1 中那样, 考察 $\langle V', \langle , \rangle_L \rangle$.

1. 定义 $\langle V', \langle , \rangle_L \rangle$ 上的双曲空间 $\mathcal{H}yp = \mathcal{H}yp(V')$ 为射影空间 $\mathcal{P}(V')$ 的子集 $\mathcal{P}(P)$. 定义 k 维双曲子空间为 $\mathcal{P}(U' \cap P)$, 这里 U' 是 V' 的一个 $(k+1)$ 维子空间, 且 $P \cap U' \neq \emptyset$. 于是 $\mathcal{P}(U' \cap P) = \mathcal{P}(U') \cap \mathcal{H}yp$.

对 $k = 0$, 称此空间为点, 对 $k = 1$, 称此空间为直线, 对 $k = 2$, 称此空间为平面, 对 codim $= 1$, 称此空间为超平面.

2. 定义双曲运动群 $Bew(\mathcal{H}yp)$ 为

$$\mathcal{P}(GL(V')) = Pro(\mathcal{P}(V'))$$

的子群 $\mathcal{P}(LO(V'))$. 并定义本性的双曲运动群 $Bew^+(\mathcal{H}yp)$ 为 $\mathcal{P}(SLO(V'))$.

3. 用 $\mathcal{P}(K'_L) = \mathcal{P}(\{\langle , \rangle_L = 0\})$ 来定义 $\mathcal{P}(V')$ 中的二次型 $\mathcal{Q}u_L$. 也称这个二次型的元素为双曲空间的无限远点. 因此我们也用 $\mathcal{H}yp_\infty(V')$ 来标记这个集合.

注解 10.1.10 1. 因为 P 是开的, $U' \cap P \neq \emptyset$ 意味着 $U' \cap P$ 是 U' 的一个开子集, 精确地说, 是 U' 中的一个正锥. 每个子空间 $\mathcal{P}(U' \cap P) \subset \mathcal{H}yp(V')$ 确定了 $\mathcal{P}(V')$ 的子空间 $\mathcal{P}(U')$. 因此我们今后对这个子空间也应用相同的记号.

2. 我们将在10.1.15中表明“运动群”的命名是正确的. 我们注意,

$$\mathcal{P}: LO(V') \to \mathcal{P}(LO(V')) = Bew(\mathcal{H}yp(V'))$$

是一个同构. 这是因为由9.1.6.2., $HT(V') \cap LO(V')$是这个态射的核. $\det h_\alpha = \pm 1$及$h_\alpha(P) = P$诱导了$\alpha = 1$.

3. 在$V' = \mathbf{R} \times V$上考虑一个满足$\ker l = V$, $l|_{\{1\}\times V} = 1$的线性形式l. 在9.2.6中我们已经指出: $\mathcal{P}(V')\backslash\mathcal{P}(\{0\} \times V)$是一个仿射空间$\mathcal{A}$, 它能典范地恒同于$\{l = 1\} = \{1\} \times V$. 在$V$上的数量积$\langle\ ,\ \rangle$把$\mathcal{A}$造成了一个欧氏空间$\mathcal{E}u$, 我们用它的模型$V$来恒同它. 由此, $\mathcal{H}yp(V') = \mathcal{P}(P)$对应于$V$中的开球$B = \{\ |\ \ | < 1\}$及$\mathcal{H}yp_\infty(V')$对应于边界$\partial\overline{B} = \{\ |\ \ | = 1\}$, 于是它是$V$中的单位球面$S(V)$. 从而$\mathcal{H}yp(V')$可收缩到一点. 然而, 余集$\mathcal{P}(V')\backslash\mathcal{H}yp(V')$可收缩至到$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\{0\} \times V)$上. $Bew(\mathcal{H}yp(V'))$是$Pro(\mathcal{P}(V'))$的这样的一个子群, 它把“球体”$\mathcal{P}(P) = \mathcal{H}yp(V')$变至自身.

命题10.1.11 设p和q是$\mathcal{H}yp = \mathcal{H}yp(V')$的两个点, 且$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{pq}$是过$p$和$q$的射影直线. 当$p = q$时, 设$\mathcal{G}$是一条过$p$的任意直线. $\mathcal{G}$与$\mathcal{H}yp_\infty$正好交于两点u和v. 于是 DV $(u, v, p, q) > 0$, 且仅当$p = q$时 DV $(u, v, p, q) = 1$.

如果$\widetilde{x}, \widetilde{y}$是$P$中的$p$和$q$的齐次坐标, 则成立

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|\log\ \mathrm{DV}\ (u,v,p,q)| \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{|\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle_L| + \sqrt{\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle_L^2 - \langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_L\langle\widetilde{y},\widetilde{y}\rangle_L}}{|\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle_L| - \sqrt{\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle_L^2 - \langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_L\langle\widetilde{y},\widetilde{y}\rangle_L}} \\
&= \log\frac{|\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle_L| + \sqrt{\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle_L^2 - \langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_L\langle\widetilde{y},\widetilde{y}\rangle_L}}{\sqrt{\langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_L\langle\widetilde{y},\widetilde{y}\rangle_L}} \\
&= \cosh^{-1}\frac{|\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle_L|}{\sqrt{\langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_L\langle\widetilde{y},\widetilde{y}\rangle_L}},
\end{aligned}$$

这里 $\cosh^{-1}$ 是双曲余弦 $\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ 的反函数在 $t \geq 0$ 上的限制.

证明: 设 $\mathcal{G} = \mathcal{P}(V')$, U 是一个2维子空间, 且 $U' \cap P \neq \emptyset$. 按10.1.3, $\langle\ ,\ \rangle_L |\ U'$ 是 U' 上的一个Lorentz形式. 对 $U' = [\widetilde{x}, \widetilde{y}]$, 我们在 $\langle\ ,\ \rangle_L |\ U'$ 的零空间 $K'_L \cap U'$ 中寻找元素 $\lambda\widetilde{x} + \mu\widetilde{y}$. 这构成了两个1维子空间, 我们能把其基写成 $\alpha\widetilde{x} + \widetilde{y}$, $\beta\widetilde{x} + \widetilde{y}$, 这里 α 和 β 是方程 $\langle\alpha\widetilde{x} + \widetilde{y}, \beta\widetilde{x} + \widetilde{y}\rangle_L = 0$ 的解. 于是 $\alpha\beta = \dfrac{\langle\widetilde{y}, \widetilde{y}\rangle_L}{\langle\widetilde{x}, \widetilde{x}\rangle_L}$.

由 9.4.4.1., 我们利用 $(\alpha_0, \alpha_1) = (\alpha, 1)$, $(\beta_0, \beta_1) = (\beta, 1)$, $(\gamma_0, \gamma_1) = (1, 0)$, $(\delta_0, \delta_1) = (0, 1)$ 发现:

$$\mathrm{DV}\ (u, v, p, q) = \frac{-1}{\alpha} : \frac{1}{-\beta} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\langle\widetilde{y}, \widetilde{y}\rangle_L}{\alpha^2\langle\widetilde{x}, \widetilde{x}\rangle_L} > 0.$$

如果必要, 在这里把 u, v 的记号互换, 我们能假设 $\dfrac{\beta}{\alpha} \geq 1$. 由此人们对 $\dfrac{1}{2}|\log\ \mathrm{DV}\ (u, v, p, q)|$ 发现了第二个式子. 第三个式子得自分母的约化, 第四式得自 cosh 的定义. □

注解10.1.12 除 $\cosh t$ 外, 也能定义 $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, 并令 $\dfrac{\sinh t}{\cosh t} = \tanh t$; $\dfrac{\cosh t}{\sinh t} = \coth t$. 通过计算人们可验证:

$$\sinh(a + b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$

特别地, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

命题10.1.13 每点 $p \in \mathcal{H}yp(V')$ 在集合

$$\mathcal{H}yp_H = \{(\xi, x) \in P; -\xi^2 + |x|^2 = -1\}$$

中正好具有一个齐次坐标. 我们称 $\mathcal{H}yp_H = \mathcal{H}yp_H(V')$ 为双曲空间 $\mathcal{H}yp(V')$ 的双曲模型.

证明: 对 $\widetilde{x}\in P$, 考察由元素 $\dfrac{\widetilde{x}}{\sqrt{-\langle\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle_L}}$ 所组成的集合 $[\widetilde{x}]\cap\mathcal{H}yp_H$. □

注: 因此"双曲模型"的命名是起源于: $\{-\xi^2+|x|^2=-1\}$ 表示了空间 V' 中的一个双曲面. $\mathcal{H}yp_H(V')$ 是这个双曲面的两个连通分支中的一个.

命题10.1.14 设 $\mathcal{G}$ 是一条双曲直线. 选 $p\in\mathcal{G}$, 且将 $\mathcal{G}$ 的两个无限远点中的一点标记为正的无穷远点. 设 $\widetilde{x}\in\mathcal{H}yp_H$ 是 p 的坐标, 且 $\widetilde{x}'\in V'$ 满足 $\langle\widetilde{x},\widetilde{x}'\rangle_L=1$, $\langle\widetilde{x},\widetilde{x}'\rangle_L=0$, 且使得则 $\widetilde{x}+\widetilde{x}'$ 是正无穷远点的坐标. 于是可把直线 $\mathcal{G}$ 表成

$$t\in\mathbf{R}\mapsto\widetilde{x}=\sinh t\widetilde{x}'+\cosh t\widetilde{x}\in\mathcal{H}yp_H.$$

精确地说, 利用 $p(t)=\mathcal{P}(\widetilde{x}(t))\in\mathcal{H}yp$, 有

$$\frac{1}{2}|\log\ \mathrm{DV}\ (u,v,p(0),p(t)|=|t|.$$

证明: 利用 $\langle\widetilde{x}(t);\widetilde{x}'(t)\rangle_L=\sinh^2t-\cosh^2t=-1$ 及 $\widetilde{x}(0)=\widetilde{x}\in\mathcal{H}yp_H$, 从连续性可得出 $\widetilde{x}(t)\in\mathcal{H}yp_H$. 因为 $\langle\widetilde{x}(0),\widetilde{x}(t)\rangle_L=-\cosh t$, 其余部分得自10.1.11. □

定理10.1.15 在双曲空间 $\mathcal{H}yp=\mathcal{H}yp(V')$ 上,

$$d(p,q)=\frac{1}{2}|\log\ \mathrm{DV}\ (u,v,p,q)|$$

定义了一个距离. 这里 u, v 是通过 p 和 q 的直线 $\mathcal{G}=\mathcal{G}_{pq}$ 的无限远点. 这个距离在双曲运动下是不变的.

三角形等式 $d(p,q)+d(q,r)=d(p,r)$ 仅当三点 p, q, r 位于一条直线上, 且 $d(p,q)$, $d(q,r)\leq d(p,r)$ 满足时才成立.

证明: 因为双曲运动 π 把直线 $\mathcal{G}$ 的无限远点变至直线 $\pi(\mathcal{G})$ 的无限远点, 按照9.4.3, 交比在射影变换下是不变的, 于是得出 $d(\pi(p),\pi(q))=d(p,q)$.

$d(p,q)=d(q,p)$ 及 $d(p,q)\geq 0$，且仅当 $p=q$ 时有 $d(p,q)=0$ 是得自定义. 于是仅留下要去验证三角不等式的有效性. 对此我们能假设 $p\neq q$ 及 $q\neq r$.

如在 10.1.14 中那样，我们把 q 描述为 $\widetilde{y}\in\mathcal{H}yp_H$，且选满足 $\langle\widetilde{x}',\widetilde{x}'\rangle_L=\langle\widetilde{z}',\widetilde{z}'\rangle_L=+1$，$\langle\widetilde{y},\widetilde{x}'\rangle_L=\langle\widetilde{y},\widetilde{z}'\rangle_L=0$ 的 $\widetilde{x}'$，$\widetilde{z}'$，使得 $\mathcal{G}_{pq}=\mathcal{P}([\widetilde{y},\widetilde{x}'])$，$\mathcal{G}_{qr}=\mathcal{P}([\widetilde{y},\widetilde{z}'])$. 由此，$\mathcal{H}yp_H$ 中的 p 和 r 可表为

$$\widetilde{x}=\sinh a\widetilde{x}'+\cosh a\widetilde{y};$$
$$\widetilde{z}=\sinh b\widetilde{z}'+\cosh b\widetilde{y},$$

且 $|a|=d(p,q)$，$|b|=d(q,r)$. 因为 $\langle\widetilde{x}',\widetilde{z}'\rangle_L\geq 1$，所以得出

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{x},\widetilde{z}\rangle_L&=\sinh a\sinh b\langle\widetilde{x}',\widetilde{z}'\rangle_L-\cosh a\cosh b\\&\geq-\cosh(a+b)\end{aligned}$$

于是利用 10.1.11 中的第四个式子，有

$$d(p,r)=\cosh^{-1}|\langle\widetilde{x},\widetilde{z}\rangle_L|\leq d(p,q)+d(q,r).$$

等号仅当 $\widetilde{z}'=-\widetilde{y}'$ 时成立，这时 p, q, r 是共线的. □

系 10.1.16 在 10.1.14 中所描述的映射 $t\in\mathbf{R}\mapsto p(t)=\mathcal{P}(\widetilde{x}(t))\in\mathcal{G}$ 是一个等距. 特别地，成立

$$d(p(0),p(t))\to\infty,\qquad \text{对}\quad t\to\pm\infty.$$

定义 10.1.17 考察双曲空间 $\mathcal{H}yp=\mathcal{H}yp(V')$.

1. 设 $p\in\mathcal{H}yp$. 所谓 $\mathcal{H}yp$ 在 p 处的切空间 $T_p\mathcal{H}yp$ 是指空间 $[\widetilde{x}]^\perp\subset V'$，且带有诱导的数量积，这里 $\widetilde{x}\in P$ 是 p 的齐次坐标. 称 $T_p\mathcal{H}yp$ 中的元为在 p 处的切于 $\mathcal{H}yp$ 的切向量.

2. 对 $\mathcal{H}yp$ 的一个双曲子空间 $\mathcal{L}=\mathcal{P}(U'\cap P)$，定义在 $p\in\mathcal{L}$ 处切于 $\mathcal{L}$ 的切空间 $T_p\mathcal{L}$ 为 $T_p\mathcal{H}yp\cap U'$.

3. 所谓一个双曲参照系 (p, D) 是指点 $p \in \mathcal{H}yp$ 以及 $T_p\mathcal{H}yp$ 中的一组ON-基 D.

注解10.1.18 切空间的概念对于双曲空间理论及其在所谓黎曼流形上的推广来说是有其根本的意义.

对欧氏空间也已经有了切空间. 但这里不仅是其重要性，而且它的导入是不可避免的. 因为在这些情形下，切于 $\mathcal{E}u = \mathcal{E}u(V)$ 的切空间 $T_p\mathcal{E}u$ 是典范地恒同于欧氏向量空间 V.

命题10.1.19 考虑 $p \in \widetilde{x} \in \mathcal{H}yp_H$. 于是对 $\widetilde{y} \neq 0$, $\mathcal{G}_{\widetilde{y}} = \{\widetilde{x} + t\widetilde{y};\ t \in \mathbf{R}\}$ 是 V' 中一条包含点 $\widetilde{x}$ 的直线.

由此，$\widetilde{y} \in T_p\mathcal{H}yp_H$ 现在等价于 $\mathcal{G}_{\widetilde{y}}$ 与 "双曲面"$\{\langle\ ,\ \rangle_L = 0\}$ 仅交于点 $\widetilde{x}$.

证明:

$$\langle \widetilde{x} + t\widetilde{y}, \widetilde{x} + t\widetilde{y} \rangle_L = -1 + 2t\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle_L + t^2\langle \widetilde{y}, \widetilde{y} \rangle_L = -1$$

仅在 $t = 0$ 时是等价于蕴含关系

$$2\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle_L + t\langle \widetilde{y}, \widetilde{y} \rangle_L = 0 \Rightarrow t = 0. \tag{10.2}$$

对 $\langle \widetilde{y}, \widetilde{y} \rangle_L = 0$, 按照 10.1.4, 有 $\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle_L \neq 0$. 且对 $\langle \widetilde{y}, \widetilde{y} \rangle_L \neq 0$, (10.2) 是等价于 $\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \rangle_L = 0$, 即 $\widetilde{y} \in T_p\mathcal{H}yp$. □

定理10.1.20 1. 对每一个 $p \in \mathcal{H}yp$, 双曲运动 $\pi : \mathcal{H}yp \to \mathcal{H}yp$ 诱导了一个等距同构:

$$T\pi = T_p\pi : T_p\mathcal{H}yp \to T_{\pi(p)}\mathcal{H}yp.$$

特别地，$(\pi, T\pi)$ 把一个双曲参照系 (p, D) 变到另一个双曲参照系 $(\pi(p), T\pi(D))$.

2. 对 $\mathcal{H}yp$ 的两个双曲参照系 (p, D), (p', D'), 正好存在一个双曲运动 π, 使得 $(\pi(p), T\pi(D)) = (p', D')$.

证明: 注意，可把双曲运动π写成$\mathcal{P}(f)$, 这里 $f\in LO(V')$. 于是1.可得自： $f\in LO(V')$把$\widetilde{x}\in P$变至$f(\widetilde{x})\in P$, 且把$[\widetilde{x}]^{\perp}$等距地变至$[f(\widetilde{x})]^{\perp}$.

其余部分得自10.1.7.1, 在那里我们注意到：$\langle V',\langle,\rangle_L\rangle$的一组ON-基$\widetilde{D}=\{\widetilde{d}_0,\widetilde{d}_1,\cdots,\widetilde{d}_n\}$对应于射影参照系

$$(p=\mathcal{P}(\widetilde{d}_0),\{\widetilde{d}_1,\cdots,\widetilde{d}_n\}).$$

□

由10.1.8, 我们有

引理10.1.21 1. 对$\mathcal{H}yp(V')$中的每一个k维子空间$\mathcal{L}$, 关于 $\mathcal{L}$的镜射$\sigma=\sigma_{\mathcal{L}}\in Bew(\mathcal{H}yp)$是用$\mathcal{P}(s_{U'})$来定义的，这里$\mathcal{L}=\mathcal{P}(U'\cap P)$.

2. 每一个$\pi\in Bew(\mathcal{H}yp)$可写成个数$\leq n+1$的关于超平面的镜射的乘积，这里$n=\dim\mathcal{H}yp$. 如果$\pi\in Bew^{+}(\mathcal{H}yp)$, 则这些镜射的个数正好就是偶数. □

10.2 双曲空间的共形模型

借助于所谓的球极投影，双曲空间$\mathcal{H}yp=\mathcal{H}yp(V')$的双曲模型$\mathcal{H}yp_H$被映到在$V'=\mathbf{R}\times V$中的向量空间$V$的单位球$B=\{|\ \ |<1\}$上. 将$\mathcal{H}yp_H$的双曲结构传送到$B$上后，就给出了$\mathcal{H}yp$的球模型$\mathcal{H}yp_B$, 也称它为共形模型.

后面这个名称起源于： $\mathcal{H}yp_B$在点u处的切空间$T_u\mathcal{H}yp_B$中的数量积与V上的欧氏数量积仅差一个正的因子. 这个因子仅与u有关.

$\mathcal{H}yp_B$的双曲子空间是作为B与球面$S_\rho(x)\subset V$的交集而给出的，它与边界$\partial\overline{B}=S_1(0)\subset V$正交地相交.

对于2维双曲几何，借助于实(2,2)-矩阵，对本性的运动存在着一种的特别简单的描述. 我们用双曲三角学的基本公式

来结束本节.

命题10.2.1 考虑映射 (亦称为球极投影)

$$
\begin{aligned}
&u:\mathcal{H}yp_H \to B=B(V)=\{|\ |<1\}\subset V;\\
&\widetilde{x}=(\xi,x)\mapsto \frac{x}{1+\xi}.
\end{aligned}
$$

这是一个双射，其逆可用

$$
\widetilde{x}:u\in B\mapsto (\xi(u),x(u))=(\frac{1+|u|^2}{1-|u|^2},\frac{2u}{1-|u|^2})\in \mathcal{H}yp_H
$$

来给出.

定义10.2.2 定义$\mathcal{H}yp(V')$的球模型$\mathcal{H}yp_B(V')$或共形模型为球$B=\{|\ |<1\}$, 以及它的用双射$u:\mathcal{H}yp_H\to B$所定义的双曲子空间.

注: 映射u把点$\widetilde{x}=(\xi,x)\in\mathcal{H}yp_H$归入过$\widetilde{x}$和$(-1,0)$的直线与典范恒同于$V$的子集$\{0\}\times V\subset V'$的交点.

证明: 因为$-\xi^2+|x|^2=-1$, 所以$|u(\widetilde{x})|^2=\dfrac{|x|^2}{(1+\xi)^2}<1$. u是一个双射的事实是得自: 上述所定义的映射$\widetilde{x}$是u的逆映射. □

命题10.2.3 $\mathcal{H}yp_H$中的一个超平面可表成形如

$$
\mathcal{H}yp_H\cap\{\widetilde{x}=(\xi,x);\quad -\delta\xi+\langle d,x\rangle=0\},
$$

且满足$\langle\widetilde{d},\widetilde{d}\rangle=-\delta^2+|d|^2=1$. 于是在$u:\mathcal{H}yp_H\to\mathcal{H}yp_B$下的象由

$$
B\cap\{-\delta(1+|u|^2)+2\langle u,d\rangle=0\}
$$

给出. 这里$\{\cdots\}$是过$0\in B$ (如果$\delta=0$) 或过球面$S_{\frac{1}{\delta}}(\dfrac{d}{\delta})$的超平面，它与$B$的边界$\partial\overline{B}=S(V)$正交地相交.

$\mathcal{H}yp_H$ 的一般双曲子空间的象是这样的超平面或球面的交集.

证明: 如在10.2.1中那样, 利用$\xi(u)$和$x(u)$, 可以将 $-\delta\xi+\langle d,x\rangle=0$写成形如$-\delta(1+|u|^2)+2\langle u,d\rangle=0$. 对$\delta=0$, 这是超平面 $\langle u,d\rangle=0$, 否则就是所述的球面. □

引理10.2.4 对每一点$p\in\mathcal{H}yp_H$, 10.2.1中的双射

$$u:\mathcal{H}yp_H\to\mathcal{H}yp_B$$

确定了一个线性映射

$$T_pu:T_p\mathcal{H}yp_H\to V;$$

$$\widetilde{y}=(\eta,y)\mapsto\frac{1-|u|^2}{2}\left(y-\frac{2}{1+|u|^2}\langle u,y\rangle u\right), \tag{10.3}$$

且$u=u(p)$: 设$p=\widetilde{x}=(\xi,x)\in\mathcal{H}yp_H$. 把$\widetilde{y}$写成形如$|\widetilde{y}|\widetilde{y}_0$, 且$|\widetilde{y}|=\sqrt{\langle\widetilde{y},\widetilde{y}\rangle_L}$, $|\widetilde{y}_0|=1$. 于是

$$t\in\mathbf{R}\mapsto\widetilde{y}(t)=\sinh(|\widetilde{y}|t)\widetilde{y}_0+\cosh(|\widetilde{y}|t)\widetilde{x}\in\mathcal{H}yp_H$$

是$\mathcal{H}yp_H$上的一条曲线. 用$\left.\dfrac{\mathrm{d}u(\widetilde{y}(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$去定义$T_pu(\widetilde{y})$. 我们也把$T_pu:T_p\mathcal{H}yp_H\to V$的象记为$T_{u(p)}\mathcal{H}yp_B$, 且在$T_u\mathcal{H}yp_B$上用

$$\langle y,z\rangle_u=\frac{4}{(1-|u|^2)^2}\langle y,z\rangle$$

定义一个数量积$\langle\ ,\ \rangle_u$, 这里$\langle\ ,\ \rangle$是V上的数量积. 这个数量积正好选得使对$T_p\mathcal{H}yp_H$中的$\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$, 成立

$$\langle T_pu(\widetilde{y}),T_pu(\widetilde{z})\rangle_{u(p)}=\langle\widetilde{y},\widetilde{z}\rangle_L.$$

即映射 (10.3)是一个等距同构.

证明: 利用 $\widetilde{y}=(\eta,y)=|\widetilde{y}|(\eta_0,y_0)$, 有

$$u(\widetilde{y}(t))=\frac{\sinh(|\widetilde{y}|t)y_0+\cosh(|\widetilde{y}|t)x}{1+\eta_0\sinh(|\widetilde{y}|t)+\xi\cosh(|\widetilde{y}|t)}.$$

在 $t=0$ 处的导数给出了

$$\frac{y}{1+\xi}-\frac{x\eta}{(1+\xi)^2}.$$

因为

$$\frac{1}{1+\xi}=\frac{1-|u|^2}{2};\quad \frac{x}{1+\xi}=u;$$
$$\frac{1}{\xi}=\frac{1-|u|^2}{1+|u|^2};\quad \eta=\frac{\langle x,y\rangle}{\xi},$$

得出映射 (10.3).

现在容易验证 $\langle T_pu(\widetilde{y}),T_pu(\widetilde{z})\rangle_{u(p)}=\langle\widetilde{y},\widetilde{z}\rangle_L$ 的有效性. □

注解10.2.5 选取 $u\in\mathcal{H}yp_B$. 在 $T_u\mathcal{H}yp_B$ 中的数量积 $\langle\ ,\ \rangle_u$ 和 V 中的数量积 $\langle\ ,\ \rangle$ 只差一个因子 $\frac{4}{(1-|u|^2)^2}$. 于是关于数量积 $\langle\ ,\ \rangle_u$ 的正交群 $\boldsymbol{O}(T_u\mathcal{H}yp_H)$ 能恒同于正交群 $\boldsymbol{O}(V)$. 特别地, 两个线性无关的向量的夹角 $\angle(y,z)$ 与它们是作为 $(V,\langle,\rangle)$ 中的元素还是 $(T_p\mathcal{H}yp_B,\langle,\rangle_B)$ 中的元素都没有关系. 因为这个理由, 也称 $\mathcal{H}yp_B$ 为 $\mathcal{H}yp(V')$ 的一个共形模型.

但是向量 y 的长度是与人们所考虑的数量积有关的:

$$|y|_u=\sqrt{\langle y,y\rangle_u}=\frac{2|y|}{1-|u|^2}.$$

为了描述 $\mathcal{H}yp_B$ 的双曲运动群 $Bew(\mathcal{H}yp_B)$, 我们需要欧氏几何中的一些概念和结果.

定义10.2.6 考虑 V 上的欧氏空间 $\mathcal{E}u=\mathcal{E}u(V)$. 设 $S_\rho(o)$ 是 $\mathcal{E}u$ 中的一个球面. 定义 $S_\rho(o)$ 关于点 $p\in\mathcal{E}u$ 势为

$$P_p(S_\rho(o))=|p-o|^2-\rho^2.$$

注: $P_\rho(S_\rho(o))<0$意味着$|p-o|<\rho$, 即ρ属于球面的内部$B_\rho(o)$. $P_\rho(S_\rho(o))=0$意味着$p\in S_\rho(o)$, 而$P_p(S_\rho(o))>0$意味着p属于球面的外部$\mathcal{E}u\backslash\overline{B}_\rho(o)$.

命题10.2.7 1. 设$S_\rho(o)$为一个球面, p为一个点. 对每条过p且与$S_\rho(o)$相交的直线 $\mathcal{G}$, 成立 $\mathcal{G}\cap S_\rho(o)=\{q,q'\}$, 在这里$q=q'$是允许的. 而且

$$\langle q-p,q'-p\rangle=P_p(S_\rho(o))=|p-o|^2-\rho^2.$$

2. 两个球面$S_\rho(o)$与$S_{\rho'}(o')$相互正交地相交的充要条件是$|o'-o|^2=\rho^2+\rho'^2$或者 $P_o(S_{\rho'}(o'))=\rho^2$或者$P_{o'}(S_\rho(o))=\rho'^2$.

证明: 对1.: 令$\dfrac{q+q'}{2}=m=q$和q'的中点. 因此

$$q-p=(m-p)+(q-m),$$
$$q'-p=2m-q-p=(m-p)-(q-m),$$

于是

$$\begin{aligned}\langle q-p,q'-p\rangle&=|m-p|^2-|q-m|^2\\&=|o-p|^2-|m-o|^2-|q-m|^2\\&=|o-p|^2-\rho^2=P_p(S_\rho(o)).\end{aligned}$$

对2.: $S_\rho(o)$与$S_{\rho'}(o')$正交地相交意味着

$$|q-o|=\rho\quad 和\quad |q-o'|=\rho'\Rightarrow\langle q-o,q-o'\rangle=0.$$

又由勾股定理

$$|q-o|^2+|q-o'|^2=|o-o'|^2.$$

后者也可写成$P_o(S_{\rho'}(o'))=\rho^2$或者$P_{o'}(S_\rho(o))=\rho'^2$. □

定义10.2.8 选取 $o\in\mathcal{E}u$ 及 $\rho>0$. 称映射

$$i=i_{o,\rho^2}:\mathcal{E}u\backslash\{o\}\to\mathcal{E}u\backslash\{o\};\quad p\mapsto\frac{\rho^2}{|p-o|^2}(p-o)+o$$

为关于球面 $S_\rho(o)$ 的反演.

引理10.2.9 考虑反演 $i=i_{o,\rho^2}:\mathcal{E}u\backslash\{o\}\to\mathcal{E}u\backslash\{o\}$.

1. $i\circ i=\mathrm{id}$.

2. 如果 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{E}u$ 的一个子空间，且 $o\in\mathcal{L}$, 则 $i|_{\mathcal{L}\backslash\{o\}}$ 是关于球面 $S_\rho(o)\cap\mathcal{L}$ 的反演.

3. 不含 o 的球面 $S_\sigma(p)$ 在 i 下的象是半径为 $\dfrac{\rho^2\sigma}{|P_o(S_\sigma(p))|}$, 中心为 $\dfrac{\rho^2}{P_o(S_\sigma(p))}(p-o)+o$ 的球面.

于是可以得出，把 $S_\sigma(p)$ 变至其自身的充要条件是

$$P_o(S_\sigma(p))=\rho^2,$$

即 $S_\sigma(p)$ 与球面 $S_\rho(o)$ 正交地相交.

4. 设 $S_\sigma(p)$ 是一个含 o 的球面. 于是 $S_\sigma(p)\backslash\{o\}$ 在 i 下的象是一个超平面，它的方程是一个形如 $\{\langle q-o,u\rangle=\dfrac{\rho^2}{2\sigma}\}$ 的 Hesse-方程. 反过来，不含 o 的超平面在 i 下变为球面 $S_\sigma(p)\backslash\{o\}$.

证明: 对1.: 这易于验证.

对2.: 这得自 i 的定义.

对3.: 设 $P_o(S_\sigma(p))=|o-p|^2-\sigma^2\neq0$. $q\in S_\sigma(p)$ 意味着

$$|q-o|^2+2\langle q-o,o-p\rangle+|o-p|^2=\sigma^2. \tag{10.4}$$

利用 $(q-o)=\dfrac{|q-o|^2}{\rho^2}(i(q)-o)$ 及 $(q-o)|i(q)-o|=\rho^2$, 由(10.4)得出

$$\frac{\rho^4}{|i(q)-o|^2}+2\frac{\rho^2}{|i(q)-o|^2}\langle i(q)-o,o-p\rangle+|o-p|^2=\sigma^2, \tag{10.5}$$

而且这是等价于

$$|i(q)-(\frac{\rho^2}{P_o(S_\sigma(p))}(p-o)+o)|^2=\frac{\rho^4\sigma^2}{P_o(S_\sigma(p))^2}.$$

于是$P_o(S_\sigma(p))=\rho^2$的充要条件 (按照10.2.7.2, 即$S_\sigma(p)$和$S_\rho(o)$正交地相交的充要条件)为上面的方程又表示了原先的球面.

对4.: 当$|o-p|^2=\sigma^2$时, 把 (10.5)写成形如

$$\rho^2+2\langle i(q)-o,o-p\rangle=0.$$

这是一个超平面方程. $\dfrac{p-o}{|p-o|}=\dfrac{p-o}{\sigma}$是正交于超平面方向的单位向量. 由此我们得出了对超平面方程的所给出的标准形式. □

定理10.2.10 考虑关于超平面$\mathcal{H}\subset\mathcal{H}yp_H$的镜面反射$\sigma=\sigma_{\mathcal{H}}$. 根据$\mathcal{H}=\{\langle\widetilde{x},\widetilde{d}\rangle_L=0\}$中$\widetilde{d}=(0,d)$或者$\widetilde{d}=(\delta,d)$, 且$\delta>0$, $u(\mathcal{H})$相应地是超平面$\{\langle u,d\rangle=0\}$或者球面$S_{\frac{1}{\delta}}(\dfrac{d}{\delta})$在$B$上的限制. 于是$u\circ\sigma u^{-1}$是关于超平面$\{\langle u,d\rangle=0\}$的镜射或者是关于$S_{\frac{1}{\delta}}(\dfrac{d}{\delta})$的反演.

证明: 当$\widetilde{d}=(0,d)$时, 则$u\circ\sigma\circ u^{-1}=\sigma B$. 现设$\delta>0$. 我们证明, 对$\widetilde{x}\in\mathcal{H}yp_H$, 有$u\circ\sigma(\widetilde{x})=\sigma\circ u(\widetilde{x})$. 事实上,

$$u\circ\sigma(\widetilde{x})=\frac{x-2\langle\widetilde{x},\widetilde{d}\rangle_L d}{1+\xi-2\langle\widetilde{x},\widetilde{d}\rangle_L\delta}.$$

利用

$$-2\langle\widetilde{x},\widetilde{d}\rangle_L=2\xi\delta-2\langle x,d\rangle;\qquad\frac{x}{1+\xi}=u;$$

$$-\delta^2+|d|^2=1;\qquad\frac{2\xi}{1+\xi}=1+|u|^2,$$

这成为

$$u \circ \sigma(\widetilde{x}) = \frac{u + (\delta^2(1+|u|^2) - 2\delta\langle u, d\rangle)\dfrac{d}{\delta}}{1+\delta^2(1+|u|^2) - 2\delta\langle u, d\rangle}.$$

因为

$$\delta^2(1+|u|^2) - 2\delta\langle u, d\rangle = \delta^2|u - \frac{d}{\delta}|^2 - 1,$$

这能写成

$$u \circ \sigma(\widetilde{x}) = \frac{u - \dfrac{d}{\delta}}{\delta^2|u - \dfrac{d}{\delta}|^2} + \frac{d}{\delta} = i_{\frac{d}{\delta}, \frac{1}{\delta^2}}(u(x)).$$

□

引理10.2.11 1. 设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}yp_B$ 的一个超平面. 根据 $\mathcal{H} = \{\langle u, d\rangle = 0\} \cap B$ 或者 $\mathcal{H} = S_\rho(x) \cap B$, 关于 $\mathcal{H}$ 的镜射 $\sigma_{\mathcal{H}}$ 是关于 $\mathcal{H}$ 的欧氏镜射或者是关于 $S_\rho(x)$ 的反演.

2. $\mathcal{H}yp_B$ 的双曲运动群

$$Bew(\mathcal{H}yp_B) = u(Bew(\mathcal{H}yp_H))u^{-1}$$

是由超平面镜射所生成的. 精确地说, $\mathcal{H}yp_B$ 中的每一个运动可表成个数 $\leq n+1$ 的关于超平面的镜射的乘积, 这里 $n = \dim \mathcal{H}yp_B = \dim B$.

证明: 这是10.1.21在应用10.2.10下的翻版. □

例10.2.12 (双曲平面) 借助于复数, 现用 $B = \{|z| < 1\}$ 来描述双曲平面的模型 $\mathcal{H}yp_B$.

于是一条双曲直线是用 $B \cap S_\rho(c)$; $1+\rho^2 = |c|^2 > 1$ 或者用 $B \cap \{\arg z = \alpha\}$ 给出的. 关于这条直线的镜射分别相应于

$$z \mapsto \frac{\rho^2}{|z-c|^2}(z-c) + c = \frac{c\overline{z} - 1}{\overline{z} - \overline{c}} \quad 或者 \quad z \mapsto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{z}.$$

两个这样的镜射的复合总可表成形如

$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}; \quad a\bar{a}-b\bar{b}=1. \tag{10.6}$$

人们可以验证此式. 例如, 对上述给出的镜射的复合, 人们首先发现

$$z \mapsto \frac{c\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}z-1}{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}z-\bar{c}}$$

经数乘并用 $\dfrac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\sqrt{|c|^2-1}}$ 对分母进行约化后就给出了前述的形式 (10.6).

每个形如 (10.6) 的变换代表了一个本质的双曲运动, 即一个运动可写成两个直线镜射的乘积. 对 $b=0$, 这是显然的, 见 8.1.22. 对 $b\neq 0$, 我们把 (10.6) 写成

$$z \mapsto z' = \frac{-\dfrac{\bar{a}}{\bar{b}}\bar{z}-1}{\bar{z}-\dfrac{-a}{b}}; \quad z' \mapsto z'' = -\frac{b}{\bar{b}}\bar{z}'.$$

按照 10.2.4, $T_{z_0}\mathcal{H}yp_B$ 中的数量积为

$$\frac{4\langle\ ,\ \rangle}{(1-|z_0|^2)^2},$$

这里 $\langle\ ,\ \rangle$ 是欧氏数量积.

一个运动 (10.6) 可用矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ 来描述. 这个矩阵可被确定到只差一个因子 ± 1. 人们容易验证: 两个运动 f, f', 按 (10.6) 用矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}$ 表出的两个运动 f, f' 的乘积 $f'f$ 可用乘积矩阵 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ 来描述.

用 U 来记由矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$, 所定义的 $SL(2, \mathbf{C})$ 的子群. 利用 $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $b = \gamma + \mathrm{i}\delta$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+\bar{a}) + (\mathrm{i}\bar{b} - \mathrm{i}b) & (\mathrm{i}\bar{a} - \mathrm{i}a) + (b + \bar{b}) \\ -(\mathrm{i}\bar{a} - \mathrm{i}a) + (b + \bar{b}) & (a + \bar{a}) - (\mathrm{i}\bar{b} - \mathrm{i}b) \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} \alpha + \delta & \beta + \gamma \\ -\beta + \gamma & \alpha - \delta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

这里 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是实数，且行列式为 1. 即用元素 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ 进行共轭，群 U 同构于群 $SL(2, \mathbf{R})$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} U [\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}]^{-1} = SL(2, \mathbf{R}).$$

由此可证明:

定理 10.2.13 对 $\dim V' = 3$, 本性的双曲运动群

$$SLO(V') = Bew^{+}(\mathcal{H}yp(V'))$$

同构于群

$$PSL(2, \mathbf{R}) = SL(2, \mathbf{R})/\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

□

注解 10.2.14 上述的满足 $AE_{1,2}{}^{t}A = E_{1,2}$, $\det A = 1$ 的实 $(3, 3)$-矩阵 A 的群与群 $PSL(2, \mathbf{R})$ 的同构是在线性群，即矩阵群之间极少的同构中的一个例子.

我们欲将这个同构以直接的、代数的方式来导出. 为此我们在向量空间 $\mathbf{R}^4$ 上导入一个乘法关系，类似于 8.4 中四元

数 $\mathbf{H}$ 的定义那样．我们注意：带有其连接关系的 $\mathbf{H}$ 是同构于复 (2,2)- 矩阵的环 $L(\mathbf{C}^2;\mathbf{C}^2)$ 中的矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ 的集合．注意，我们把这个集合理解成 $\mathbf{R}$ 上的、而不是 $\mathbf{C}$ 上的向量空间．我们得到了同构，这里，我们把 $\mathbf{H}$ 的基 $\{1,i,j,k\}$ 对应于矩阵

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

我们用 $\{1,\tilde{\mathrm{i}},\tilde{j},\tilde{k}\}$ 来标记 $\mathbf{R}^4$ 中的典范基．对这些基元素，假设乘法关系是用表

$\cdot$	1	$\tilde{\mathrm{i}}$	$\tilde{\mathrm{j}}$	$\tilde{\mathrm{k}}$
1	1	$\tilde{\mathrm{i}}$	$\tilde{\mathrm{j}}$	$\tilde{\mathrm{k}}$
$\tilde{\mathrm{i}}$	$\tilde{\mathrm{i}}$	-1	$\tilde{\mathrm{k}}$	$-\tilde{\mathrm{j}}$
$\tilde{\mathrm{j}}$	$\tilde{\mathrm{j}}$	$-\tilde{\mathrm{k}}$	1	$-\tilde{\mathrm{i}}$
$\tilde{\mathrm{k}}$	$\tilde{\mathrm{k}}$	$\tilde{\mathrm{j}}$	$\tilde{\mathrm{i}}$	1

来定义．我们利用双线性性质把乘法扩张至整个 $\mathbf{R}^4$ 上，且把如此定义的非交换环记为 $\widetilde{\mathbf{H}}$．

类似于前面将 $\mathbf{H}$ 描述成环 $L(\mathbf{C}^2;\mathbf{C}^2)$ 的一个在 $\mathbf{R}$ 上的子代数，我们也能把 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 描述成一个这样的子代数，为此把基 $\{1,\tilde{\mathrm{i}},\tilde{j},\tilde{k}\}$ 与矩阵

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

相对应．

但是，对 $\widetilde{\mathbf{H}}$ 也可能去建立一个与所有实 - (2,2)- 矩阵的环 $L(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ 的同构 Φ．为此将 $\{1,\tilde{\mathrm{i}},\tilde{\mathrm{j}},\tilde{\mathrm{k}}\}$ 映至

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

人们立即可以验证，四个构造出来的矩阵正好满足上述的乘法表.

$$\Phi(\alpha+\beta\widetilde{\mathrm{i}}+\gamma\widetilde{\mathrm{j}}+\delta\widetilde{\mathrm{k}})=\begin{pmatrix}\alpha+\delta & \beta+\gamma\\ -\beta+\gamma & \alpha-\delta\end{pmatrix}.$$

$\widetilde{\mathbf{H}}$包含$\mathbf{R}$作为子域，在这里我们将$\widetilde{\mathbf{H}}$中的元素 $\alpha 1+0\widetilde{\mathrm{i}}+0\widetilde{\mathrm{j}}+0\widetilde{\mathrm{k}}$ 与$\alpha\in\mathbf{R}$恒同. 我们把这样的元素也简写为α. 用

$$\widetilde{q}=\alpha+\beta\widetilde{\mathrm{i}}+\gamma\widetilde{\mathrm{j}}+\delta\widetilde{\mathrm{k}}\mapsto\overline{\widetilde{q}}=\alpha-\beta\widetilde{\mathrm{i}}-\gamma\widetilde{\mathrm{j}}-\delta\widetilde{\mathrm{k}}$$

定义共轭 $(\,\bar{}\,):\widetilde{\mathbf{H}}\to\widetilde{\mathbf{H}}$，且 $(\,\bar{}\,)\circ(\,\bar{}\,)=\mathrm{id}$. 于是，$\widetilde{q}\overline{\widetilde{q}}=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2=\det\Phi(\widetilde{q})$. 在$\mathbf{R}^4\cong\widetilde{\mathbf{H}}$上我们已经用

$$\langle\widetilde{q},\widetilde{q}'\rangle=\frac{1}{2}(\widetilde{q}\overline{\widetilde{q}}'+\widetilde{q}'\overline{\widetilde{q}})$$

给出了一个非退化的对称双线性形式. 用$\widetilde{\boldsymbol{L}}$来记$\widetilde{\boldsymbol{H}}$的子空间$\{\alpha=0\}$. 即$r\in\widetilde{\boldsymbol{L}}\iff\overline{\widetilde{r}}=-\widetilde{r}$. 用$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1$来记满足$\widetilde{q}\overline{\widetilde{q}}=1$的元素$\widetilde{q}$的乘法群. 在$\Phi:\widetilde{\boldsymbol{H}}\to L(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$下，$\widetilde{\boldsymbol{H}}_1$与特殊线性群$SL(2;\mathbf{R})$恒同.

选取2维向量空间V中的一组基后，双曲模型$\mathcal{H}yp_H(\mathbf{R}\times V)$与集合

$$\boldsymbol{L}\cap\widetilde{\boldsymbol{H}}_1\cap\{\beta>0\}=\{\widetilde{q}\overline{\widetilde{q}}=1,\alpha=0,\beta>0\}$$

恒同.

与在8.4.5中类似，我们现在把每个$\widetilde{q}\in\widetilde{\boldsymbol{H}}_1$与$\mathcal{H}yp_H$的运动群中的一个元$\rho(\widetilde{q})$相对应：

$$\rho(\widetilde{q}):\widetilde{r}\in\mathcal{H}yp_V\mapsto\widetilde{q}\widetilde{r}\overline{\widetilde{q}}\in\mathcal{H}yp_V.$$

人们可以验证，借助于$\widetilde{r}$，有$\widetilde{q}\widetilde{r}\overline{\widetilde{q}}\in\widetilde{\mathbf{H}}_1\cap\{\beta>0\}$. 因为$\rho(1)=\mathrm{id}$，由连续性可得$\det\rho(\widetilde{q})=1$；注意，$\widetilde{\mathbf{H}}_1$是连通的. 于是我们已定义了一个群态射

$$\rho:\widetilde{\mathbf{H}}_1\cong SL(2,\mathbf{R})\to Bew^+(\mathcal{H}yp_B).$$

如人们在8.4中指出的那样，有 ker $\rho = \pm 1$.

为了看出ρ是满射，只需证明， im ρ包含了关于点的镜射，于是也包含了它们的乘积，以及环绕点$1\widetilde{\mathrm{i}} \in \mathcal{H}yp_H$的旋转.

如果$\widetilde{q} \in \boldsymbol{L} \cap \widetilde{\mathbf{H}}_1$，于是$\widetilde{q}\widetilde{q}\overline{\widetilde{q}} = \widetilde{q}$, $\rho(\widetilde{q}\widetilde{q}) = \rho(-1) = \mathrm{id}$, 但是$\rho(\widetilde{q}) \neq \mathrm{id}$. 即$\rho(\widetilde{q})$是关于具有齐次坐标$\widetilde{q}$的点的镜射.

如果$\widetilde{q} = \alpha + \beta\widetilde{\mathrm{i}} \in \widetilde{\mathbf{H}}_1$, 称其为$(\alpha, \beta) = (\cos\phi, \sin\phi)$. $\rho(\widetilde{q})(\widetilde{\mathrm{i}}) = \widetilde{\mathrm{i}}$, $\rho(\widetilde{q})(\widetilde{\mathrm{j}}) = \cos 2\phi\widetilde{\mathrm{j}} + \sin 2\phi\widetilde{\mathrm{k}}$, $\rho(\widetilde{q})\widetilde{\mathrm{k}} = -\sin 2\phi\widetilde{\mathrm{j}} + \cos 2\phi\widetilde{\mathrm{k}}$. 即$\rho(\widetilde{q})$是环绕具有齐次坐标$\widetilde{\mathrm{i}}$的点的旋转.

例 10.2.15　(Poincaré半平面)

C中单位圆内部与所谓上半平面OH的一个双射是用

$$J : z \in B = \{|z| < 1\} \mapsto w = \frac{z + \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1} \in \mathrm{OH} = \{\ \mathrm{Im}\ w > 0\},$$

来定义的. 逆映射为

$$J^{-1} : w \in OH \mapsto z = \frac{w - \mathrm{i}}{-\mathrm{i}w + 1} \in B.$$

借助于J, 我们由此得到了双曲平面的一个进一步的模型，我们也用$\mathcal{H}yp_{OH}$来记它，且用Poincaré来命名它.

在 $\mathcal{H}yp_{OH}$中的直线是由属于 OH的，且与 OH的边界$\{\ \mathrm{Im}\ w = 0\}$正交地相交的半圆，以及与边界正交的直线所组成.

在10.2.12的结尾处导入的关系

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}J)U(\frac{1}{\sqrt{2}}J)^{-1} = SL(2, \mathbf{R})$$

正好意味着$\mathcal{H}yp_{OH}$中本性的双曲运动具有表示

$$\omega \mapsto \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{为实数}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

我们用双曲平面中的三角学的基本公式来结束本节.

定义 10.2.16 设$\mathcal{H}yp$是一个双曲平面.

1. 所谓$\mathcal{H}yp$中的一个三角形abc是指不属于同一直线的三点a, b, c. 称a, b, c为三角形abc的顶点.

2. 三角形abc的边A是由满足$d(b,p)+d(p,c)=d(b,c)$的点$p\in\ \mathcal{G}_{bc}$所组成. 定义A的长度$|A|$为$d(b,c)$. 边B, C及其长度$|B|$, $|C|$可相应地定义.

3. 在顶点a的切平面$T_a\mathcal{H}yp$中, 长为1中的向量x_{ab}被定义为$\dot{\widetilde{x}}_{ab}(0)$. 这里$t\in\mathbf{R}\mapsto\widetilde{x}_{ab}(t)\in\ \mathcal{G}_{ab}$是如在10.1.14中那样定义的直线$\mathcal{G}_{ab}$的参数化, 且满足$\widetilde{x}_{ab}(0)=a$, $\widetilde{x}_{ab}(d(a,b))=b$. 向量$x_{ac}\in T_a\mathcal{H}yp$相应地定义为$\dot{\widetilde{x}}_{ac}(0)$, 这里$\widetilde{x}_{ac}(t)$是直线$\widetilde{\mathcal{G}}_{ac}$的参数化, 且满足$\widetilde{x}_{ac}(0)=a$, $\widetilde{x}_{ac}((d(a,c))=c$.

在顶点a处的角α定义为在具有数量积$\langle,\rangle_a$的欧氏平面$T_a\mathcal{H}yp$中的角$\angle(x_{ab},x_{ac})$. 在b和c处的角β和γ相应地分别定义.

与8.5.3相对照, 我们有

引理 10.2.17 设abc是双曲平面中的一个三角形.

1. $\cosh|C|=\cosh|A|\cosh|B|-\sinh|A|\sinh|B|\cos\gamma$.
(双曲余弦定理)

2. 当$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$时, 则$\cosh|C|=\cosh|A|\cosh|B|$,
(双曲的勾股定理)

及

$$\tanh|A|=\tanh|C|\cos\beta;\quad \tanh|B|=\tanh|C|\cos\alpha.$$
$$\sinh|A|=\sinh|C|\sin\alpha;\quad \sinh|B|=\sinh|C|\sin\beta.$$

3. $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=\sinh|A|:\sinh|B|:\sinh|C|$.
(双曲正弦定理)

证明: 对1.: 设$\widetilde{z}\in\mathcal{H}yp_H$为$c$的坐标. 按照10.1.14, a和b在$\mathcal{H}yp_H$中的坐标$\widetilde{x}$和$\widetilde{y}$可写成如

$$\widetilde{x}=\cosh|B|\tilde{z}+\sinh|B|\widetilde{x}';$$
$$\widetilde{y}=\cosh|A|\tilde{z}+\sinh|A|\widetilde{y}'.$$

且满足

$$\langle\widetilde{x}',\widetilde{x}'\rangle_L=\langle\widetilde{y}',\widetilde{y}'\rangle_L=1;$$
$$\langle\widetilde{x}',\widetilde{z}\rangle_L=\langle\widetilde{y}',\widetilde{z}\rangle_L=0.$$

利用 $\langle\widetilde{x},\widetilde{y}\rangle_L=-\cosh|C|, \langle\widetilde{x}',\widetilde{y}'\rangle_L=\cos\gamma$, 由此得出了余弦定理.

对2.: 第一个方程得自1., 对$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

由 $\cosh|B|=\cosh|A|\cosh|C|-\sinh|A|\sinh|C|\cos\beta$, 由此在10.1.12的应用下得出:

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\frac{(\cosh^2|A|-1)\cosh|B|}{\sinh|A|\sinh|C|}\\&=\frac{\sinh|A|\cosh|B|}{\sinh|C|}\\&=\frac{\tanh|A|}{\tanh|C|},\\ \sin^2\beta&=\frac{\sinh^2|C|\cosh^2|A|-\cosh^2|C|\sinh^2|A|}{\sinh^2|C|\cosh^2|A|}\\&=\frac{\sinh^2|C|-\cosh^2|B|\sinh^2|A|}{\sinh^2|C|}\\&=\frac{-1+\cosh^2|B|}{\sinh^2|C|}.\end{aligned}$$

对3.: 首先我们注意, 正好存在一条过c的直线$\mathcal{L}_c$, 它与$\mathcal{G}_{ab}$正交地相交. 称$\mathcal{L}_c$与 $\mathcal{G}_{ab}$的交点为c在 $\mathcal{G}_{ab}$的垂足点l_c.

用平面$U' \subset \dot{V}'$来描述 $\mathcal{G}_{ab}$. 于是$U' + U'^{\perp} = V'$. 相应于这个分解， c的齐次坐标$\tilde{z} \in V'$可写成$\tilde{z}' + \tilde{z}''$. $\tilde{z}'$是垂足点l_c的坐标， $\mathcal{L}_c = \mathcal{P}([\tilde{z}', \tilde{z}])$.

cal_c及bcl_c是在l_c处角为$\frac{\pi}{2}$的三角形. 按照2., 有

$\sinh|B|\sin\alpha = \sinh(d(l_c, c)) = \sinh|A|\sin\beta.$

注解10.2.18 由双曲三角形的前述公式导出了对欧氏三角形的公式 8.5.3, 人们将式中的双曲函数用Taylor级数代入，且比较两边的第一个非常数项. 注意:

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + \cdots; \quad \sinh t = t + \cdots; \quad \tanh t = t + \cdots.$$

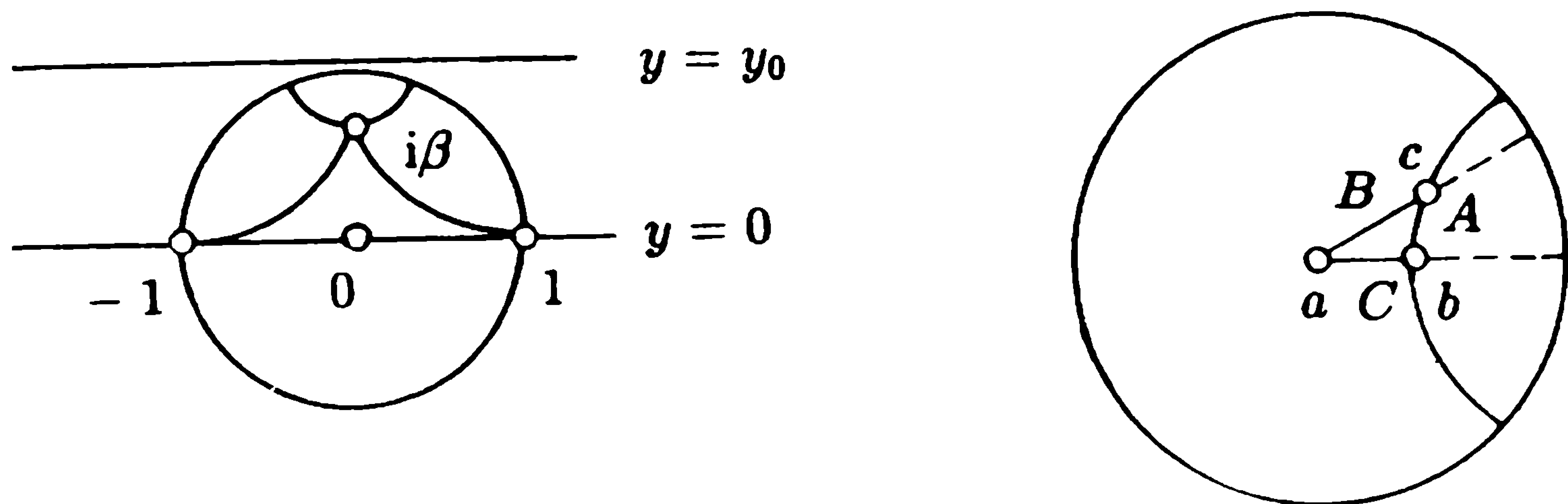
这意味着, 如果三角形很小时, 双曲三角形的几何学就接近了欧氏三角形的几何学.

注解10.2.19 **(关于欧氏平面和双曲平面之间的区别)**

我们选取$\mathbf{C}$中单位圆的内部 $B = \{|z| < 1\}$来描述双曲平面. 设$\mathcal{G}$是一条双曲直线, 且$p \notin \mathcal{G}$. 设o是p在 $\mathcal{G}$上的垂足点. 必要时, 通过应用双曲运动, 我们能假设: $\mathcal{G} = B \cap \{\operatorname{Im} z = 0\}$, 且$p = \mathrm{i}\beta, 0 < \beta < 1, o = 0$.

除了直线$\{\operatorname{Re}\ z = 0\}$之外, 过$p = \mathrm{i}\beta$的直线形如$B \cap S_\rho(z_0)$, 其中$\rho^2 + 1 = |z_0|^2$; $|\mathrm{i}\beta - z_o| = \rho$. 即利用$z_0 = x_o + \mathrm{i}y_0$: 一个这样的圆的圆心的坐标$y_0$总具有形式$y_0 = \dfrac{1+\beta^2}{2\beta} > 1$. 对$x_0 = \pm 1, S_\rho(z_0)$在$\pm 1$处与实轴相切. 于是这是两条过$p$的、且与 $\mathcal{G}$不相交的直线 $\mathcal{G}_{-1}$, $\mathcal{G}_{+1}$. 此外对每个 x_0, $-1 < x_0 < 1$, 我们得到一条直线 $\mathcal{G}_{x_0} = B \cap S_\rho(z_0)$, 它与 $\mathcal{G} = B \cap \{\operatorname{Im}\ z = 0\}$不相交，因为$\rho^2 = |z|^2 - 1 < {y_0}^2$.

于是，与欧氏平面不同的是在双曲平面中对每条直线 $\mathcal{G}$以及不位于其上的一点p, 存在着过p的一个单参数直线族 $\mathcal{G}_x$, $-1 \le x \le 1$, 它们与 $\mathcal{G}$都不相交. 这样的直线中的两条和 $\mathcal{G}$分别与 $\mathcal{G}$的两个无限远点中的一个和另一个有公共点.



最后人们也从双曲平面的这个模形中看出，双曲三角形abc的内角之和$\alpha+\beta+\gamma$小于π. 这只需注意：在一个这样的三角形中三条边A, B, C之中至少有一条是不同于欧氏=直线边. 如果譬如说这是边A, 则在abc中的相关的角β和γ要比相对应的欧氏三角形中的角来得小.

10.3 椭圆几何

与欧氏几何相对照的还有椭圆几何，它不是别的，而是在带有用V上的数量积$\langle\ ,\ \rangle$所给出结构的欧氏向量空间V上的射影几何.

于是椭圆几何与射影几何的关系如同欧氏几何与仿射几何的关系. 我们也得到了一个射影空间，它作为仿射空间$\mathcal{A}$的无限远点的空间 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{A})$. 相应地，椭圆几何可理解成欧氏空间$\mathcal{E}u$的无穷远点的空间$\mathcal{P}_\infty(\mathcal{E}u)$.

在本节中我们指出，在一个椭圆空间上存在着一个度量，而且其所属的运动群具有许多与我们对双曲运动群已经知道的相类似的性质. 椭圆几何的导入将完全类似于双曲几何那样被展示出来.

定义 10.3.1 设$V=(V,\langle\ ,\ \rangle)$是一个欧氏向量空间，且$\dim V=n+1$.

1. 设V_{C}是V的复扩张，见5.6.1. 我们用规则

$$\langle x+\mathrm{i}y, x'+\mathrm{i}y'\rangle_{\mathrm{C}} = (\langle x,x'\rangle - \langle y,y'\rangle) + \mathrm{i}(\langle y,x'\rangle - \langle x,y'\rangle)$$

把$\langle,\rangle$扩张成在V_{C}上的一个对称双线性形式$\langle,\rangle_{\mathrm{C}}$. 当$V$中的零空间$\{\langle x,x\rangle=0\}$仅由$0\in V$组成, 则$V_{\mathrm{C}}$中的零空间$\{\langle z,z\rangle_{\mathrm{C}}=0\}$是一个真正的二次型，它是由满足$\langle x,y\rangle=0, |x|=|y|$的元素$z=x+\mathrm{i}y$所组成.

2. 所谓V上的n维椭圆空间$\mathcal{E}ll=\mathcal{E}ll(V)$是指射影空间$\mathcal{P}(V)$连同它的$k$维椭圆子空间$\mathcal{P}(U)$，这里$U$是$k+1$维子空间. 对$k=1$和2, 我们也分别称为椭圆直线和椭圆平面. 进而，对于$\mathcal{E}ll$, 非实质点的集合$\mathcal{E}ll_\infty$定义为$\mathcal{P}(V_{\mathrm{C}})$中的二次型$\mathcal{Q}u_{\mathrm{C}}=\mathcal{P}(\{\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{C}}=0\})$的点.

3. 定义椭圆运动群$Bew(\mathcal{E}ll)$为$\mathcal{P}(V)$的射影变换群$Pro(\mathcal{P}(V))=\mathcal{P}(GL(V))$的子群$\mathcal{P}(\boldsymbol{O}(V))$.

命题10.3.2 群态射

$$\mathcal{P}:\boldsymbol{O}(V)\mapsto Bew(\mathcal{E}ll(V))$$

的核由$\pm\mathrm{id}_V$组成.

证明: 由于9.1.6, 核是用由$\boldsymbol{O}(V)\cap HT(V)$来给出的.

命题10.3.3 设p和q是$\mathcal{E}ll=\mathcal{E}ll(V)$中的两个不同的点， $\mathcal{G}=\mathcal{G}_{pq}$是过$p$和$q$的直线.

于是被视为$\mathcal{P}(V_{\mathrm{C}})$中的直线$\mathcal{G}$正好包含两个不同的非实质点$u$和$v$. 成立

$$\mathrm{DV}\ (u,v,p,q)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}\neq 1.$$

对$p=q$, 令 $\mathrm{DV}\ (u,v,p,q)=1$.

证明: 设x和y是p和q在V的单位球面$SV=\{|\ \ |=1\}$上的齐次坐标，且有$\langle x,y\rangle=\cos\phi\in[0,1)$. 方程

$$\langle\lambda x+y,\lambda x+y\rangle_{\mathrm{C}}=0$$

具有解 $-e^{\pm i\phi}$. 即 $-e^{-i\phi}x+y$ 和 $-e^{i\phi}x+y$ 是 $\mathcal{G}_{pq}$ 的无限远点 u 和 v 的齐次坐标. 如在 10.1.11 的证明中那样，由此有

$$\mathrm{DV}\ (u,v,p,q)=\frac{e^{i\phi}}{e^{-i\phi}}.$$

□

对照于 10.1.14, 有

命题 10.3.4 设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{E}ll(V)$ 中的一条直线，选取 $p\in\mathcal{G}$. 设 $x\in S(V)$ 是 p 的齐次坐标. 在满足 $\mathcal{P}(U)=\mathcal{G}$ 的平面 $U\subset V$ 中选取 $x'\in S(V)$, 且满足 $\langle x,x'\rangle=0$. 于是用

$$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\mapsto x(t)=\cos t\ x+\sin t\ x'\in S(V)$$

就给出了 $\mathcal{G}$ 的点的齐次坐标. 利用 $\mathcal{P}(x(t))=p(t)$, 我们有

$$\frac{1}{2}|\log\ \mathrm{DV}\ (u,v,p,p(t))|=|t|,$$

在这里 u,v 是 $\mathcal{G}$ 的非实质点. 注意: $p(-\frac{\pi}{2})=p(\frac{\pi}{2})$, 但是对 $|t-t'|<\pi$, $p(t)\neq p(t')$.

证明: 因为 $\langle x(0),x(t)\rangle=\cos t\in[0,1]$, 这得自 10.3.3.

定理 10.3.5 1. 在椭圆空间 $\mathcal{E}ll=\mathcal{E}ll(V)$ 上,

$$d(p,q)=\frac{1}{2}|\log\ \mathrm{DV}\ (u,v,p,q)|\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

定义了一个距离. 这里，对 $p\neq q$, u 和 v 是直线 $\mathcal{G}_{pq}$ 的非实质点. 对 $p=q$, 我们应用规定 $\mathrm{DV}\ (u,v,p,q)=1$.

2. $\mathcal{E}ll$ 的两点 p 和 q 在 V 的单位球面 $S(V)=\{|\ |=1\}$ 上总具有齐次坐标 x 和 y. 而且还能选得满足 $\langle x,y\rangle\geq 0$. 于是有 $d(p,q)=\cos^{-1}\langle x,y\rangle$, 这里 $\cos^{-1}$ 表示 $\cos|[0,\frac{\pi}{2}]$ 的反函数.

3. 如此定义的距离在椭圆运动下是不变的.

4. 三角形等式$d(p,q)+d(q,r)=d(p,r)$仅当三点p,q,r位于一条直线上，且必须满足不等式$d(p,q)+d(q,r)\leq d(p,r)$时才成立的.

证明: 对 1.: $d(p,q)=d(q,p)\geq 0$以及仅当$p=q$时才有$d(p,q)=0$的结论是得自定义. 与在10.1.5中相类似，我们来证明三角形等式. 我们能假设$p\neq q$及$q\neq r$. 按照10.3.4, 我们把p和r的齐次坐标x和z写成形如

$$x=\sin a\ x'+\cos a\ y;\quad z=\sin b\ z'+\cos b\ y,$$

且$x,x',y,z,z'\in S(V)$, $\langle x',y\rangle=\langle z',y\rangle=0$, $a=d(p,q)$, $b=d(q,r)$. 当$\langle x,z\rangle\geq 0$ 时有 $\langle x,z\rangle=\cos d(p,r)$. 否则$\langle x,z\rangle=\cos(\pi-d(p,r))$. 于是

$$\langle x,z\rangle=\sin a\sin b\cos\gamma+\cos a\cos b\geq\cos(a+b).$$

即

$$d(p,r)\leq d(p,q)+d(q,r)\qquad \text{或者}$$
$$d(p,r)\leq\pi-d(p,r)\leq d(p,q)+d(q,r).$$

等号 '=' 意味着$\langle x',z'\rangle=-1$, 于是$z'=-x'$, 即点p, q, r位于一条直线上.

对 2.: 这得自 10.3.3.

对 3.: 这得自在射影变换下交比的不变性，且由此，椭圆运动π把一条直线 $\mathcal{G}$的非实质点变至$\pi(\mathcal{G})$的非实质点.

对 4.: 见 1. 的证明. □

命题10.3.6 用在10.3.4中所定义的映射

$$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\mapsto p(t)\in\mathcal{G},$$

且 $p(-\frac{\pi}{2}) = p(\frac{\pi}{2})$，椭圆直线反过来一一对应于周长为 π 的圆 $\{(\frac{1}{2}\cos 2t, \frac{1}{2}\sin 2t), -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\}$. 特别地，在 $\mathcal{G}$ 上距离为 $\frac{\pi}{2}$ 的两点 p 和 q 之间存在着长为 $\frac{\pi}{2}$ 的两条不同的直线段. 例如，对 $p = p(0)$，$q = p(-\frac{\pi}{2}) = p(\frac{\pi}{2})$，线段为 $\{p(t), 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$ 和 $\{p(-t), 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$.

证明: 这得自 10.3.4 和 10.3.5. □

定义 10.3.7 考察 $\mathcal{E}ll = \mathcal{E}ll(V)$，$\dim V = n \ge 2$.

1. 所谓 $\mathcal{E}ll$ 的一个椭圆参照系是指一个射影参照系

$$Q = \{q_0, q_1, \cdots q_n, e\}, \quad 其中 d(q_i, q_j) = \frac{\pi}{2}, \quad 对 i \ne j.$$

2. 定义在点 $p \in \mathcal{E}ll$ 处切于 $\mathcal{E}ll$ 的切空间 $T_p\mathcal{E}ll$ 为 $[x]^\perp \subset V$，而且带有诱导的数量积. 这里 x 是 p 的齐次坐标.

注解 10.3.8 一个椭圆参照系 $Q = \{q_0, q_1, \cdots, q_n, e\}$ 除了一个符号的差别外，显然等价于 V 中用 $\mathcal{P}(d_i) = q_i$ 确定的 ON-基 $\{d_0, d_1, \cdots, d_n\}$. 即 D 和 $-D$ 确定了相同的参照系 Q.

对照于 10.1.20, 有

定理 10.3.9 考察 $\mathcal{E}ll = \mathcal{E}ll(V)$.

1. 椭圆运动 $\pi : \mathcal{E}ll \to \mathcal{E}ll$ 对每点 $p \in \mathcal{E}ll$ 诱导了一个等距同构

$$T\pi = T_p\pi : T_p\mathcal{E}ll \to T_{\pi(p)}\mathcal{E}ll.$$

2. 椭圆运动把一个椭圆参照系变至同样的参照系.

对每两个椭圆参照系 Q, Q', 正好存在一个椭圆运动，它把 Q 变至 Q'.

3. 设 $p \in \mathcal{E}ll$. 满足 $\pi(p) = p$ 的 $\pi \in Bew(\mathcal{E}ll)$ 的集合 $Bew_p(\mathcal{E}ll)$ 是一个同构于 $O(T_p\mathcal{E}ll)$ 的子群.

所有这些子群是彼此共轭的，且同构于 V 的余维数为 1 的子空间 V' 的正交群 $O(V')$.

证明: 这得自前已证得的关于 $\boldsymbol{O}(V)$ 的定理及 10.3.2, 在那里 $Bew(\mathcal{E}ll(V)) = \boldsymbol{O}(V)/\pm \mathrm{id}$. □

我们还通过与 10.1.21 相对照来补充这个定理.

引理 10.3.10 考察 $\mathcal{E}ll = \mathcal{E}ll(V)$; $\dim \mathcal{E}ll = n$.

1. 对 $\mathcal{E}ll$ 的每个 k 维子空间 $\mathcal{L} = \mathcal{P}(U)$, 定义关于 $\mathcal{L}$ 的镜射为 $\mathcal{P}(s_U)$, 这里 s_U 与 8.1.18 中相同.

2. 每个椭圆运动 π 能表为个数 $\leq n+1$ 的关于超平面的镜射的乘积.

证明: 这得自 8.1.21. □

用 V 上的数量积 $\langle , \rangle$ 所给出的本性的对称双线性形式允许在 $\mathcal{E}ll(V)$ 上定义一个配极, 见 9.5.8.

定理 10.3.11 在椭圆空间 $\mathcal{E}ll = \mathcal{E}ll(V)$ 的子空间的集合 $\mathcal{U}(\mathcal{E}ll)$ 上, 定义一个配极

$$\perp : \mathcal{U}(\mathcal{E}ll) \to \mathcal{U}(\mathcal{E}ll),$$

使得成立:

1. $\dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{L}^{\perp} = \dim \mathcal{E}ll - 1$.
2. $\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}$, 即 $\perp \circ \perp = \mathrm{id}$.
3. $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \Longrightarrow \mathcal{L}'^{\perp} \subset \mathcal{L}^{\perp}$.
4. $(\mathcal{L} + \mathcal{L}')^{\perp} = \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{L}'^{\perp}$.
5. $(\mathcal{L} \cap \mathcal{L}')^{\perp} = \mathcal{L}^{\perp} + \mathcal{L}'^{\perp}$.
6. $\mathcal{L} + \mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{E}ll$.

证明: 这得自 9.5.8 及结论: 对 V 的任意一个子空间 U, 成立 $U + U^{\perp} = V$. □

由此我们得到了椭圆运动群的下列特征:

定理 10.3.12 设 $\dim \mathcal{E}ll(V) \geq 2$. 于是椭圆运动正好是 $\mathcal{E}ll$ 的与配极交换的直射变换.

证明: 对 $\pi \in Bew(\mathcal{E}ll)$ 显然成立: 对 $\mathcal{E}ll$ 的每一个任意的子空间 $\mathcal{L}$, 有 $(\pi\mathcal{L})^{\perp} = \pi(\mathcal{L}^{\perp})$.

反过来，我们从 9.2.14 中知道，直射变换是一个射影变换. 如果现在对一个射影变换 $\pi = \mathcal{P}(f)$, $f \in GL(V)$, 成立 $(\pi\mathcal{L})^{\perp} = \pi(\mathcal{L}^{\perp})$, 则意味着对 V 的一个 ON-基 $D = \{d_1, \cdots, d_n\}$, 有 $\langle f(d_i), f(d_j)\rangle = 0$ $(i \neq j)$. 如在 9.1.6.2 的证明中那样，可得出： $f(d_i) = \alpha f'(d_i)$, $f' \in O(V)$, $\alpha \neq 0$. 即 $\pi \in \mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f') \in Bew(\mathcal{E}ll)$. □

例 10.3.13 （**椭圆平面 $\mathcal{E}ll$**）在此情形下，配极于一点 p 的子空间 $\{p\}^{\perp}$ 是一条直线，配极于一条直线 $\mathcal{G}$ 的空间 $\mathcal{G}^{\perp}$ 是一个点.

如果 p 和 q 是不同的点，于是 $(\{p\}+\{q\})^{\perp} = \{p\}^{\perp} + \{q\}^{\perp}$ 意味着与连线 $\mathcal{G}_{pq}$ 相配极的点 ${\mathcal{G}_{pq}}^{\perp}$ 正好是配极于 p 和 q 的直线的交点.

如果 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是不同的直线，于是 $(\mathcal{G} \cap \mathcal{H})^{\perp} = \mathcal{G}^{\perp} + \mathcal{H}^{\perp}$ 意味着配极于交点 $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ 的直线是配极于 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 的点的连接直线.

特别地，在椭圆平面中两条不同直线总有一个交点. 如我们在 10.3.6 中所见的那样，每条直线是形为一条周长为 π 的圆. 两个这样的事实明确地表明了欧氏平面和双曲平面为一方以及以椭圆平面为另一方之间的区别.

10.4 椭圆空间的共形模型

我们在 10.3 中已经反复利用了椭圆空间 $\mathcal{E}ll(V)$ 的每点 p 在 V 的单位球面 $S(V)$ 上正好具有两个齐次坐标 $\pm x$. 称 $S(V)$ 为球面模型. 如果我们在 $S(V)$ 上通过中心点 $e \in S(V)$ 确定一个半球面 $HS(V,e)$, 且在其边界 $S(V_e)$, 即 $V_e = [e]^{\perp}$ 中的单位球面上将对径点恒同，我们就导出了 $\mathcal{E}ll(V)$ 的半球面模型. e 的这个模型在 V_e 中的球极投影给出了 $\mathcal{E}ll(V)$ 的共形模型 $\mathcal{E}ll_{B,e}$.

这完全类似于双曲空间的情形. 然而也存在着重要的区

别. 一方面, 这模型依赖于$e \in S(V)$的选取. 另外, 在边界上永远把对径点恒同. 这使得椭圆空间是紧致的, 这是与双曲空间区别. 于是椭圆空间不能与向量空间的一个开子集双方一一、连续地对应.

$\mathcal{E}ll_{B,e}$的椭圆子空间由$\overline{B} = \overline{B}(V_e)$与球面$S_\rho(x) \subset V_e$所组成, 它与边界$\partial\overline{B} = S(V_e)$相交于对径点, 由此我们能如同在双曲空间的共形模型中那样用关于此球面的反演来描述超平面镜像反射.

对椭圆平面, 借助于复(2,2)-矩阵, 最终存在着对本性运动的一个特别简单的描述. 这对应于用模为 1 的四元数去描述$SO(3)$, 见8.4.6.

命题10.4.1 每点$p \in \mathcal{E}ll(V)$在单位球面$S(V) = \{|\,| = 1\}$上正好具有两个形如$\pm x$的齐次坐标.

我们把恒同了对径点$\{x, -x\}$的$S(V)$称为$\mathcal{E}ll(V)$的球面模型, 记为: $\mathcal{E}ll_S(V)$. □

这个模型的缺点是它的元素由向量偶$\{x, -x\}$而不是由单一的向量所组成, 需要将它 —— 至少部分地 —— 排除掉. 当然这需要以丧失某些齐次性质作为其代价.

定义10.4.2 选取$e \in S(V)$. 用$HS(V,e)$来标记记以e为中心的开半球面

$$HS(V,e) = \{x \in S(V), \langle x, e\rangle > 0\}.$$

在$\mathcal{E}ll(V)$中置$\mathcal{P}(e) = o$. 用$B_{\frac{\pi}{2}}(o)$来标记以o为中心的半径为$\dfrac{\pi}{2}$的开球, 即

$$B_{\frac{\pi}{2}}(o) = \{p \in \mathcal{E}ll(V), d(p,0) < \frac{\pi}{2}\}$$

$B_{\frac{\pi}{2}}(o) = \mathcal{E}ll(V) \setminus \{o\}^\perp$, 这里$\{o\}^\perp$是与$o$相配极的超平面.

每点 $p \in B_{\frac{\pi}{2}}(o)$ 正好具有一个齐次坐标 $x \in HS(V,e)$. 称如此定义的双射

$$\Phi_e : B_{\frac{\pi}{2}}(o) \to HS(V,e)$$

为 $\mathcal{E}ll(V)$ 的关于 $e \in S(V)$ 的球面图.

令 $[e]^{\perp} = V_e$. 于是 $\mathcal{P}(V_e) = \{o\}^{\perp}$. 映射 Φ_e 至

$$\overline{\Phi}_e : \mathcal{E}ll(V) \to HS(V,e) \cup \mathcal{E}ll_S(V_e)$$

的典范扩张使得每个 $q \in \{o\}^{\perp}$ 对应于它在 $S(V_e) = HS(V,e)$ 的边界上的两个齐次坐标 $\{y,-y\}$, 称 $HS(V,e) \cup \mathcal{E}ll_S(V)$ 为 $\mathcal{E}ll(V)$ 的关于 e 的半球面模型. 记为: $\mathcal{E}ll_{H,e}(V)$.

命题10.4.3 考虑一个图 Φ_e: $B_{\frac{\pi}{2}}(o) \to HS(V)$.

$B_{\frac{\pi}{2}}(o)$ 是 (视为射影空间的) $\mathcal{E}ll(V)$ 的仿射子空间, 它是通过析出超平面 $\{o\}^{\perp} = \mathcal{P}(V_e)$ 而生成.

设 $\mathcal{L} = \mathcal{P}(U)$ 是 $\mathcal{E}ll(V)$ 的一个 k 维子空间. 当 $\mathcal{L} \not\subset \{o\}^{\perp}$ 时, 则 $U \not\subset V_e$, 于是 $\mathcal{L}$ 的属于 $\mathcal{E}ll\backslash\{o\}^{\perp}$ 的子集在 Φ_e 下被映到 k 维开半球面 $HS(V,e) \cap U$ 上. $\mathcal{L} \cap \{o\}^{\perp}$ 被 $\overline{\Phi}_e$ 映到 $\mathcal{E}ll_S(U \cap V_e)$ 上. 这是球面 $S(U \cap V_e)$, 且将对径点恒同.

特别地, 椭圆直线的属于 $\mathcal{E}ll(V)\backslash\{o\}^{\perp}$ 的子集被映到半球面 $HS(V,e)$ 的半大圆上, 在这里一个大圆是用 $S(V) \cap U$, $\dim U = 2$, 来定义的.

证明: 这些都直接得自前面的定义. □

对照于双曲空间的共形模型 $\mathcal{H}yp_B(V')$, 关于椭圆空间的模型得自下列命题:

命题10.4.4 考察一个欧氏向量空间 V, $\dim V \geq 2$. 设 $e \in S(V)$. 于是用球极投影

$$u : x \in HS(V,e) \mapsto \frac{x - \langle x,e \rangle e}{1 + \langle x,e \rangle} \in B(V_e) \tag{10.7}$$

给出了一个从开半球面$HS(V,e)$到V中的正交于e的子空间V_e中的开的单位球$B(V_e)$上的双射. u的逆映射是

$$x : u \in B(V_e) \mapsto \frac{1-|u|^2}{1+|u|^2}e + \frac{2}{1+|u|^2}u \in HS(V,e). \qquad (10.8)$$

映射u, (10.7), 具有典范的扩张

$$\overline{u} : \mathcal{E}ll_{H,e}(V) = HS(V,e) \cup \mathcal{E}ll_S(V_e) \to B(V_e) \cup \mathcal{E}ll_S(V_e). \quad (10.9)$$

定义10.4.5 定义$\mathcal{E}ll(V)$ 的关于 $e \in S(V)$ 的球模型或共形模型$\mathcal{E}ll_{B,e}(V)$为 $B(V_e) \cup \mathcal{E}ll_S(V_e)$, 连同其用10.4.4中的双射$\overline{u}$(10.9)所定义的椭圆子空间.

注解10.4.6 利用10.4.4中的映射 (10.7), 可将每点$x \in HS(V,e)$对应于连结x和$-e$的直线与$[e]^{\perp} = V_e$的交点. 用同样的公式把这个映射扩张到$S(V)\backslash\{-e\}$上:

$$u : x \in S(V)\backslash\{-e\} \mapsto \frac{x - \langle x,e\rangle e}{1+\langle x,e\rangle} \in V_e,$$

它是一个双射, 其逆正好如在10.4.4中的 (10.8) 式那样. 这是刺破了的球面$S(V)\backslash\{-e\}$到向量空间V_e上的球极投影.

10.4.4的证明: 由u的定义可以得出

$$|u(x)|^2 = \frac{1-\langle x,e\rangle}{1+\langle x,e\rangle},$$

$$1-|u(x)|^2 = \frac{2\langle x,e\rangle}{1+\langle x,e\rangle},$$

$$1+|u(x)|^2 = \frac{2}{1+\langle x,e\rangle}.$$

由此人们可以看出, (10.8)中的x事实上就是u的逆.

□

与10.2.3相对照，有

命题10.4.7 球模型$\mathcal{E}ll_{B,e}(V)$中的椭圆超平面或者是V_e中过原点的超平面或者是V_e中满足$|x|^2=\rho^2-1$的球面$S_\rho(x)$，它们总是限制在$\overline{B}(V_e)$上．这些正好是与欧氏空间V_e中同样的超平面和球面，它与边界$\partial\bar{B}(V_e)$相交于对径点.

更精确地，如果$\mathcal{E}ll_{B,e}(V)$中的一个超平面用$\{\langle x,d\rangle=0\}$；$d\in S(V)$，$\langle d,e\rangle\geq 0$来给出，则它在$\overline{u}$下的象是用方程

$$\delta(1-|\overline{u}|^2)+2\langle\overline{u},d'\rangle=0$$

来给出的，且$\delta=\langle d,e\rangle$，$d'=d-\langle d,e\rangle e\in V_e$.

当$\delta=0$时，即当原始的超平面包含点e时，象是超平面$\{\langle\overline{u},d'\rangle=0\}\cap\overline{B}(V_e)$．否则象是球面$S_{\frac{1}{\delta}}(\frac{d'}{\delta})\cap\overline{B}(V_e)$．$S_{\frac{1}{\delta}}(\frac{d'}{\delta})\cap S(V_e)$是用$\{\langle\overline{u},d'\rangle=0\}\cap S(V_e)$来给出的.

证明: 利用10.4.4中对$x(u)$的公式(10.8)，可将$\langle x,d\rangle=0$写成给定的形式. 因为$e\perp V_e$，我们能够在$\langle\overline{u},d\rangle$中把$d$用其在$V_e$中的分量$d'=d-\langle e,d\rangle e$替代. 对$\langle d,e\rangle=\delta>0$，$\delta(1-|\overline{u}|^2)+2\langle\overline{u},d'\rangle=0$是与$|\overline{u}-\frac{d'}{\delta}|^2=\frac{1}{\delta^2}$等价的. □

与10.2.4相对照，有

引理10.4.8 对每点$p\in\mathcal{E}ll_{H,e}(V)$，定义切空间$T_p\mathcal{E}ll_{H,e}$为$V$的子空间$[x]^\perp$，且带有诱导的数量积．这里

$$p=x\in HS(V,e)\quad 或者\quad p=\{x,-x\}\in\mathcal{E}ll_S(V_e),$$

见10.3.7.

对每一个$p\in\mathcal{E}ll_{H,e}(V)$，10.4.4中的双射

$$\overline{u}:\mathcal{E}ll_{H,e}(V)\to\mathcal{E}ll_{B,e}(V)$$

确定了一个线性同构

$$T_p\overline{u}:T_p\mathcal{E}ll_{H,e}(V)\to T_{\overline{u}(p)}\mathcal{E}ll_{B,e}(V)\cong V;$$

$$y \mapsto \frac{1+|\overline{u}|^2}{2}(y - \langle y, e\rangle e + \frac{2}{1-|\overline{u}|^2}\langle y, \overline{u}\rangle \overline{u}),$$

且 $\overline{u} = \overline{u}(p)$，它是按下列方法生成的：

当 $p = x \in HS(V,e)$ 时，一个非零切向量是用 $y \in [x]^{\perp}$ 来描述的．当 $p = \{x, -x\} \in \mathcal{E}ll_S(V_e)$ 时，则一个切向量是用 $\{(x,y),(-x,-y)\}$ 来描述的，这里 $y \in [x]^{\perp}$．令 $\dfrac{y}{|y|} = y_0$．于是 $\mathcal{E}ll_{H,e}(V)$ 中的一条直线是用

$$t \in [-\frac{\pi}{2|y|}, \frac{\pi}{2|y|}] \mapsto y(t) = \cos(|y|t)x + \sin(|y|t)y_0$$

来描述的，且有 $\dot{y}(0) = y$．现在用 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overline{u}(y(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 来定义 $T_p\overline{u}(y)$．

在 $T_{\overline{u}}\mathcal{E}ll_{B,e}(V)$ 上用

$$\langle \overline{y}, \overline{z}\rangle_{\overline{u}} = \frac{4}{(1+|\overline{u}|^2)^2}\langle \overline{y}, \overline{z}\rangle$$

定义一个数量积，这里 $\langle\ ,\ \rangle$ 是 $V_e \subset V$ 的数量积．

由此，上述定义的映射成为一个等距同构．即

$$\langle T_p\overline{u}(y), T_p\overline{u}(z)\rangle_{\overline{u}(p)} = \langle y, z\rangle.$$

证明：

$$\overline{u}(y(t)) = \frac{y(t) - \langle y(t), e\rangle e}{1+\langle y(t), e\rangle},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overline{u}(y(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{y - \langle y, e\rangle e}{1+\langle x, e\rangle} - \frac{(x - \langle x, e\rangle e)\langle y, e\rangle}{(1+\langle x, e\rangle)^2}.$$

由 10.4.4 的证明，我们有

$$\frac{x - \langle x, e\rangle e}{1+\langle x, e\rangle} = \overline{u}, \qquad -\frac{\langle x, e\rangle\langle y, e\rangle}{1+\langle x, e\rangle} = \langle \overline{u}, y\rangle,$$

$$\frac{1}{\langle x, e\rangle} = \frac{1+|\overline{u}|^2}{1-|\overline{u}|^2},$$

于是 $\langle y,e\rangle = -\dfrac{2\langle \overline{u},y\rangle}{1-|\overline{u}|^2}$.

经过计算即可得到最后的等式. □

注解 10.4.9 如同双曲空间的球模型 $\mathcal{H}yp_B$ 那样，椭圆空间的球模型 $\mathcal{E}ll_{B,e}(V)$ 在下述意义下也是一个共形模型，即在 $T_{\overline{u}}\mathcal{E}ll_{B,e}(V)$ 上的数量积 $\langle\ ,\ \rangle_{\overline{u}}$ 与包含 $\overline{u}$ 的向量空间 V_e 的数量积 $\langle\ ,\ \rangle$ 只差一个因子 $\dfrac{4}{(1+|\overline{u}|^2)^2}$, 对模型的边界 $S(V_e)$ 上的点 $\bar{u}$, 这个因子等于 1.

与 10.2.10 相对照，有

定理 10.4.10 设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{E}ll_{H,e}(V)$ 中的一个椭圆超平面，且 $\sigma=\sigma_{\mathcal{H}}$ 是关于 $\mathcal{H}$ 的镜射. 于是在 $\overline{u}:\mathcal{E}ll_{H,e}\to\mathcal{E}ll_{B,e}$ 下，σ 被变至关于象 $\overline{u}(\mathcal{H})$ 的反演.

精确地说: 如果 $\mathcal{H}$ 包含点 e, 则 $\bar{u}(\mathcal{H})$ 是 $\overline{B}(V_e)$ 中过 0 的一个超平面，于是经变换后的映射 $\overline{u}\circ\sigma\circ\overline{u}^{-1}$ 是关于 $\overline{u}(\mathcal{H})$ 的镜射.

否则, $\overline{u}(\mathcal{H})$ 是 V_e 中限制在 $\overline{B}(V_e)$ 上的一个球面. 且 $\overline{u}\circ\sigma\circ\overline{u}^{-1}$ 在此情形下是在 10.2.8 的意义下的关于这个球面的反演.

证明: 我们如同在 10.2.10 的证明中那样: 设在 $\mathcal{E}ll_{H,e}(V)$ 中的超平面用 $[d]^{\perp}$ 给出，$|d|=1$, $\langle d,e\rangle\geq 0$. 于是关于这个超平面的镜射是

$$\sigma(x)=x-2\langle x,d\rangle d,$$

见 8.1.20, 由此，利用 $\langle d,e\rangle=\delta$, $\langle x,e\rangle=\xi$, $d-\langle d,e\rangle e=d'$, $x-\langle x,e\rangle e=x'$, 有

$$\overline{u}\sigma(x)=\frac{x'-2\langle x,d\rangle d'}{1+\xi-2\langle x,d\rangle\delta}.$$

利用 $-2\langle x,d\rangle=-2\xi\delta-2\langle x',d'\rangle$, $\dfrac{x'}{1+\xi}=\overline{u}$, $\delta^2+|d'|^2=1$, $\dfrac{2\xi}{1+\xi}=$

$1-|\overline{u}|^2$, 对 $\delta=0$, 我们有 $\overline{u}\sigma(x)=\sigma\overline{u}(x)$, 否则

$$\overline{u}\sigma(x)=\frac{\overline{u}-(1-\delta^2|\overline{u}-\dfrac{d'}{\delta}|^2)\dfrac{d'}{\delta}}{\delta^2|\overline{u}-\dfrac{d'}{\delta}|^2}$$

$$=\frac{\overline{u}-\dfrac{d'}{\delta}}{\delta^2-|\overline{u}-\dfrac{d'}{\delta}|^2}+\frac{d'}{\delta}=i_{\frac{d'}{\delta},\delta^2}(\overline{u}(x)).$$

由此，考虑与10.2.2相对照，有.

例10.4.11 (**椭圆平面的共形模型**) 借助于复数，我们用 $\overline{B}=\{|z|\le 1\}$ 来描述这个模型，在这里 $e^{i\phi}$ 与 $-e^{i\phi}$ 被视为恒同.

一条椭圆直线是用 $\overline{B}\cap S_\rho(c)$, $-1+\rho^2=|c|^2$, 或者用 $\overline{B}\cap\{\arg z=\alpha\}$ 来给出的. 关于这条直线的镜射是

$$z\mapsto\frac{\rho}{|z-c|^2}(z-c)+c=\frac{c\overline{z}+1}{\overline{z}-\overline{c}}\ \text{或者}\ z\mapsto e^{2i\alpha}\overline{z}.$$

两个这样的镜射的复合可写成形如

$$z\mapsto\frac{az+b}{-\overline{b}z+\overline{a}};\qquad a\overline{a}+b\overline{b}=1. \tag{10.10}$$

人们能对它进行验算. 例如，首先对上述给出的镜射的复合，发现

$$z\mapsto\frac{ce^{-2i\alpha}z+1}{e^{-2i\alpha}z-\overline{c}}$$

经数乘及用 $\dfrac{ie^{i\alpha}}{\sqrt{|c|^2+1}}$ 对分母进行约化后即得出形状 (10.10). 形如 (10.10) 的变换表示了本性的椭圆运动.

由此我们有

定理 10.4.12 椭圆平面 $\mathcal{E}ll$ 的本性运动群 $Bew^+(\mathcal{E}ll)$ 同构于满足 $a\bar{a}+b\bar{b}=1$ 的复 (2,2)- 矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ 的群关于子群 $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的商群. □

注解 10.4.13 我们在 10.2.14 中已经看到，四元数 $\boldsymbol{H}$ 同构于形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ 的复 (2,2)- 矩阵的子环. 于是 $\boldsymbol{H}_1$ 同构于具有附加的性质 $a\bar{a}+b\bar{b}=1$ 的矩阵.

在 8.4.6 中我们已经指出 $\boldsymbol{H}_1/\{+1,-1\}$ 同构于 $\boldsymbol{SO}(3)$. 但是 $\boldsymbol{SO}(3)$ 正好是椭圆平面 $\mathcal{E}ll(\mathbf{R}^3)$ 的本性的运动群，这是因为当 n 是奇数时有 $\mathcal{P}(\boldsymbol{SO}(n))=\boldsymbol{SO}(n)$.

10.5 Clifford 平行线

应用四元数使得对一个 3 维椭圆空间 $\mathcal{E}ll(V)$, 过一点 q, 关于一条定向直线 $\mathcal{G}$, 可定义两条定向直线 $\mathcal{G}_l$ 和 $\mathcal{G}_r$, 它们与 $\mathcal{G}$ 有固定的距离. 它们分别称为过 q 的、关于 $\mathcal{G}$ 的左平行线或右平行线, 两者放在一起称为过 q 的、关于 $\mathcal{G}$ 的 Clifford 平行线.

这是以下列事实为根据的，即由 V 与四元数空间 $\mathbf{H}$ 的一个等距恒同，$\mathcal{E}ll(V)$ 中的每条定向直线 $\mathcal{G}$ 在模为 1 的四元数群 $\mathbf{H}_1$ 中确定了两个 1- 参数群. 于是过 q 的、关于 $\mathcal{G}$ 的左平行线和右平行线分别是 q 在这个群的左作用和右作用下的轨道.

最后，如果人们考虑 $\mathbf{H}_1$ 的两个 1- 参数群在 $\mathcal{E}ll(V)$ 上的同时作用，一个是从左和另一个是从右作用，则一点的轨道一般地是形如一个弯曲的环面，即是一个环面，局部地看上去如同是欧氏平面中的一块. 称这个轨道为 $\mathcal{E}ll(V)$ 中的 Clifford 曲面.

我们现在来考察已知线性群之间的同构的一个进一步的例子. 对第一个这样的例子，可以参看 10.2.13 及后面的注解

10.2.14. 上节中的10.4.12也是一个这样的同构.

定理10.5.1 3维椭圆空间$\mathcal{E}ll = \mathcal{E}ll(V)$的本性的运动群$Bew^+(\mathcal{E}ll)$同构于群$SO(3) \times SO(3)$.

证明: 通过选取V的一组ON-基D, 我们得到一个等距同构$\Phi_D : V \longrightarrow \mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$, 其中$\mathbf{H}$是8.4中的四元数. 按照8.4.8, $SO(\mathbf{H}) = SO(4)$同构于$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1/(\{1,1\},\{-1,-1\})$. 确实地, 我们已把偶$(q,r) \in \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1$与映射$\{\tau(q,r) : q' \in \mathbf{H} \longmapsto qq'\bar{r} \in \mathbf{H}\} \in SO(\mathbf{H})$相对应.

在

$$\mathcal{P} : SO(\mathbf{H}) \longrightarrow Bew^+(\mathcal{E}ll(\mathbf{H}))$$

下, 四个元素$\{(q,r),(-q,r),(q,-r),(-q,-r)\}$给出了同样的本性运动, 按照8.4.6, 有

$$\mathbf{H}_1/\{+1,-1\} \cong SO(\boldsymbol{L}) = SO(3).$$

□

我们现在开始对左和右平行线的定义作些准备. 对于所用的记号, 可参见8.4.

命题10.5.2 对每个$l \in \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L} \cap \mathbf{H}_1 \cong S(\boldsymbol{L})$, 用

$$l : \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in S^1 \longmapsto l(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \cos t + \sin t\ l$$

定义一个单的群态射, 我们称其象为$\mathbf{H}_1$的一个1-参数群, 我们今后也把它写成G_l.

每两个这样的子群G_l和$G_{l'}$是相互共轭的. 即存在$q \in \mathbf{H}_1$, 满足$l' = ql\bar{q}$.

对不同的l和l', G_l和$G_{l'}$仅有元素± 1是公共的.

证明: 第一和第三部分可通过验算证实. 第二部分得自8.4.6. □

现在我们用偶$(l,m)\in \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}$来描述$\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$中的定向直线. 这起源于Study.

命题10.5.3 考察3维椭圆空间$\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$.

1. 设G_l是$\mathbf{H}_1$的一个1-参数群. 于是对每点$p\in\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$, 它用偶$\pm x\in S(\mathbf{H})$来表出, 定义其左轨道为

$$G_l(\pm x)=\{\pm l(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})x;\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\in S^1\}.$$

令$\mathcal{P}(G_l(\pm x))=G_l\cdot p$. 这是$\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$中的一条定向椭圆直线$\mathcal{G}$, 在这里定向意味着在满足$\mathcal{P}([x,lx])=\mathcal{G}$的平面$[x,lx]\in\mathbf{H}$中, ON-基$\{x,lx\}$被定义为正的.

反过来, 如果$\mathcal{G}$是$\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$中的一条定向直线, $\{x,x'\}$是满足$\mathcal{P}(U)=\mathcal{G}$的从属平面$U\subset\mathbf{H}$中的一组正的ON-基, 则$l=x'\bar{x}\in\boldsymbol{L}_1$, 且$\mathcal{G}$可描述为左轨道$G_l(\pm x)$. 群$G_l$是由$\mathcal{G}$唯一确定的.

2. 设$G_m=\{m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t});\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\in S^1\}$是$\mathbf{H}_1$的一个1-参数群. 设$q\in\mathcal{E}ll(\mathbf{H}),\pm y\in S(\mathbf{H})$是在$\mathcal{E}ll_S(\mathbf{H})$中的表示. 于是右轨道$q\cdot G_{\bar{m}}=\{\pm y\bar{m}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t});\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\in S^1\}$是一条定向直线$\mathcal{H}$, 在这里定向是用认定$\{y,y\bar{m}\}$为正的ON-基来确定的.

反过来, 如果给定一条定向直线$\mathcal{H}$, 且$\{y,y'\}$是其平面的正的ON-基, 则$m=y'\bar{y}\in\boldsymbol{L}_1$, 且$\mathcal{H}$可描述为点$q\in\mathcal{H}$的右轨道$q\cdot G_{\bar{m}}$. 群$G_m$是由定向直线$\mathcal{H}$唯一确定的.

3. 由1.及2., $\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$中的定向直线$\mathcal{G}$双方一一地对应于偶$(l,m)\in\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_1\cong S^2\times S^2$. $\mathcal{G}$的定向的逆转给出了偶$(-l,-m)$.

由此指出: $\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$中(不定向)的直线双方一一地对应于偶

$$\pm(l,m)\in(\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_1)/\{(1,1),(-1,-1)\}.$$

证明: 对1.: $G_l\cdot x=\cos t\ x+\sin t\ lx$如在10.3.4中那样给

出了对一条直线的描述. 由于$\bar{l}=-l$, 这里有

$$<x,lx>=\frac{1}{2}x(\overline{lx})+lx\bar{x}=0.$$

反过来, 按照坐标$x\in S(\mathbf{H})$的选取, 一条定向直线可描述为$\{\cos t\ x+\sin t\ x'\}$, 在这里$\{x,x'\}$是一个正的ON-基. 这可写成形如$l(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\cdot x$, 其中$l=x'\bar{x}$. 因为

$$(\cos(t+\frac{\pi}{2})x+\sin(t+\frac{\pi}{2})x')(\cos t\ \bar{x}+\sin t\ \bar{x}')=x'\bar{x},$$

所以$l=x'\bar{x}$唯一确定.

对2.: 这可完全类似于在1.中那样得出.

对3.: 我们指出: 对$(l,m)\in \boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_1$, 正好存在$\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$中的一条定向直线 $\mathcal{G}$, 使得 $\mathcal{G}=G_l\cdot p'=p\cdot G_{\bar{m}}$.

对 $\mathcal{G}$中一点p的坐标$x\in S(\mathbf{H})=\mathbf{H}_1$, $lx=x\bar{m}$必须成立, 且如果它成立, 则左和右轨道给出了同样的直线.

按照8.4.6, 存在$x\in\mathbf{H}_1$满足$l=x\bar{m}\bar{x}$. 对一个任意的满足$l=x'\bar{m}\bar{x}'$的x, 成立$(\bar{x}x')\bar{m}(\bar{x}'x)=\bar{m}$, 即$\bar{x}x'$属于$\mathbf{H}_1$中在$\rho$ (见8.4.5)下使元素$\bar{m}\in S(\boldsymbol{L})$固定不变的元素的子群, 这个子群是$SO(2)$型的. 于是一条直线由$G_l,G_m$唯一确定. □

我们现在来研究前面所述的构造依赖于4维欧氏向量空间的ON-基的选取到何种程度.

命题10.5.4 设V是定向的欧氏向量空间, $\dim V=4$. 设D是V的一个正的ON-基.

于是我们对$\mathbf{H}_1$的一个1-参数群G_l, 用$\Phi_D^{-1}G_l\cdot\Phi_D(p)=$(简记为)$G_{lD}\cdot p$来定义点$p\in\mathcal{E}ll(V)$的左轨道$G_l\cdot p$. 这里$\Phi_D(p)$为$\mathcal{E}ll(\mathbf{H})$中的元素$\pm x$.

现如D^*是V的另一个正的ON-基, 则$\Phi_D\circ\Phi_{D^*}^{-1}$是$SO(\mathbf{H})$中的一个元素, 按照8.4.8, 它能用$\tau(q,r)$表出, 其中$(q,r)\in\mathbf{H}_1\times\mathbf{H}_1$. 这里偶$(q,r)$可确定至只差一个公共的符号$\pm(q,r)$.

于是对每个 $p \in \mathcal{E}ll(V)$, 成立

$$G_{lD} \cdot p = G_{l^*D^*} \cdot p, \quad 其中\ l^* = ql\bar{q}.$$

类似地，对在 1-参数群 $G_{\bar{m}}$ 下的一个右轨道 $p_D \cdot G_{\bar{m}} = \Phi_D^{-1}(\Phi_D(p) \cdot G_{\bar{m}})$, 成立

$$p_D \cdot G_{\bar{m}} = p_{D^*} \cdot G_{\bar{m}^*},\ 其中\ m^* = rm\bar{r}.$$

证明:

$$\begin{aligned}\Phi_D^{-1} l \Phi_D(p) &= \Phi_{D^*}^{-1}(\Phi_{D^*} \circ \Phi_D^{-1}) l (\Phi_D \circ \Phi_{D^*}^{-1}) \Phi_{D^*}(p) \\ &= \Phi_{D^*}^{-1} q (l\bar{q}\Phi_{D^*}(p) r)\bar{r} = \Phi_{D^*}^{-1}(ql\bar{q})\Phi_{D^*}(p).\end{aligned}$$

这里我们已经利用了 $\tau(\bar{q}, \bar{r})$ 是 $\tau(q, r)$ 的逆. 相应地:

$$\begin{aligned}\Phi_D^{-1}(\Phi_D(p)\bar{m}) &= \Phi_{D^*}^{-1}(\Phi_{D^*} \circ \Phi_D^{-1})[(\Phi_D \circ \Phi_{D^*}^{-1})\Phi_{D^*}(p)\bar{m})] \\ &= \Phi_{D^*}^{-1}\bar{q}[q\Phi_{D^*}(p)\bar{r}\bar{m}]r = \Phi_{D^*}^{-1}(\Phi_{D^*}(p)(rm\bar{r})).\end{aligned}$$

□

由于前述的结果，下列定义现在仅依赖于 V 的定向.

定义 10.5.5 设 V 是一个 4 维定向欧氏向量空间.

1. 我们把 $\mathcal{E}ll(V)$ 的两条定向直线 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ 称为左平行，$\mathcal{G} \parallel_l \mathcal{G}'$, 如果两条直线可表示为一个，而且是同一个 1-参数群的左轨道.

2. $\mathcal{E}ll(V)$ 的两条定向直线 $\mathcal{G}, \mathcal{G}''$ 称为右平行, 如果两者可表示为一个, 而且是同一个 1-参数群的右轨道. 记为: $\mathcal{G} \parallel_r \mathcal{G}''$.

3. $\mathcal{E}ll(V)$ 的两条直线 $\mathcal{G}, \mathcal{G}^*$ 称为 Clifford 平行，如果它们在适当的定向下是左或右的平行的.

注解 10.5.6 左平行性显然是一个等价关系，右平行性也一样. 但对 Clifford 平行性来说，这并非如此. 由 $\mathcal{G} \parallel_l \mathcal{G}'$ 和 $\mathcal{G}' \parallel_r \mathcal{G}''$, 为使 $\mathcal{G} \parallel_l \mathcal{G}''$ 成立，还需要有 $\mathcal{G} \parallel_r \mathcal{G}''$.

定理10.5.7 设$\mathcal{E}ll(V)$是一个3 维 定向空间.

1. 设 $\mathcal{G}$是$\mathcal{E}ll$中的一条定向直线. 过每点$q \in \mathcal{E}ll$, 正好有一条关于 $\mathcal{G}$的左平行线 $\mathcal{G}_l$和一条对 $\mathcal{G}$的右平行线 $\mathcal{G}_r$. 对$q \in \mathcal{G}$, 两者与 $\mathcal{G}$是一致的. 对$q \in \mathcal{G}^{\perp}$, 这个 $\mathcal{G}^{\perp}$带有两个可能的定向. 对$q \notin \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{\perp}$, $\mathcal{G}_l$和 $\mathcal{G}_r$仅有点q是公共的, 且它们的正的切向量构成了角度$2d(q, \mathcal{G})$. 它是正交于从q到 $\mathcal{G}$上的垂线.

2. 如果 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{G}^*$是Clifford平行线, 于是它们互相有固定的距离: 对$p \in \mathcal{G}$, 设$p^* \in \mathcal{G}^*$是与p有最小距离的点. 于是$d(p,p^*)$与p无关.

3. 设 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$是不同的左平行直线. 选取在 $\mathcal{G}$上的$p,q,p \neq q$, 及 $\mathcal{G}'$上的p'. 过q的、关于 $\mathcal{G}_{pp'}$的右平行线 $\mathcal{G}'_{pp'}$ 与 $\mathcal{G}'$交于一点q', 于是$pp'qq'$构成了在下列的意义下的一个平行四边形:

$$d(p,p') = d(q,q'); \quad d(p,q) = d(p',q'),$$

且在点p,p',q,q'处关于正方向的四个夹角是相互一致的.

证明: 对1.: 由10.5.3, 10.5.4, 按照一个正的ON-基D的选取, $\mathcal{E}ll$中的定向直线 $\mathcal{G}$确定了两个1-参数群G_l和 $\mathcal{G}_m$, 使得 $\mathcal{G} = G_{lD} \cdot p = p_D G_{\bar{m}}, p \in \mathcal{G}$. 由此, $\mathcal{G}_l$和 $\mathcal{G}_r$被定义为$G_{lD} \cdot q$及$q_D \cdot G_{\bar{m}}$.

设$q \notin \mathcal{G}$. 设$p \in \mathcal{G}$是q在 $\mathcal{G}$上的垂足点. 当$q \in \mathcal{G}^{\perp}$时, 则 $\mathcal{G}$的每一点都是如此. 否则, p是唯一确定的, 正如人们在例如球面模型处所看到的那样.

设$x, z \in S(V)$是p,q的齐次坐标, 且$< x,z > \in [0,1)$. 于是过q的、关于 $\mathcal{G}$的左平行线和右平行线的正切线分别由lz和$z\bar{m}$给出. 它们与平面$[x,z]$是正交的. $< lz, x >=< x, z\bar{m} >= 0$蕴含$\bar{z}\bar{l} = \bar{x}\bar{l}z\bar{x}$和$zm = xm\bar{z}x$. 将$xm = \bar{l}x$和$\bar{m}\bar{x} = \bar{x}l$放在一起, 我们发现

$$< lz, z\bar{m} > = \frac{1}{2}(l(zm)\bar{z} + z\bar{m}(\bar{z}\bar{l}))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(l(xm)\bar{z}x\bar{z} + z(\bar{m}\bar{x})\bar{l}z\bar{x}) \\
&= \frac{1}{2}(l\bar{l}x\bar{z}x\bar{z} + z\bar{x}l\bar{l}z\bar{x}) = \frac{1}{2}((x\bar{z})^2 + (z\bar{x})^2).
\end{aligned}
$$

另一方面，有

$$
2 < x, z >^2 = \frac{1}{2}(x\bar{z} + z\bar{x})^2 = 1 + \frac{1}{2}((x\bar{z})^2 + (z\bar{x})^2).
$$

于是

$$
\cos(2d(x,z)) = 2\cos^2(d(x,z)) - 1 = \cos\angle(lz, z\bar{m}).
$$

对2.: 这得自：例如两条左平行直线 $\mathcal{G}$和 $\mathcal{G}^*$是$\mathcal{E}ll(V)$的一个，而且是同一个1-参数同构群的左轨道.

对3.: 我们有 $\mathcal{G} = G_l \cdot p$, $\mathcal{G}' = G_l \cdot p'$, 这里我们已经放弃了ON-基$D$的记号. $\mathcal{G}_{pp'}$能写成$p \cdot G_{\bar{m}}$. 利用$q = g \cdot p, g \in G_l$, 有$g \cdot \mathcal{G}_{pp'} = g \cdot p \cdot G_{\bar{m}} = q \cdot G_{\bar{m}}$. 利用$p' = p \cdot \bar{h}, h \in G_{\bar{m}}, g \cdot p \cdot \bar{h} \in q \cdot G_{\bar{m}} \cap G_l \cdot p'$是过$q$的、关于 $\mathcal{G}_{pp'}$的右平行线和过p'的、关于$\mathcal{G}$的左平行线的公共点q'. □

我们想再补充10.5.7.3 . 为此我们先指出:

命题10.5.8 设$\mathcal{E}ll = \mathcal{E}ll(V)$是定向的, $\dim \mathcal{E}ll = 3$. 选取V的一个正的ON-基D. 于是群$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1$在$\mathcal{E}ll$上的一个作用

$$
\bar{\tau} = \bar{\tau}_D : (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1) \times \mathcal{E}ll \longrightarrow \mathcal{E}ll
$$

定义如下：如果$(q,r) \in \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1$及$p \in \mathcal{E}ll$, 则设$\bar{\tau}(q,r;p) = \Phi_D^{-1}(q\Phi_D(p)\bar{r})$. 这里$\Phi_D(p)$是$p$在$S(\mathbf{H})$中的坐标. 由元素

$$
\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}
$$

构成的同构于Klein四元群 (见9.4.6) 的子群作为恒等元作用着.

证明: 由8.4.7得出，这是一个群作用，即

$$\bar{\tau}(q,r;\bar{\tau}(q',r';p)) = \bar{\tau}(qq',rr';p) \text{ 及 } \bar{\tau}(1,1;p) = p.$$

这是因为如果我们对p选取齐次坐标$\pm x \in S(V)$中的一个，则$\Phi_D(x) = q' \in \mathbf{H}_1$，及$q\Phi_D(x)\bar{r} = r(q,r)(\Phi_D(x))$，其中$\tau(q,r) \in SO(\mathbf{H})$. 剩下只需注意：$\Phi_D(-x) = -\Phi_D(x)$及四个元素$(q,r)$, $(-q,r)$, $(q,-r)$, $(-q,-r)$以相同的方式作用着. □

定理10.5.9 设$\mathcal{E}ll(V)$是一个3维椭圆空间. 设G_l和G_m是$\mathbf{H}_1$的1-参数群. 按照10.5.8, 通过选取V中的一组ON-基，在$\mathcal{E}ll(V)$上的一个$G_l \times G_m = S^1 \times S^1$-作用定义为

$$\bar{\tau} : (G_l \times G_m) \times \mathcal{E}ll(V) \longrightarrow \mathcal{E}ll(V).$$

于是点p_0的轨道$\bar{\tau}(G_l, G_m; p_0) =$ (简记为)$G_l \cdot p_0 \cdot G_{\bar{m}}$一般地是一个局部 - 欧氏环面；它称为Clifford曲面. 精确地说：按照10.5.3, 在$\mathcal{E}ll(V)$中正好存在一条定向直线 $\mathcal{G}$, 它不仅是G_l和G_m的左轨道也是右轨道. 设$p_0 \notin \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^\perp$, 则$d(p_0, \mathcal{G}) = \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. 于是$G_l \cdot p_0 \cdot G_{\bar{m}}$包含相互左平行和右平行的两族定向直线，即$\{G_l \cdot p_0 \cdot \bar{h}; h \in G_m\}$和$\{g \cdot p_0 \cdot G_{\bar{m}}; g \in G_l\}$. 对每个$p = g \cdot p_0 \cdot \bar{h}$, 过$p$的两条定向直线$G_l \cdot p_0 \cdot \bar{h}$和$g \cdot p_0 \cdot G_{\bar{m}}$构成了与$p$无关的角度$2\alpha \in (0,\pi)$.

如果p和q'是$G_l \cdot p_0 \cdot G_{\bar{m}}$中的点，在那儿$q'$又属于过$p$的由两族中另一族中的一条直线，于是$p$和$q'$确定了一个在10.5.7.3的意义下的平行四边形$pp'qq'$, 它的边属于这两个直线族.

证明: 这直接地得自轨道$G_l \cdot p_0 \cdot G_{\bar{m}}$的定义及10.5.7的证明. □

注解10.5.10 特别当10.5.9中的点p_0与两条直线 $\mathcal{G}$和$\mathcal{G}^\perp$具有相同的距离$\alpha = \frac{\pi}{4}$时，则在$G_l \cdot p_0 \cdot G_{\bar{m}}$上的两个直线族中的直线是正交地相交. 这表明，局部地看上去轨道如同欧

氏平面$\mathbf{R}^2$那样，在那儿，两个平行线族对应于两个坐标轴. 但从整体上看，轨道与$\mathbf{R}^2$有本质上的区别：轨道是两个圆周的乘积$S^1 \times S^1$的类型，于是是环面类型. 对任意一个α，对应是成立的；这里轨道$G_l \cdot p_0 \cdot G_{\bar{m}}$局部地看上去如同一个欧氏平面，在其中，选取由单位向量所组成的基，相互间的夹角为2α.

10.6 球面几何和三角学

我们欲导入椭圆平面中的三角形的基本公式，它类似于对欧氏三角形的公式8.5.3和对双曲三角形的公式10.2.17.

然而在这里产生了下列难点：

考虑在2维半球面$HS(V,e)$上的满足$\langle x, e\rangle = \langle y, e\rangle = \delta > 0$，$\langle x, y\rangle = 0$的点$x$，$y$. 于是

$$x(t) = \cos t\ x + \sin t\ y, \qquad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$$

描述了在半球面模型$\mathcal{E}ll_{H,e}(V) = HS(V,e) \cup \mathcal{E}ll_S(V_e)$上的一条直线. 选取$\varepsilon$，$0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{4}$. 点$x(-\varepsilon)$和$x(\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon)$属于$HS(V,e)$. 因为$\langle x(-\varepsilon), x(\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon)\rangle = -\sin 2\varepsilon > 0$，并非$\{x(t),\ -\varepsilon \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}+\varepsilon\}$，而是

$$\{x(-t), \varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{4}\} \cup \{x(t), \frac{3\pi}{4} \geq t \geq \frac{\pi}{2}+\varepsilon\}$$

为从$x(-\varepsilon)$到$x(\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon)$的最短连接的一个参数化. 具有顶点$e$，$x(-\varepsilon)$,$x(\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon)$ 的三角形的三条边在一起构成了一条闭曲线，它可变形到过点$x(\dfrac{\pi}{4}) = -x(\dfrac{3\pi}{4})$及$e$的椭圆直线上，但不能变形至一点. 因此，它缺少了像欧氏三角形和双曲三角形那样的"内部".

如果我们考虑在2维球面上的三角形时，这个难点不会碰到. 于是我们首先把所谓球面几何的基本概念编排在一起，然

后再谈论球面三角形. 由此, 作为本书的结束, 我们再处理椭圆三角形.

定义 10.6.1 设 $V=(V,\langle\ ,\ \rangle)$ 是一个欧氏向量空间, 且 $\dim V=n+1\geq 2$.

1. 定义 n 维球面空间 $Sph(V)$ 为 V 中的单位球面 $S(V)=\{|x|=1\}$, 连同 k 维球面子空间 $S(V)\cap U=S(U)\subset S(V)$, 这里 U 是 V 的 $k+1$ 维的子空间.

于是 0 维子空间是一对对径点 $\{x,-x\}$. 这与以 $S(V)$ 的元素作为点是有区别的.

1 维子空间, 也称为球面直线, 是在 $S(V)$ 上的一个大圆. 我们也把一个 2 维子空间称为球面平面.

2. 球面运动群 $Bew(\mathcal{S}ph(V))$ 定义为群 $\boldsymbol{O}(V)$. $\boldsymbol{SO}(V)$ 定义为本性的球面运动群 $Bew^{+}(\mathcal{S}ph(V))$.

定理 10.6.2 在球面空间 $\mathcal{S}ph(V)$ 上,

$$d(p,q)=\cos^{-1}(\langle p,q\rangle),$$

定义了一个距离. 这里 $\cos^{-1}$ 是 $\cos:\ [0,\pi]\to[-1,1]$ 的逆映射.

这个距离在球面运动下是不变的.

三角形等式

$$d(p,q)+d(q,r)=d(p,r)$$

仅当三点 p, q, r 位于一条球面直线上, 且 $d(p,q)+d(q,r)\leq\pi$ 时成立.

证明: 距离在 $\boldsymbol{O}(V)$ 下的不变性是显然的. 对距离的条件即为三角形不等式的有效性, 但这并非是显而易见的.

如在 10.3.5 的证明中那样, 我们用 x, y, z 来代替 p, q, r:

$$x=\sin a\ x'+\cos a\ y,\qquad z=\sin b\ z'+\cos b\ y.$$

这里 $a = d(p,q)$, $b = d(q,r)$, $\langle x', y\rangle = \langle z', y\rangle = 0$, x', $z' \in S(V)$. 由此有

$$\cos(d(p,r)) = \langle x, z\rangle = \sin a \sin b\langle x', z'\rangle + \cos a \cos b$$
$$\geq \cos(d(p,q) + d(q,r)).$$

于是 $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r) \leq \pi$, 或者要不然

$$d(p,r) \leq \pi \leq d(p,q) + d(q,r).$$

等号意味着 $z' = -x'$, 于是 p, q, r 在一条直线上. 当 $d(p,q) + d(q,r) \leq \pi$ 时, 则得出此式 $= d(p,r)$. □

注解 10.6.3 球面空间 $\mathcal{S}ph(V)$ 与椭圆空间 $\mathcal{E}ll(V)$ 有紧密的联系, 人们能从球面模型 $\mathcal{E}ll_S(V)$ 最简单地看出这一点. 每一个 $x \in \mathcal{S}ph(V)$ 确定了元素 $\{x, -x\} \in \mathcal{E}ll_S(V)$. 如此定义的映射

$$\phi : \mathcal{S}ph(V) \to \mathcal{E}ll_S(V); \qquad x \mapsto \{-x, x\}$$

是满射; 点 $\{x, -x\} \in \mathcal{E}ll_S(V)$ 在 ϕ 下的原象由两点组成, 即 x 和 $-x$.

我们对 $\mathcal{S}ph(V)$ 的几何学不想作进一步的讨论. 我们仅需注意: 对 $\dim \mathcal{S}ph(V) = 2$, 于是对球面平面, 两条不同的直线总是相交于两点 (但它们是在一个唯一的 0 维子空间之中).

现在我们来看球面三角学.

定义 10.6.4 考虑一个球面平面 $\mathcal{S}ph(V)$, 因而是 3 维欧氏向量空间 V 中的单位球面 $S(V)$.

1. 所谓在 $\mathcal{S}ph(V)$ 中的一个三角形 abc 是指三个点 a, b, c, 它们不属于一条球面直线. 换言之, a, b, c 在 V 中是线性无关的. 称 a, b, c 为 abc 的顶点.

2. 三角形 abc 的边 A 是由满足 $d(b,p) + d(p,c) = d(b,c) < \pi$ 的点 p 所构成. 按照 10.6.2, A 属于通过 b 和 c 的球面直线 $\mathcal{G}_{bc}$.

相应地可定义边 $B \subset \mathcal{G}_{ca}$ 和 $C \subset \mathcal{G}_{ab}$. 边 A 的长度 $|A|$ 是其端点的距离 $d(b,c)$. 同样有 $|B| = d(c,a)$, $|C| = d(a,b)$.

3. 三角形 abc 在点 a 处的角 α 定义为 $\angle(x_{ab}, x_{ac})$. 这里 x_{ab}, x_{ac} 是定向直线 $\mathcal{G}_{ab}$ 和 $\mathcal{G}_{ac}$ 在点 a 处的正的切向量. 对此类似的定义可参看 10.2.16.3. 相应地可定义在 b 处的角 β 和在 c 处的角 γ.

与 8.5.3 和 10.2.17 相对照，现在有

引理 10.6.5 现设 abc 是球面平面 $\mathcal{E}ll(V)$ 中的一个三角形.

1. $\cos|C| = \cos|A|\cos|B| + \sin|A|\sin|B|\cos\gamma$.
(球面余弦定理)

2. 当 abc 在 c 处是直角时，则 $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, 于是

$$\cos|C| = \cos|A|\cos|B| \qquad \text{(球面的勾股定理)}$$

$$\tan|A| = \tan|C|\cos\beta; \qquad \tan|B| = \tan|C|\cos\alpha$$

$$\sin|A| = \sin|C|\sin\alpha; \qquad \sin|B| = \sin|C|\sin\beta.$$

3. $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin|A| : \sin|B| : \sin|C|$.
(球面正弦定理)

证明: 对 1.: 在 $[a,c]$ 和 $[b,c]$ 中适当地分别选用 a', $b' \in S(V)$, 使得 $\langle a',c\rangle = \langle b',c\rangle = 0$, 于是成立:

$$a = \sin|B|a' + \cos|B|c; \qquad b = \sin|A|b' + \cos|A|c.$$

因为 $\langle a',b'\rangle = \cos\gamma$, $\cos|C| = \langle a,b\rangle$, 两个等式相乘就得出了结论.

对 2.: 第一个等式得自 1.

利用 $\cos|A| = \cos|B|\cos|C| + \sin|B|\sin|C|\cos\alpha$, 在应用勾股定理后，我们发现

$$\cos\alpha = \frac{\cos|A|\sin^2|B|}{\sin|B|\sin|C|} = \frac{\tan|B|}{\tan|C|}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2|C| - \sin^2|B|\cos^2|A|}{\sin^2|C|} = \frac{\sin^2|A|}{\sin^2|C|}.$$

对 3.: 设 l_c 是 c 在直线 $\mathcal{G}_{ab}$ 上的垂足点. cal_c 和 bcl_c 是在 l_c 处有夹角 $\frac{\pi}{2}$ 的三角形. 利用 2., 有

$$\sin|B|\sin\alpha = \sin d(l_c, c) = \sin|A|\sin\beta.$$

□

注解 10.6.6 类似于我们在 10.2.18 中对双曲三角形所指出的那样, 从球面三角形的前述公式中, 人们相互比较其 Taylor 级数的第一个非常数的项, 就可导出对欧氏三角形的公式 8.5.3.

例如, 我们用

$$\begin{aligned}
\cos|C| &= 1 - \frac{|C|^2}{2} + \cdots,\\
\cos|A| &= 1 - \frac{|A|^2}{2} + \cdots,\\
\cos|B| &= 1 - \frac{|B|^2}{2} + \cdots,\\
\sin|A| &= |A| - \cdots,\\
\sin|B| &= |B| - \cdots,
\end{aligned}$$

就可得到 10.6.5.1 中的欧氏余弦定理. 这意味着, 每当三角形变得更小时, 球面三角形的几何学就越来越接近于欧氏三角形的几何学.

定义 10.6.7 设 abc 是一个球面三角形. 与其相配极的三角形 $a'b'c'$ 可用

$$\langle a', b\rangle = \langle a', c\rangle = 0; \qquad \langle a, a'\rangle > 0$$

$$\langle b', c\rangle = \langle b', a\rangle = 0; \qquad \langle b, b'\rangle > 0$$

$$\langle c', a\rangle = \langle c', b\rangle = 0; \qquad \langle c, c'\rangle > 0$$

来定义.

注: a', b', c'是线性无关的. 这是因为如果$c' \in [a', b']$, 则$\langle c, c'\rangle = 0$, 于是 a, b, $c \perp c'$, 而这是不可能的.

命题10.6.8 设$a''b''c''$是与abc相配极的三角形$a'b'c'$的配极三角形, 于是$a'' = a$, $b'' = b$, $c'' = c$.

证明: 由 $a'' \perp [b', c']$以及$a \perp [b, c]$可以得出 $a'' = \pm a$. 因为$\langle a'', a'\rangle = \langle a, a'\rangle > 0$, 所以得出$a'' = a$. □

命题10.6.9 在一个三角形abc及其配极三角形$a'b'c'$的边长$|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A'|$, $|B'|$, $|C'|$及夹角α, β, γ, α', β', γ'之间存在着关系式:

$$\begin{aligned}|A| + \alpha' &= |B| + \beta' = |C| + \gamma' \\ &= |A'| + \alpha = |B'| + \beta = |C'| + \gamma = \pi.\end{aligned}$$

证明: 显然只需证明 $|A'| + \alpha = \pi$. α是关于直线 $\mathcal{G}_{ab}$, $\mathcal{G}_{ac}$的单位向量x_{ab}, x_{ac}之间的角度. x_{ab}, x_{ac}, b', $c' \in [a]^{\perp}$. $x_{ab} \in [a, b]$, 于是$\langle x_{ab}, c'\rangle = 0$. 同样$\langle x_{ac}, b'\rangle = 0$. $\langle b, b'\rangle > 0$和$\langle x_{ac}, b'\rangle = 0$蕴含$\langle x_{ab}, b'\rangle > 0$. 同样$\langle x_{ac}, c'\rangle > 0$. 于是

$$\angle(x_{ab}, x_{ac}) + \angle(b', c') = \alpha + |A'| = \pi.$$

□

由此得出:

定理10.6.10 在一个球面三角形abc中, 角度之和$\alpha + \beta + \gamma > \pi$.

借助于配极三角形的边长, 正好成立:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma = 3\pi - (|A'| + |B'| + |C'|) < 3\pi.$$

当 $|A|+|B|+|C|$ 很小时， $0<(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ 也很小．当 $0<2\pi-(|A|+|B|+|C|)$ 很小时， $0<3\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ 也很小．

证明：三角形 $a'b'c'$ 的周长 $A'+B'+C'$ 总是小于 2π．为了看出这一点，注意， $a'b'c'$ 整个地位于一个适当选取的半球面的内部．三角形关于半球面中心的径向变形至其边界增大了它的周长，并给出了一条长为 2π 心的曲线．当三角形 abc 的顶点 a, b, c 接近一点 o 时，则由配极三角形的三边 A', B', C' 所构成的闭曲线就接近于大圆 $S(V)\cap[o]^{\perp}$．于是 $0<2\pi-(|A'|+|B'|+|C'|)$ 就接近于 0． □

定义 10.6.11 设 $\mathcal{E}ll=\mathcal{E}ll(V)$ 是一个椭圆平面．

1．所谓 $\mathcal{E}ll$ 中的一个三角形 abc 是指三个点 a, b, c, 它们不属于一条直线，而且有 $d(a,b)$, $d(b,c)$, $d(c,a)<\dfrac{\pi}{4}$．即三点 a, b, c, 也称为 abc 的顶点，正好具有一条长度等于距离的连接线段．

2．三角形 abc 的边 A 是由满足 $d(b,p)+d(p,c)=d(b,c)$ 的点 p 所组成．于是 $A\subset\mathcal{G}_{ab}$．边 B 和 C 可相应地定义．

A 的长度 $|A|$ 是 A 的端点间的距离 $d(b,c)$, $|B|$ 和 $|C|$ 可相应地定义．

3．定义在 a 处的角 α 为 $\angle(x_{ab},x_{ac})$, 这里 x_{ab},x_{ac} 是定向直线 $\mathcal{G}_{ab}$, $\mathcal{G}_{ac}$ 在点 a 处的正的切向量．可相应地定义在 b 处的角 β 和在 c 处的角 γ．

引理 10.6.12 设 abc 是椭圆平面 $\mathcal{E}ll=\mathcal{E}ll(V)$ 中的一个三角形．

1．当 abc 连同它的边 A, B, C 完全属于半球面的模型

$$\mathcal{E}ll_{HS}(V,c)=HS(V,c)\cup\mathcal{E}ll_S(V_c)$$

的半球面 $HS(V,c)$ 时， 10.6.5 中的公式 1., 2., 3. 是成立的．

2． 如果 1.不成立，则边 C 与半球面 $HS(V,c)$ 的边界 $\mathcal{E}ll_S(V_c)=\{c\}^{\perp}$ 相交．在这种情形下，如果人们把它们中的 $|C|$

换成$\pi-|C|$, α, β分别换成$\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, 则10.6.5中的公式1., 2., 3.成立.

证明: 1.是显然的. 对2.的证明，我们注意：椭圆三角形abc确定了一个具有同样顶点a, b, c的一个球面三角形，但在其中边C用长为$\pi-|C|$的边 $\mathcal{G}_{ac}\setminus C$来代替，角$\alpha$, β用角$\pi-\alpha$, $\pi-\beta$来代替. □

习题

1. 试分类椭圆平面中满足距离$d(p_1,p_2)=d(p_2,p_3)=d(p_1,p_3)$的点$\{p_1,p_2,p_3\}$的集合. 是否存在点$p_1$, p_2, p_3, p_4, 使得对所有的$i<j$满足$d(p_i,p_j)=$常数？

2. 对双曲平面中具有三个直角的一个四边形，并设a, b是连接直角的边的边长，试确定出第四个角.

3. 具有相同角度的两个球面三角形是合同的.

4. 对椭圆空间$\mathcal{E}ll$中的两条直线 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, 描述集合

$$\{p\in\mathcal{E}ll;\ d(p,\ \mathcal{G}_1)=d(p,\ \mathcal{G}_2)\}.$$

5. 对怎样的$n\geq 3$, 存在双曲平面中的一个n边形，使得其所有的边长相等，而且所有的角均有值$\dfrac{2\pi}{n}$?

6. 对2- 球面S^2和椭圆平面，研究保角双射群 (可参见等距群的情形).

最后的注意: 非欧几何学是由 Gauss, W. Bolay 和 Lobatschewski 构想于前一世纪的初期. 在本书中我们只能包含其基础知识和在随后所发现的结果中挑选一些有限的内容. 在下列的文献提示中读者可找到继续深入的书籍. 我们在文献提示中已从大量内容丰富的材料中萃取了精要, 因此这应该会对读者有所帮助的.

文献提示

在第 1 至 5 章中所处理的内容能在每一本线性代数的教科书中或多或少地找到. 我在这里仅仅提及: Bourbaki [5a], Fisher [8a], Greub, Klingenberg-Klein, Kowalski, Oeljeklaus - Remmert. 对 5.4 中 Jordan 标准形的导入, 也可参见 Weyl.

对于在第 6 章中所处理的具有数量积或范数的向量空间 —— 特别是对 6.2 至 6.4, 也可参见 Bourbaki [5b], Dieudonné [7a] 和 Wloka.

Berger 给出了关于在第 7 章至第 10 章中所处理的经典几何学的一个高观点的极好表述. 在其它的文献中, 可参见 Blaschke [4a], [4b] 的书, 也有 Kuiper 和 Pickert 的书, 也推荐 Fischer [8b].

Artin 和 Baer 的书具有更代数化的倾向及进一步深入. Dieu- donné [7b] 与我们的表述多次相合; 对四元数 (8.4) 也可参见 Blaschke [4c]. 对几何基础, 特别是对 9.3, 可参见 Klingenberg [11b] 和 Lingenberg. 对第 10 章, 可参见 Coxeter, Klein 和 Lenz. 在 Klingenberg [11a] 中我给出了一个概述, 并附有许多文献提示.

文献目录

[1] Artin E. Geometric Algebra. New York: Interscience, 1957

[2] Baer R. Linear Algebra and Projective Geometry. New York: Academic Press, 1952

[3a] Berger M. Geometrie, vol. 5. Paris: Cedic/Fernand Nathan, 1977

[3b] Berger M. Geometry I, II. Translation from the French by Michael Cole and Silvio Levy. Berlin: Springer, 1987

[4a] Blaschke W. Analytische Geometrie, 2. Auflage. Basel: Birkhäuser, 1954

[4b] Blaschke W. Projektive Geometrie, 3. Auflage. Basel: Birkhäuser, 1954

[4c] Blaschke W. Nichteuklidische Geometrie und Mechanik. Leipzig und Berlin: Teubner, 1942

[5a] Bourbaki N. Eléments de mathematiques I Livre II: Algébre. Paris: Hermann, 1962

[5b] Bourbaki N. Eléments de mathematiques I, Livre V: Espaces vectoriels topologiques. Paris: Hermann, 1955

[6] Coxeter H S M. Non-euclidian Geometry. Toronto: The University of Toronto Press, 1947

[7a] Dieudonné J. Foundations of Modern Analysis. New York and London: Academic Press, 1960

[7b] Dieudonné J. Linear Algebra and Geometry. Paris: Hermann, 1969

[8a] Fischer G. Lineare Algebra. Braunschweig: Vieweg, 1978

[8b] Fischer G. Analytische Geometrie. Braunschweig: Vieweg, 1978

[9] Greub W. Linear Algebra, 4 ed. New York-Heidelberg -Berlin: Springer, 1975

[10] Klein F. Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie. Berlin: Springer, 1928

[11a] Klingenberg W. Grundlagen der Geometrie. Mannheim-Wien-Zürich:

Bibliographisches Institut, 1971

[11b] Klingenberg W. Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen. *Abh. Math. Sem., Hamburg,* **18** (1952): 120~143

[12] Klingenberg W, Klein P. Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Zwei Bände und ein Übungsband. Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut, 1971 -73

[13] Kowalski H J. Lineare Algebra, 9. Auflage, Berlin-New York: de Gruyter, 1979

[14] Kuiper N. Linear Algebra and Geometry. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1965

[15] Lenz H. Nichteuklidische Geometrie. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1967

[16] Lingenberg R. Grundlagen der Geometrie I. Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut, 1969

[17] Oeljeklaus E, Remmert R. Lineare Algebra I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1974

[18] Pickert G. Analytische Geometrie. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1955

[19] Weyl H. Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin: Springer, 1922

[20] Wloka J. Funktionalanalysis und Anwendungen. Berlin-New York: de Gruyter, 1971

索 引

A_n, S_n 的阶 80
Banach 空间 142
Bessel 不等式 152
Cauchy 序列 142
Cauchy-Schwarzsche 不等式 139
Ceva 定理 197
Clifford 平行线 375
Clifford 曲面 378
Cramer 法则 89
Dandelin 球面 273
Desargues 定理 200, 295
E_{kl}, 55
$\mathcal{E}ll$ 的半球面模型 365
$\mathcal{E}ll$ 的球面模型 363
Fourier 多项式 156
Fourier 级数 156
Gauss 消去法 75
Gram-Schmidt 正交化方法 133
$\tilde{\mathbf{H}}$ 351
Hamilton-Cayley 定理 103
Hesse 标准形 226
Hessenberg, G. 303
Hilbert, D. 303
Hilbert 对偶空间 159
Hilbert 基 153
Hilbert 空间 148
Hölder 不等式 145
$\mathcal{H}yp$ 的双曲模型 337
im f, f 的象 8
Jordan 矩阵 $J_m(\lambda)$ 108
-, 实 Jordan 矩阵 $J_{2m}(\alpha, \beta)$ 121
Jordan 标准形 113
-, 实 Jordan 标准形 121
ker f, f 的核 8
Klein 四元群 309
Laplace 展开定理 88
Lorentz 群 333
-, 特殊 Lorentz 群 334
Lorentz 形式 331
Menelaos 定理 197
Minkowski 不等式 145
Morley 定理 258
Pappos-Pascal 定理 199, 294
Parseval 等式 153
Parseval 恒等式 153
Poincaré 半平面 353
Riesz 表示定理 159
Sarrus 规则 85
Study, E. 373
Sylvester 惯性定理 171, 202
Thales 定理 196, 256
v. Staudt 基本定理 316
Weierstrass 逼近定理 138
Zorn 引理 33

A

埃尔米特形式 167

B

半球面 364
半直线 237
闭集 141
标准正交基, ON- 基 132, 332
标准正交系 132
补 36

C

参照系
-, 仿射参照系 187, 300
-, 射影参照系 287
-, 双曲参照系 340
-, 椭圆参照系 361
-, 酉参照系 221
常系数线性微分方程组 115
超平面
-, 仿射超平面 182
-, 射影超平面 285
-, 双曲超平面 335
超平面镜射 223, 334
乘法 15
-, 一般仿射平面中的乘法 301
垂线, 垂足点 223, 355, 383
从属于仿射变换 φ 的线性映射 f_φ 185

D

代数, K-代数 43
代数余子式 88
单比 194
单参数群 372
单位点
-, 仿射参照系的单位点 300
-, 射影参照系的单位点 287
导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 50
等价关系 10
等价类 11
等距的 161
典范基 31, 56
定向的, 定向 235
-, 相同定向 234
-, 正定向, 反定向 235
度量空间 141
-, 完备度量空间 142
对称群 S_n 62, 76
对称双线性形式 167, 202
-, 本性的对称双线性形式 318
对称双线性形式的基本定理 202
对合 314
对换 77
对径点 285
对偶空间 44

-, 对偶空间 $L(V;K)$ 或 V^* 44
-, 对偶空间 $L_b(V;K)$ 或 V_b^* 159
多项式 16, 24
多项式的阶 95

E

二次函数 203
二次函数的基本定理 205
二次型
-, $(n-1)$ 维的二次型 209
-, 本性射影二次型 322
-, 仿射二次型 207
-, 仿射 - 酉二次型 228
二次型的标准表示 228
二次型的中心 231

F

范数 132, 139
-, p- 范数 144
方向
-, 仿射子空间的方向 181
-, 射线的方向 237
仿射变换 187
仿射变换群 Aff $(\mathcal{A})$ 187
仿射参照系的轴 300
仿射刚性 212
仿射空间 178
仿射 - 欧氏空间 218
仿射平面，一般仿射平面 299
仿射生成集 182
仿射映射 184
仿射 - 酉空间 218
非实质点
-, 仿射空间中的非实质点 289
-, 一般仿射平面中的非实质点 299
非退化形式 170, 202
分类定理
-, 仿射二次型的分类定理 212
-, 欧氏二次型的分类定理 231
分类定理 65
分配律 16, 21
复共轭 17, 119
复合 2
复数 16
赋范向量空间 139

G

共轭矩阵 96
共轭四元数 244
共轭 - 线性映射 131
共焦圆锥曲线 269
共焦圆锥曲线的次轴 269
共焦圆锥曲线的主轴 269
共形模型
-, 双曲空间的共形模型 342
-, 椭圆空间的共形模型 366
勾股定理 144, 250, 354, 382

关于球面的反演 346

H

行列式 80
-, Gram行列式 173
-, Vandermonde行列式 91
行列式的Pfaff式 92
行列式映射 80
合同 218
合同定理
-, 仿射 - 欧氏空间的合同定理 222
-, 三角形的合同定理 251
-, 酉向量空间的合同定理 221
恒同映射 1
横截 290
蝴蝶定理 302
划分 12
环中的共轭元素 77

J

积分 44
基 (基系) 31
-, 典范基 31
-, 对偶基 46
-, 仿射基 187
-, 射影参照系的基 287
基本定理
-, 代数基本定理 101
-, 欧氏三角形的基本定理 250
-, 射影几何的基本定理 296
-, 实多项式基本定理 101
-, 线性方程组的基本定理 71
-, 仿射 - 酉空间上的二次函数的基本定理 199, 304
基本矩阵
-, 埃尔米特形式的基本矩阵 168
-, 对称形式的基本矩阵 201
极小多项式 104
极坐标 264
集合，开集，闭集 141
计值映射 ev 24
加法 15
-, 一般仿射平面中的加法 301
加法定理 236
渐近线 261
交比 307
交错群 A_n 80
焦点 260, 261
角 237
-, 定向角 237
角平分线 253
结合律 4, 16, 21, 301, 303
镜射 175, 223, 314
矩阵， (m,n)- 矩阵 54
-, 对角矩阵 61
-, 反对称矩阵 92
-, 幂零矩阵 129
-, 三角矩阵 61

-, 数量矩阵 61
-, 相似矩阵 65
矩阵、线性映射的迹 96
矩阵的乘积 59
矩阵的第i行 54
矩阵的第j列 54
矩阵的行阶梯形式 74
距离 140
-, 球面距离 380
-, 双曲距离 338
-, 椭圆距离 359
绝对值，模 132

K

开集 141
扩张
-, $\mathbf{R}$- 向量空间V的复扩张$V_{\mathbf{C}}$ 118
克氏记号 47

L

连接关系 4
连续函数的集合$C(I;\mathbf{R})$ 44
连续线性映射 141
零解的稳定性 126
零空间 170, 202, 332
离心率 260

M

模，R- 模 21

N

内切圆 253
逆映射f^{-1} 2

O

欧几里得算法 99

P

旁切圆 254
抛物线 261
-, 抛物线的参数 261
配对，自然配对 45
配极变换 321
配极三角形 383
膨胀 290
平面
-, 仿射平面 182
-, 球面平面 380
-, 射影平面 285
-, 双曲平面 335, 348
-, 椭圆平面 358, 363
-, 左平行或右平行 375
平行 184, 299
平行多面体 173
平行多面体的体积 173

平行四边形 376
平行四边形公式 143
平行四边形法则 179
平行线所成的角 239
谱值 163

Q

齐次线性方程组 72
齐次坐标 287
切空间 339
切向量 339
球，球面 140
-, 闭球 140
-, 开球 140
球极投影 342, 366
球面 140, 142
球面 (子)空间 380
球面运动 380
球模型
-, 双曲空间的球模型 342
-, 椭圆空间的球模型 366
群 4
-, Abel群 5
-, Klein四元群 309
-, Lorentz群 333
-, 对称群 62, 76
-, 关于$< , >_L$的正交群 333
-, 交错群 80
-, 交换群 5
-, 特殊线性群 86
-, 特殊酉群 165
-, 特殊正交群 165
-, 一般线性群 26, 61
-, 正交群 164
群的同态定理 14
群的中心 15
群公理 4
群态射 7

S

三角形
-, 定向三角形 249
-, 欧氏三角形 248
-, 球面三角形 381
-, 双曲三角形 354
-, 椭圆三角形 385
三角形边的长度 249, 354, 382, 385
三角形不等式 139
三角形的边 249, 354, 382, 385
三角形的顶点 249, 354, 382, 385
三角形的高 252
三角形的角 249, 354, 382, 385
三角形等式 360, 380
三角形法则 179
三角形外角 249
三角形直线 249
三角形中的中垂线 252
三角形中的中线 252

删除矩阵$S_{ij}(A)$ 88
上半平面OH 353
射线 237
射线定理 196
-, 从$\mathcal{A}$到$\mathcal{B}$的射影 186
射影 (子)空间 284
射影变换 286
射影变换群$Pro(\mathcal{P})$ 286
射影扩张
-, 仿射 (子-)空间的射影扩张 292
-, 域的射影扩张$\mathcal{P}_\infty$ 306
射影平面, 一般射影平面 299
射影映射 286
射影直射变换 297
射影坐标 287
生成系 28
-, 有限生成系 33
生成子空间 182
收敛序列 142
收敛序列的极限 142
数量 21
数量积 131
-, 典范数量积 132, 150
双曲 (子)空间 335
双曲线 260
双曲运动 335
四面体, 一般四面体 184
四元数 (域) 243, 351
-, 纯四元数 244
-, 实四元数 244
四元数$\mathbf{H}$ 243, 351
算子, 线性算子 157
-, 酉算子 161
-, 正规算子 161
-, 自伴算子 161

T

态射 7
特征多项式 95
特征空间 94
-, 广义特征空间 106
特征向量 94
-, 广义特征向量 106
特征值 94
同构 9
-, 线性同构 26
投影 24
图, (用基确定的)图 35
-, 球面图 365
平移 178
椭圆 260
椭圆 (子)空间 358
椭圆运动 358
椭圆坐标 270
拓扑等价范数 142

W

完全四边形 314

完全四边形的对边 314
完全四边形的对边三角形 314
维数
-, 仿射 (子) 空间的维数 182
-, 球面 (子) 空间的维数 380
-, 射影 (子) 空间的维数 284
-, 双曲 (子) 空间的维数 335
-, 椭圆 (子) 空间的维数 358
-, 向量空间的维数 35
维数公式
-, 仿射空间的维数公式 183
-, 射影空间的维数公式 285
-, 向量空间的维数公式 37
-, 子空间的维数公式 38
位置向量 179
无穷远点
-, 仿射空间中的无穷远点 289
-, 双曲空间中的无穷远点 335

X

线性包 27
线性方程组 70, 72
-, 相应的齐次线性方程组 72
-, 齐次线性方程组 72
线性方程组的解 70
-, 线性方程组的特解 73
-, 线性方程组的通解 73
线性函数 192
线性生成 27
线性算子 157
线性微分方程组的解 115
线性无关，线性相关 29
线性形式 44
线性映射 24
-, 酉线性映射 161
-, 正规线性映射 161
-, 自伴线性映射 161
线性映射的空间 43
线性映射的扩张 31
线性映射的坐标表示 57
相似 286, 289
向量积 242
向量空间，**R**- 向量空间 21
-, 赋范向量空间 139
-, 欧氏向量空间 131
-, 酉向量空间 131
象 1
-, f 的象， im f 8
序列的 l^2_K Hilbert 空间 149

Y

严格凸 143
一般线性群 $GL(n, K)$ 61
一般线性群 $GL(V)$ 26
一次可微函数的集合 $\mathcal{D}(I; \mathbf{R})$ 51
一点关于一个球面的势 344
映射 1
-, 单射 1

-, 仿射映射 184
-, 恒同映射 1
-, 满射 1
-, 逆映射 2
-, 双射 1
-, 线性映射 24
-, 酉映射 161
-, 正规映射 161
-, 转置映射 50
-, 自伴映射 161
由矩阵 A 确定的线性映射 f_A 55
有理函数 16
有心二次型 231
酉群 164
-, 特殊酉群 165
右平移，右轨道 6, 373
陪集 11
余维数 37, 182
余弦定理 143, 250
-, 球面余弦定理 382
-, 双曲余弦定理 354
域 16
域自同构 190
元素族 23
原点
-, 空间的原点 179
-, 射线的原点 237
原象 1
园艺家公式 263
运动 218
-, (本性) 双曲运动 335
-, (本性) 椭圆运动 358
-, 本性运动 218

Z

正规子群 13
正交群 164
-, 特殊正交群 165
-, 正交子空间中的向量 132
正交子空间 132, 136, 222, 318
正区域 332
正扇形 241
正无穷远点 338
正弦定理 250
-, 球面的正弦定理 382
-, 双曲的正弦定理 354
-, 正弦定理的补充 257
直和 23
直射变换 188
直线
-, 仿射直线 182, 299
-, 球面直线 380
-, 射影直线 285, 299
-, 双曲直线 335
-, 椭圆直线 358
秩
-, 埃尔米特形式的秩 170
-, 矩阵的秩 63
-, 线性映射的秩 63

置换 5
-, 偶置换，奇置换 78
置换的符号 78
置换引理 33
-, (v. Steinitz) 置换定理 33
重量 180
重心 180
重心计算 180
主顶点和次顶点 260
主轴变换 169
转置映射 50
锥 322
准Hilbert空间 149
准线 261
子模判据 22
子群 6
-, 不变子群 13
-, 内自同构子群 10
子群判据 6
自伴 161
自同构 9
-, 内自同构 10
-, 线性自同构 26
自由系 29
最大范数，最大模 139
最大自由子集 32
最佳逼近 151
最小生成系 29
左平移，左轨道 6, 373
坐标 35, 194
-, 齐次坐标 287
坐标变换 58

责任编辑　张爱和
封面设计　于文燕
版式设计　沈纯理
责任校对　张爱和
责任印制　陈伟光

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何/（德）克林根贝尔格著；沈纯理，郑宇译. —北京：高等教育出版社，1998.9

ISBN 7-04-007340-4

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①克… ②沈… ③郑… Ⅲ. ①线性代数②几何 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 27442 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码：100009 传真：64014048 电话：64054588

新华书店总店北京发行所发行

化学工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13 字数 320 000

1998 年 9 月第 1 版 1998 年 9 月第 1 次印刷

印数 0 001—1 142

定价 25.00 元